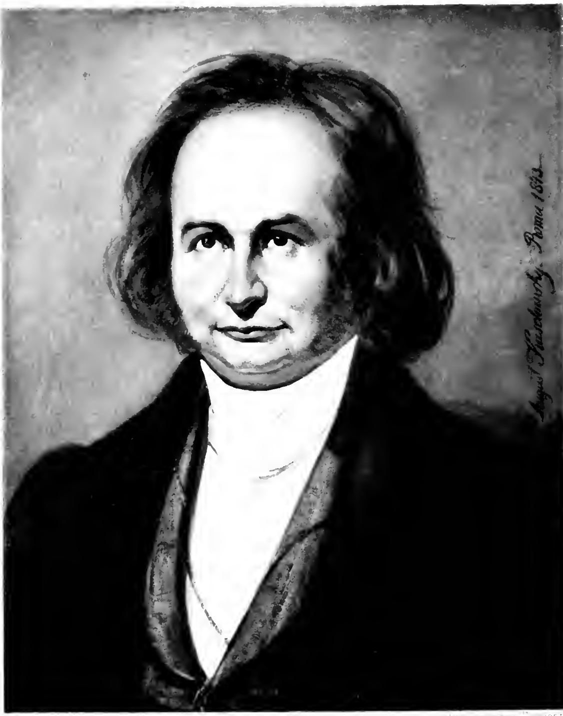

C. G. J. Jacobi.

CARL GUSTAV JACOB JACOBI

VON

LEO KOENIGSBERGER

FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DER HUNDERTSTEN WIEDERKEHR
SEINES GEBURTSTAGES

MIT EINEM BILDNIS
UND DEM FAKSIMILE EINES BRIEFES

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1904

VORWORT.

Nachdem von dem Komitee des 3. internationalen Mathematiker-Kongresses der ehrenvolle Auftrag an mich ergangen, zu der von demselben in Aussicht genommenen Feier der hundertsten Wiederkehr des Geburtstages Jacobis, des genialen Begründers umfassender Disziplinen der modernen Algebra, Analysis und Mechanik, die Festrede zu halten, glaubte ich, daß es der heutigen Generation der Mathematiker, welche in Verehrung und Pietät auf jenen Meister blicken, der ihnen den Boden für ein fruchtbares Weiterarbeiten auf den verschiedensten Gebieten exakter Forschung geschaffen, vielleicht nicht unerwünscht sein würde, der mathematischen Literatur eine anspruchslose Darstellung der Lebensschicksale und Arbeiten Jacobis sich einreihen zu sehen, welche 50 Jahre nach der meisterhaften, von der größten Verehrung und innigsten Freundschaft getragenen Gedächtnisrede Dirichlets in der Berliner Akademie vielleicht noch Ausführungen und Ergänzungen derselben den Mathematikern wird bieten können.

Für die mir durch Briefe und Mitteilungen von seiten der Angehörigen geleistete Beihilfe, sowie für die von der preußischen Unterrichtsverwaltung mir erteilte Erlaubnis zur Einsichtnahme in die Akten von Jacobi, endlich auch für die von der Berliner Akademie mir gewährte Unterstützung durch die im Jacobi-Archiv aufbewahrten Briefe und Vorlesungshefte spreche ich an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus.

Heidelberg, im Mai 1904.

Leo Koenigsberger.

INHALTS-ÜBERSICHT

UND

VERZEICHNIS DER WISSENSCHAFTLICHEN ARBEITEN VON C. G. J. JACOBI.

(Die römischen Ziffern bezeichnen den Band der gesammelten Werke Jacobis.)

Carl Gustav Jacob Jacobis Jugendjahre.
1804—1821.

Carl Gustav Jacob Jacobi wurde zu Potsdam am 10. Dezember 1804 als zweiter Sohn des Bankiers Simon Jacobi und dessen Frau geboren, aus deren Ehe noch zwei Söhne, Moritz und Eduard, sowie eine Tochter Therese entsprossen. Nachdem der geistig ungewöhnlich regsame Knabe die erste Unterweisung in den alten Sprachen und den Elementen der Mathematik von seinem mütterlichen Oheim Lehmann, „unicus et carissimus praeceptor“, wie er ihn später nannte, erhalten, trat er im November 1816, noch nicht 12 Jahre alt, in die zweite Klasse des Potsdamer Gymnasiums ein, welches erst im folgenden Jahre durch Hinzufügung zweier Klassen und durch Verdopplung der Zahl der ordentlichen Lehrer zu einem wirklichen Gymnasium umgestaltet wurde; nach einem halben Jahre schon wurde er in die erste Klasse aufgenommen, in der er jedoch seines jugendlichen Alters wegen 4 Jahre verbleiben mußte, um nicht vor zurückgelegtem 16. Jahre der Universität zugeführt zu werden.

Der Unterricht in den alten Sprachen und der Geschichte war, wie damals an den meisten Gymnasien Preußens, nach der staatlichen und geistigen Erhebung des Volkes ein vorzüglicher, von Begeisterung und sittlichem Ernst getragen pflanzte er der Jugend unauslöschliche ideale Anschauungen ein; an führender und leitender Stelle standen

überall die Männer, denen mehr als fünfzig Jahre später einer der größten Naturforscher aller Zeiten und ebenfalls ein Schüler des Potsdamer Gymnasiums, in Pietät und Verehrung die schönen und charakteristischen Worte widmete: „Die Älteren unter uns haben noch die Männer jener Periode gekannt, die einst als die ersten Freiwilligen in das Heer traten, stets bereit, sich in die Erörterung metaphysischer Probleme zu versenken, wohlbelesen in den Werken der großen Dichter Deutschlands, noch glühend von Zorn, wenn vom ersten Napoleon, von Begeisterung und Stolz, wenn von den Taten des Befreiungskrieges die Rede war."

Wir erfüllen nur eine Pflicht der Dankbarkeit, wenn wir jetzt noch des eifrigen und wackeren Mannes gedenken, dem es damals oblag, den Schülern des Potsdamer Gymnasiums den mathematischen Unterricht zu erteilen, und welcher durch Abfassung mehrerer Lehrbücher sich auch an wissenschaftlicher Arbeit beteiligte. Die, Liebe, Dankbarkeit und Verehrung bezeugende Urkunde der von den Schülern Heinrich Bauers im Jahre 1845 zu dessen 50jährigem Lehrerjubiläum begründeten Stiftung trägt als ihre größte Zierde den Namen Jacobis, der zur Feier persönlich erschienen, um dem Jubilar das Diplom eines Ehrenmitgliedes der Deutschen Gesellschaft zu Königsberg zu überreichen, nachdem schon 20 Jahre zuvor an die Stelle Bauers sein und Bessels Schüler, der Oberlehrer Meyer, getreten war, dessen segensreicher Unterricht einen so großen Einfluß auf die Heranbildung des jungen Helmholtz ausgeübt. Die Schüler der ersten Klasse des Gymnasiums beschäftigten sich unter der einsichtigen Leitung Bauers mit Stereometrie und sphärischer Trigonometrie, neben höherer Geometrie auch mit Differential- und Integralrechnung, und die im Jahre 1819 dem Lektionsplane zufolge eingehend betriebene Behandlung der numerischen Auflösung von Gleichungen 5. und 6. Grades führte Jacobi dazu, seine

Kräfte an dem durch so viele vergebliche Bemühungen berühmt gewordenen Problem der Auflösung der allgemeinen Gleichungen höherer Grade zu versuchen:

„olim, ut fit, cum puer studiosus in tentanda resolutione algebraica aequationum quinti gradus desudarem“, sagt er im Jahre 1834, „aequationem generalem $x^5 - 10q^2x = p$ ad aliam decimi gradus revocavi, cujus resolutio algebraica contigit, duorum tantum coefficientium signis mutatis — rem inutilem, sed curiosam, paucis referam.“

Wie aus einer kurzen Notiz ersichtlich, beschäftigte sich auch der um 2 Jahre ältere Abel in demselben Jahre 1820 mit der Reproduktion der Auflösungsmethoden der Gleichungen 3. und 4. Grades und mit Versuchen, die Gleichungen 5. Grades aufzulösen:

„mais il n'y a pas trace de la recherche la plus célèbre, à laquelle il s'est adonné à la fin de son temps d'école, c'est à dire l'essai de résolution de l'équation du cinquième degré. Cet essai échoua, comme on sait, mais fut pour lui d'une conséquence durable à plusieurs égards.“

„Das Glück, so schöne Abschnitte der Mathematik wie diesmal nehmen zu können, werde ich wohl in langer Zeit nicht wieder haben“, schreibt Bauer, und das Schulzeugnis Jacobis vom Winter 1820 spricht dem primus omnium „ausgezeichnete Fortschritte in allen Lehrgegenständen, besonders auch in der Mathematik“ zu. In den alten Sprachen waren die Kenntnisse des ungewöhnlich begabten Schülers überaus hervorragende.

„Wenn Du wieder an mich schreibst“, lautet ein Brief seines Onkels Lehmann vom 25. Januar 1821, „dann schicke mir das griechische Gedicht, das Du zum actus Michaelis declamirt hast; ich habe hier einen Professor zum Freunde, dem ich es zeigen will, und er soll mir sagen, ob ein Schüler hier auch so weit ist.“

Ostern 1821, kaum 16 Jahre alt, bestand Jacobi sein Abiturientenexamen. Sein deutscher Aufsatz „Über das

Wesen, den Ursprung und die Verwerflichkeit des Egoismus nebst Mitteln, sich vor diesem Laster, das viele das Laster des Tages nennen, zu wahren“ wird in dem Gedankengange und in den Gedanken selbst als gut bezeichnet, und die Hoffnung ausgesprochen, daß am Ende der Gärung sich auch ein klarer und rasch strömender Fluß der Rede ergeben werde — „man kann nach Engel“, fügt Bauer in der Beurteilung hinzu, „selbst ein namhafter Gelehrter werden, ehe man auch nur ein erträglicher Stilist wird.“ Und Jacobi wurde später ein glänzender Stilist.

Die von seinem Lehrer Bauer als sehr gut beurteilte mathematische Arbeit behandelte das Problem: „wenn Polhöhe eines Ortes, Abweichung eines Sternes, des Sternes Höhe, Stundenwinkel und Azimut für diesen Ort gegeben sind, aus je 3 dieser Stücke die beiden andern zu finden.“ Der klaren und einfachen Herleitung der Formel für den Stundenwinkel und den Azimut fügt der jugendliche Verfasser die Bemerkung bei: „ob dieser Beweis in irgend einem Lehrbuch vorkommt, weiß ich nicht aus Unkunde der mathematischen Literatur. Gewöhnlich aber wird er, als das wichtigste Theorem der sphärischen Trigonometrie auch so schwer vorgetragen, daß ich mich freute, ihn so leicht, klar und schnell zu übersehen gefunden zu haben“, und nachdem er noch weitere vier Fälle übersichtlich behandelt, schließt er die Arbeit mit den Worten: „Bei weitem schwerer ist, wenn man für jedes der 20 Probleme eine Formel entwickeln will. Bei einem früheren Versuche, den ganz hierher zu setzen, mir Zeit und Raum verboten, suchte ich dies zu bewerkstelligen, fand aber oft so unendlich lange, schwerfällige Formeln, daß weder der Rechner noch der Analyst irgend Vortheil daraus zu ziehen hoffen kann.“

Nachdem Jacobi sowie sein einziger Mitabiturient ein ausgezeichnetes mündliches Examen abgelegt, erhielt er am 11. April 1821 sein Abiturientenzeugnis:

„Von Gott mit seltenen Anlagen des Geistes beglückt,

sind seine Kenntnisse ebenso gründlich als ausgezeichnet in der lateinischen Sprache, verbunden mit Mythologie und Archäologie, und ganz vorzüglich in der Mathematik; besonders besitzt er ganz ungewöhnliche Kenntnisse in der griechischen Sprache und in der Geschichte", und in dem Schreiben, mit welchem der Rektor am 17. Juni die Abiturientenarbeiten an das Konsistorium schickte, war hinzugefügt: „Was den Abiturienten Jacobi betrifft, so glaube ich noch bemerken zu dürfen, daß er ungewöhnliche Fähigkeiten mit einer hohen Ruhe des Geistes besitzt, daß er alles ergreift und umfaßt, ohne durch Ermüdung unterbrochen zu werden; jetzt studiert er zwar Philologie und Mathematik, schwerlich aber möchten ihn diese Fächer auf immer fixiren; in jedem Falle wird er sich einst merkwürdig machen" . . . „Er ist ein universeller Kopf", replizierte ein wenig später der Rektor des Gymnasiums, als das Konsistorium in einem Reskript vom 24. Januar 1822 das dem studioso philologiae Jacobi gespendete Lob zu ausgedehnt erachtete und in nicht gerechter Strenge in den mathematischen Abiturientenarbeiten nur einige mathematische Fertigkeit, nicht aber wissenschaftlichen Geist und Methode erkennen wollte.

Jacobi als Student an der Universität zu Berlin. Ostern 1821—Ostern 1825.

Der junge Student bezog nun die Universität Berlin, der er vom 28. April 1821 bis zum 25. Mai 1825 angehörte, und betrieb während der ersten beiden Jahre ziemlich gleichmäßig philosophische, philologische und mathematische Studien. „Was Du in diesem Semester getrieben hast", schreibt ihm sein um 3 Jahre älterer Bruder Moritz aus Göttingen, der spätere ausgezeichnete Petersburger Physiker, welcher sich damals für eine technische Laufbahn vorbereitete, „was für Collegia Du hörst, weiß ich noch nicht einmal." Er vermutet, daß ihn die mathematischen Vorlesungen nicht allzusehr fesseln, schildert ihm aber auch die in Göttingen gehaltenen nicht in sehr verlockender Weise: „was ich höre, weiß ich leider, denn Thibaut wird so verwünscht langweilig und macht so vielen Kohl, daß ich lieber mitunter wegbleiben möchte, wenn die Lücken in meinem Hefte mich nicht zum Gegentheil ermahnten."

„Als Teilnehmer an den Übungen des philologischen Seminars", berichtet Dirichlet, „erregte Jacobi die Aufmerksamkeit von Boeckh, des Vorstehers dieses Instituts, welcher den jungen Mann wegen seines scharfen und eigentümlichen Geistes sehr lieb gewann und durch besonderes Wohlwollen auszeichnete."

Vom Januar 1824, als er sich bereits tiefer mit dem Studium der Werke Eulers und der großen französischen

Mathematiker beschäftigte, ist eine Seminararbeit von ihm datiert: „Pappi Alexandrini collectiones mathematicas explicavit C. G. Jacobi, semin. philol. sod. Berolini.“ Die Schrift umfaßt 22 Quartblätter und wurde von Borchardt geraume Zeit nach Jacobis Tode Hultsch in Dresden mit der Ermächtigung übersandt, daraus zu veröffentlichen, was noch jetzt von Interesse scheine — und dies geschah auch sehr bald. Die Untersuchung beginnt in Form einer Dedikation an seine Seminargenossen mit den schwungvollen Worten:

„Miramini, commilitones suavissimi, philologum me vobis philologis dissertatiunculam proponere de Pappi Alexandrini collectionibus mathematicis. Fragmenta exspectatis collecta, monostrophica in stropham et antistropham disposita, alia ejusmodi: jam numeros videtis, figuras. Nec tanta fuisset audacia mea, tam aliena studiis vestris in medium proferre, nisi ingenii vestri excellentia fretus essem, qui bene scitis et, quaecunque ad antiquitatem pertinent, ad philologiam pertinere, et post Alexandrum quoque vixisse Graecos. Est vero mathesis Graeca, quemadmodum Graeca philosophia, clarum ingenii humani documentum et, sicuti haec, perfectum aliquod et absolutum. Hinc pudere debet philologum ejus disciplinae vel prima elementa ignorare, in qua tanti erant veteres, ne dicam, quod notum est, quantum Graecae matheseos cognitio ad Platonem alios intelligendos faciat . . . . .“

Nachdem er seine Ansicht begründet, daß die Übersetzung der Werke des Pappus von Commandini den griechischen Text nicht ersetzen könne, und den Wunsch ausgesprochen, daß wenigstens die Vorreden der einzelnen Bücher und diejenigen Abschnitte derselben, in welchen zusammenhängende Erörterungen und Untersuchungen niedergelegt sind, besonders herausgegeben würden, geht er auf eine philologisch-mathematisch-kritische Besprechung des Inhaltes der einzelnen Bücher des Pappus ein, sucht ver-

derbte Stellen durch scharfsinnige Konjekturen zu erklären und ist vor allem bestrebt, die Wichtigkeit der Sammlung für die Geschichte der griechischen Mathematik darzulegen. „Et ita multorum mathematicorum Pappus non nomina tantum, sed etiam ipsa opera continet, ut appareat, quantum ejus lectio ad veteris matheseos cognitionem faciat.“ Er sucht zu zeigen, auf welche Punkte sich hauptsächlich ein tieferes Eindringen in die Mathematik der Griechen richten müsse, und ahnte schon damals die von späteren Forschern festgestellten Errungenschaften der Griechen auch in der analytischen Geometrie.

Zu dieser Zeit war aber schon längst der Entschluß in ihm gereift, sich ganz der Mathematik zu widmen:

„Indem ich so doch einige Zeit mich ernstlich mit der Philologie beschäftigte“, schreibt der neunzehnjährige Student seinem Onkel Lehmann, „gelang es mir, einen Blick wenigstens zu thun in die innere Herrlichkeit des alten Hellenischen Lebens, so daß ich wenigstens nicht ohne Kampf dessen weitere Erforschung aufgeben konnte. Denn aufgeben muß ich sie für jetzt ganz. Der ungeheure Koloß, den die Arbeiten eines Euler, Lagrange, Laplace hervorgerufen haben, erfordert die ungeheuerste Kraft und Anstrengung des Nachdenkens, wenn man in seine innere Natur eindringen will, und nicht bloß äußerlich daran herumkramen. Über diesen Meister zu werden, daß man nicht jeden Augenblick fürchten muß, von ihm erdrückt zu werden, treibt ein Drang, der nicht rasten und ruhen läßt, bis man oben steht und das ganze Werk übersehen kann. Dann ist es auch erst möglich, mit Ruhe an der Vervollkommnung seiner einzelnen Theile recht zu arbeiten und das ganze große Werk nach Kräften weiterzuführen, wenn man seinen Geist erfaßt hat.“

Ohne jede Anleitung, ganz auf sich angewiesen, versenkte er sich in das Studium der mathematischen Wissenschaft, die nunmehr alle seine Gedanken beherrschte. „Mathe-

matische Vorlesungen", sagt Dirichlet, „scheint er wenig besucht zu haben, da diese damals auf der hiesigen Universität einen zu elementaren Charakter hatten, als daß sie Jacobi, der schon mit einigen der Hauptwerke von Euler und Lagrange vertraut war, wesentlich hätten fördern können. Desto eifriger sah er sich in der mathematischen Literatur um und suchte namentlich eine allgemeine Übersicht der großen wissenschaftlichen Schätze zu gewinnen, welche die akademischen Sammlungen enthalten." Außer dem einen großen Namen Gauss gab es damals in Deutschland keinen andern, der auf den jungen Studenten eine Anziehungskraft hätte ausüben können, und deshalb war auch Dirichlet bereits im Jahre 1822 nach Paris gegangen, um dort bis zum Frühjahr 1827 den Unterricht und Verkehr all der großen Meister Laplace, Legendre, Fourier, Cauchy, Lacroix, Biot u. a. zu genießen.

Zur Zeit, als Jacobi den Entschluß faßte, ganz der Mathematik sich zuzuwenden, war der 21jährige Abel bereits tief mit seinen Untersuchungen über die elliptischen Transzendenten beschäftigt; am 4. August 1823 schrieb er aus Kopenhagen an Holmboe: „... Ce petit travail traitait, tu te le rapelles, des fonctions inverses des transcendantes elliptiques, et j'y avais démontré une chose impossible; j'ai prié Degen de le lire d'un bout à l'autre, mais il ne put découvrir aucune fausse conclusion, ni comprendre, où était la faute; Dieu sait comment je m'en tirerai ..."

Schon nach einem Jahre gewaltiger geistiger Arbeit glaubte Jacobi, kaum 20 Jahre alt, die mathematische Befähigung für die Staatsprüfung betätigen zu können; nachdem er bereits in seinem ersten Semester die Hindernisse überwunden, die ihm bei den religiösen und sozialen Anschauungen seiner Zeit für die Erlangung einer Staatsstellung in den Weg treten konnten, meldete er sich im Jahre 1824 zur Prüfung und erhielt zur mathematischen Probearbeit die Aufgabe: „Analysis der Kurve, welche auf

der Oberfläche eines durch Umwälzung einer Ellipse um ihre kleinere Hauptachse erzeugten Sphäroids durch den Schnitt einer ihrer Lage nach gegebenen Ebene mit der Oberfläche entsteht.“ Das vom 6. September 1824 datierte, von der wissenschaftlichen Prüfungskommission in Berlin, welcher Poselger als Mathematiker angehörte, ausgestellte Oberlehrerzeugnis erteilt ihm im Lateinischen und Griechischen die Fakultas für die oberen Klassen, in alter und neuer Geschichte die Lehrbefähigung bis Sekunda inkl.; „in der Mathematik besitzt er ausgezeichnete Kenntnisse und vorzügliches Talent, so daß ihm ohne Bedenken der Unterricht in diesem Fache auch in der obersten Klasse übertragen werden darf. In der Philosophie hat er lobenswerthen Scharfsinn und Bekanntschaft mit den älteren und neueren Systemen dieser Wissenschaft, auch mit Pädagogik, Logik und Metaphysik gezeigt.“

„Es ist eine saure Arbeit, die ich gethan habe“, schreibt er ein wenig später, mit Befriedigung auf die Vergangenheit und mit Vertrauen in die Zukunft blickend, „und eine saure Arbeit, in der ich begriffen bin. Nicht Fleiß und Gedächtniß sind es, die hier zum Ziele führen, sie sind hier die untergeordneten Diener des sich bewegenden reinen Gedankens. Aber hartnäckiges, hirnzersprengendes Nachdenken erheischt mehr Kraft als der ausdauerndste Fleiß. Wenn ich daher durch stete Übung dieses Nachdenkens einige Kraft darin gewonnen habe, so glaube man nicht, es sei mir leicht geworden, durch irgend eine glückliche Naturgabe etwa. Saure, saure Arbeit habe ich zu bestehen, und die Angst des Nachdenkens hat oft mächtig an meiner Gesundheit gerüttelt. Das Bewußtsein freilich der erlangten Kraft giebt den schönsten Lohn der Arbeit, sowie wiederum die Ermuthigung fortzufahren und nicht zu erschlaffen. Gedankenlose Menschen, denen jene Arbeit und jenes Bewußtsein also auch ein ganz fremdes ist, suchen diesen Trost, der doch allein machen kann, daß man auf der schwierigen Bahn den Muth nicht sinken läßt,

dadurch zu verkümmern, daß sie das Bewußtsein ein eignes, freies zu sein — denn nur in der Bewegung der Gedanken ist der Mensch frei und bei sich — unter dem Namen Eigendünkel oder Anmaßung gehässig machen. Jeder, der die Idee einer Wissenschaft in sich trägt, kann nicht anders als die Dinge darnach abschätzen, wie sich der menschliche Geist in ihnen offenbart: nach diesem großen Maßstab muß ihm daher manches als geringfügig vorkommen, was den andern ziemlich preiswürdig erscheinen kann. So hat man auch mir oft Anmaßung vorgeworfen, oder, wie man mich am schönsten gelobt hat, indem man einen Tadel auszusprechen meinte, ich sei stolz gegen alles Niedere und nur demüthig gegen das Höhere. Aber jener unendliche Maßstab, den man an die Welt in sich und außer sich legt, hindert vor aller Überschätzung seiner selbst, indem man immer das unendliche Ziel im Auge hat und seine beschränkte Kraft. In jenem Stolze und jener Demuth will ich immer zu beharren streben, ja immer stolzer und immer demüthiger werden."

Einige Monate nach abgelegter Staatsprüfung teilt das Königl. Konsistorium der Provinz Brandenburg dem Schulamtskandidaten Jacobi am 16. Juni 1825 mit: „Wir haben Sie in Folge einer vom Königl. Ministerium am 27. v. M. erlassenen Verfügung und nach Maßgabe ihres rühmlichen Prüfungszeugnisses zu einer Anstellung an einer gelehrten Schule unseres Ressorts, wenn thunlich hierort, und namentlich, wenn dies Ihrer Neigung zusagt, zu einer Stelle als Inspector der Alumnen des Joachimsthalschen Gymnasiums notirt, können jedoch nicht umhin, Sie darauf aufmerksam zu machen, daß die meisten Gymnasien der Provinz Brandenburg magisträtlichen Patronates sind, daher Sie sich eintretenden Falls auch an die Magisträte wenden wollen."

Inzwischen hatte sich Jacobi bereits mit den Vorbereitungen zu seinem Doktorexamen beschäftigt und die Meldung zu demselben unter Beilegung einer „Meditationes analyticae" betitelten wissenschaftlichen Arbeit am 7. Juni

1825 bei der philosophischen Fakultät eingereicht. „Ex prima aetate disciplinis mathematicis addictus, id semper egi, uti discenda, quantum fieri possit, ipse invenirem, qua via difficili licet et spinosa eo tamen proveni, ut pauca etiam invenirem ea, quae disci non potuerunt."

Der Dekan, Professor Hagen, empfiehlt zunächst die von Jacobi als Probeschrift eingereichten „Meditationes analyticae" den Kollegen vom Fache, Dirksen, Ideler, Oltmanns und Hegel, zur Prüfung, und nachdem das nachfolgende Urteil eingegangen war:

„Wenn auch gegen die Probeschrift mehreres, und besonders mit Beziehung auf den Vortrag zu erinnern sein dürfte, so zeugt sie dennoch von einer mehr als gewöhnlichen Selbstthätigkeit und einer gewissen Originalität der Behandlung, weßhalb dem Verfasser die Zulassung zum Examen meines Erachtens wohl nicht verwehrt werden kann. Dirksen.

Dieser Ansicht des Professor Dirksen stimme ich vollkommen bei. Oltmanns.

Auch ich. Ideler. Accedo. Hegel",
wurde das mündliche Examen auf den 4. Juli anberaumt:

„Herr Professor Dirksen stellte Fragen über das Gebiet der Arithmetik, von den Prinzipien der gewöhnlichen Zahlen-Arithmetik an bis zur Integralrechnung eingeschlossen, und fand den Kandidaten mit sehr lobenswerten Kenntnissen ausgerüstet. Professor Oltmanns fragte über die Gestalt der Erde und Geschichte der Gradmessungen und Bemühungen, solche Gestalt zu bestimmen, und fand den Kandidaten mit lobenswerten Kenntnissen ausgerüstet." Weiter prüften noch Ermann, Hegel und Boeckh.

Nach Absolvierung der mündlichen Prüfung richtete Jacobi sogleich das Gesuch an die Fakultät, sich an derselben habilitieren zu dürfen, und schon am 8. August fand das Kolloquium statt. „Nachdem zufolge des Umlaufes vom 13. Juli 1825 dem Kandidaten Jacobi verstattet worden, seine Habilitation mit der Promotion zu verbinden, hielt

derselbe in der heutigen Fakultätsitzung seine deutsche Probevorlesung, Theorie der singulären Stammgleichungen, im freien mündlichen Vortrage, an welche sich ein Gespräch mit Herrn Professor Dirksen anknüpfte. Der Kandidat leistete alles zur völligen Zufriedenheit aller Anwesenden.“ In derselben Sitzung wurde noch dem zur Dissertation bestimmten Teile der Probeschrift sowie den beigelegten Thesen das Imprimatur erteilt und der etwas veränderte Gegenstand der öffentlichen Probevorlesung genehmigt.

Am 13. August 1825 fand nun die Promotion statt, in welcher Jacobi in öffentlicher Disputation u. a. die Thesen verteidigte:

E theoria functionum Ill.i Lagrangii minime sequitur, reiiciendam esse theoriam infinite parvi, immo recte hanc adhibitam nunquam errare posse.

Methodus ab Ill.o Lagrange ad reversionem serierum adhibita omnium optima est.

Theoria Mechanices Analytica causam agnoscere nullam potest, quidni, sicuti differentialia prima velocitatis nomine, secunda virium insignimus, simile quid ad altiora quoque differentialia adhibeatur, de quibus theoremata proponi possint prorsus analoga iis, quae de vi et de velocitate circumferuntur,

und er erhielt auf Grund des Examens und der Dissertation, welcher er, als einem Teil der eingereichten „Meditationes analyticae“, den Titel „Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus“ gab, das Doktordiplom, welches lautete: „... postquam examen philosophicum cum laude sustinuerat et dissertationem doctam de Fractionibus simplicibus publice defenderat ...“

Unmittelbar darauf hielt er zum Zwecke seiner Habilitation eine öffentliche lateinische Probevorlesung, zu deren Gegenstande er sich das Thema „Methodus aequationum radices per series infinitas inveniendi, ab Ill.o Lagrange in Actis Academiae nostrae a. 1768 exhibita“ gewählt hatte.

Schon in seiner Dissertation, welche zum Teil aus Be-

merkungen hervorgegangen, die er bereits während seiner Studienzeit bei der Lektüre der Werke von Euler und Lagrange gemacht hatte, zeigt sich Jacobi als vollendeten Mathematiker.

„Mirum videri possit, et fortasse temerarium, si quis in materia inde a primis recentioris Analyseos temporibus a plurimis mathematicis tractata, quam igitur jure optimo decantatam dicere licet, vel novi quid velit afferre, vel ita rem attingere, ut ne acta egisse videatur ... Sane nos quoque ista turba deterruisset, nisi casu in manus incidisset commentatio Ill.[i] Lagrange ...“

Es handelt sich in dieser Arbeit, in welcher, wie Dirichlet hervorhebt, bereits ein neues Prinzip bemerkbar ist, von welchem Jacobi in seinen späteren Arbeiten mehrfach Gebrauch gemacht hat, und welches wesentlich funktionentheoretischer Natur ist, zunächst um den Übergang von der Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion mit nur einfachen Lösungen des Nenners zu dem allgemeinen Falle der vielfachen Lösungen, den Malfatti und Lagrange dadurch bewerkstelligten, daß sie die Lösungen um sehr wenig voneinander verschieden annahmen und sodann zur Grenze übergingen. Jacobi gelangt von der, in jetzt gebräuchlichen Bezeichnungen für die Entwicklungskoeffizienten einer Funktion, unmittelbar ersichtlichen Beziehung

$$\frac{1}{(m-\alpha)!}\,\frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}}\left(\frac{\Pi(\alpha)}{x-\alpha}\right) = \left[\frac{\Pi(\alpha+h)}{x-\alpha-h}\right]_{h^{m-1}}$$

zu einem von Lagrange aufgestellten Theorem und leitet hieraus unmittelbar in einheitlicher Form die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen ohne Beschränkung der Ordnung des Unendlichwerdens her. Wie er nun aus der in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes gültigen Entwicklung von $\frac{1}{F(x)}$, deren Koeffizienten er mit $1, {}'C^1, {}'C^2, \ldots$ bezeichnet, und aus der entsprechenden Entwicklung der Partialbrüche durch Identifizierung der Koeffizienten der

gleich hohen x-Potenzen Relationen von der Form gewinnt

$$\sum_1^n \frac{\alpha_\varkappa^{m-\varrho}}{F'(\alpha_\varkappa)} = 0, \quad \sum_1^n \frac{\alpha_\varkappa^{m+\varrho}}{F'(\alpha_\varkappa)} = {'C^{\varrho+1}},$$

so zeigt er, daß, wenn $M_{12} = (\alpha_1 - \alpha_3) \ldots (\alpha_1 - \alpha_n)(\alpha_2 - \alpha_3) \ldots (\alpha_2 - \alpha_n)$, aus den für $a = 0, 1, 2, \ldots n-2$ gültigen Beziehungen

$$\frac{x^a}{(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)} = \sum \frac{\alpha_1^a \alpha_2^{n-2}}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} \frac{1}{M_{12}}$$

ähnliche Relationen hergeleitet werden können, die einer neuen Art von Zerlegung entsprechen, welche jedoch nicht wie die bisher betrachtete völlig bestimmt ist.

„Non est meum, per calculos prolixos terrorem incutere lectori, eodemque repetito negotio plurimas paginas implere", und so hebt er nur noch die einfachen Zerlegungen für den Fall hervor, in dem die Lösungen des Nenners eine arithmetische Reihe bilden, und wendet sich schließlich zu einer wichtigen Anwendung der Partialbruchzerlegung, um einige „theoremata de singulari quadam serierum infinitarum transformatione" aufzustellen. Durch Zerlegung der einzelnen Summanden der Reihe

$$S = \frac{1}{a} + \frac{x(a+c)}{a(a+1)} + \frac{x^2(a+c)(a+c+1)}{a(a+1)(a+2)} + \ldots$$

in Partialbrüche findet er unter anderem die Reihentransformation

$$S = \left[\frac{1}{a} - \frac{x(c-1)}{a+1} + \frac{x^2(c-1)(c-2)}{(a+2)1.2} - \ldots\right] \frac{1}{(1-x)^c}$$
$$= \frac{1}{(1-x)^c x^a} \int x^{a-1}(1-x)^{c-1} dx,$$

und daraus, wenn $x = \frac{y}{c}$, $c = \infty$ gesetzt wird,

$$S = \frac{1}{a} + \frac{y}{a(a+1)} + \frac{y^2}{a(a+1)(a+2)} + \ldots$$
$$= \left(\frac{1}{a} - \frac{y}{a+1} + \frac{y^2}{1.2(a+2)} - \ldots\right) e^y,$$

und in ähnlicher Weise noch etwas allgemeinere Umformungen, wie sie schon Euler und Pfaff angedeutet: „hanc methodum peritus cognoverit latius patere, immo ad series hypergeometricas omnium ordinum extendi posse. Ceterum, qui post Ill.um Pfaff hanc attigerit transformationem, neminem scio praeter Ill.um Gauss, cujus ea de re commentatio in omnium manibus est.“

In seinem Nachlasse fand sich ein Exemplar dieser Dissertation, „in welchem von ihm an vielen Stellen stilistische Änderungen, namentlich Kürzungen sowohl des Textes als der Formeln vorgenommen, zugleich aber auch mehrere Paragraphen mit handschriftlichen Zusätzen von erheblicher Ausdehnung versehen worden sind“, welche Weierstrass im September 1884 unter dem Titel „Additamenta ad commentationem quae inscripta est: Disquisitiones analyticae etc.“ veröffentlichte, und die wahrscheinlich aus der ersten Zeit seiner Königsberger Tätigkeit herrühren. Durch unmittelbare Übertragung der Resultate seiner Dissertation leitet Jacobi in diesen Zusätzen das Theorem her, daß, wenn $\varphi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$, $f(x)$ und $\chi(x)$ beliebige ganze Funktionen sind, die Summe

$$\sum \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \{ f(\alpha_1)\chi(\alpha_2) + f(\alpha_2)\chi(\alpha_1) \}}{\varphi'(\alpha_1)\varphi'(\alpha_2)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}$$

sich von

$$\left[\frac{(x - y)\{ f(x)\chi(y) + \chi(x)f(y) \}}{\varphi(x)\varphi(y)}\right]_{y^{-1}}$$

nur durch eine ganze Funktion von x unterscheidet, und ähnliche Beziehungen für Verbindungen von mehr Funktionen je einer, aber voneinander unabhängiger Variabeln durch Vergleichung der Koeffizienten der Entwicklungsglieder von Potenzverbindungen dieser Variabeln, sowie endlich noch für Funktionen von mehr als einer Variabeln. Schließlich werden von diesen Entwicklungen noch Anwendungen auf die Theorie der symmetrischen Funktionen gemacht, und diese in der jetzt üblichen Weise durch Determinanten ausgedrückt, welche aus den zu verschiedenen Klassen genommenen Kom-

binationen der Größen zusammengesetzt sind, woraus sich wiederum die bekannten Formeln für die Potenzsummen als einfache Determinanten ergeben.

Wenige Wochen nach der Habilitation Jacobis, der sich zunächst mehr rezeptiv in das Studium der Werke der Begründer der modernen Mathematik versenkt hatte, verließ Abel im September 1825 Christiania, bereits im vollen Besitze der leitenden Ideen seiner wichtigsten Entdeckungen, der Umkehrung der elliptischen Integrale, der doppelten Periodizität und des allgemeinen Additionstheorems. „Nous devons croire non seulement à une pleine maturité et à une foule des résultats de détail, mais aussi à une profonde pénétration des théories qui constituèrent plus tard son domaine, déjà atteinte et acquise dans cette silencieuse période de travail au pays.“

Die erste von Jacobi im Wintersemester 1825/26 in Berlin gehaltene Vorlesung behandelte die Anwendungen der höheren Analysis auf die Theorie der Oberflächen und Kurven doppelter Krümmung, und die eminente Lehrbefähigung des jugendlichen Dozenten machte sogleich auf einen größeren Zuhörerkreis einen nachhaltigen Eindruck. „Nach dem Zeugnis eines seiner damaligen Zuhörer“, berichtet Dirichlet, „muß sein Lehrtalent bei diesem ersten Auftreten schon sehr entwickelt gewesen sein, und er es verstanden haben, sein Thema mit großer Klarheit und auf eine seine Zuhörer sehr anregende Weise zu behandeln. Der 21jährige Dozent zeigte auch darin eine sehr frühe Reife des Urteils, daß er, unbeirrt durch den Mißkredit, in welchen die Methode des Unendlichkleinen um jene Zeit durch eine große Autorität gekommen war, gerade dieser in seiner Darstellung folgte und seine Zuhörer mit dem besten Erfolge zu überzeugen sich bemühte, daß die verdächtigte Methode nur in ihrer abgekürzten Form von der strengen Methode der Alten verschieden ist, aber gerade durch diese Form bei allen zusammengesetzteren Fragen unentbehrlich wird.“

Jacobi als Privatdozent an der Universität zu Königsberg von Ostern 1826—Dezember 1827.

Jacobi hatte durch seine Dissertation sowie durch den für die damaligen mathematischen Verhältnisse Berlins ganz ungewöhnlichen Lehrerfolg die Aufmerksamkeit des Unterrichtsministeriums auf sich gelenkt, und dieses ging bereitwillig auf den von ihm geäußerten Wunsch ein, seine Lehrtätigkeit als Privatdozent in Königsberg an Stelle des eben verstorbenen ordentlichen Professors der Mathematik Wrede fortsetzen zu dürfen, um dem jungen Dozenten mehr Aussichten für eine etwaige Beförderung bieten zu können. Am 26. April 1826 erhielt er das nachfolgende ministerielle Schreiben: „Das Ministerium eröffnet Ihnen auf die Vorstellung vom 20. d. M., daß es Ihre Absicht, bei der Universität in Königsberg als Privatdocent aufzutreten, unter den von Ihnen angeführten Umständen billigt und Ihnen, vorausgesetzt, daß Sie den dortigen Studirenden durch Ihre Vorlesungen nützlich werden, eine jährliche außerordentliche Remuneration von 200 Thalern hierdurch zusichern will. Übrigens erwartet das Ministerium von Ihnen, daß Sie baldigst nach Königsberg abgehen und noch in dem laufenden Semester Ihre Vorlesungen beginnen werden."

So übersiedelte nun Jacobi, nachdem er bereits für das Sommersemester in Berlin Vorlesungen über die allgemeine Theorie der Gleichungen und über reine Analysis angekündigt hatte, schon Anfang Mai 1826 nach Königsberg, wo sich

um dieselbe Zeit Franz Ernst Neumann und Heinrich Dove habilitierten, und wo ihm Bessel, der die ungewöhnliche Bedeutung Jacobis sogleich erkannte, mit der wohlwollendsten Freundlichkeit entgegenkam. Enthusiastisch berichtet Jacobi über seine neue Tätigkeit und die nahen Beziehungen zu Bessel seinem Bruder Moritz, welcher ihm teilnehmend an seinem Glück und seiner Zufriedenheit am 5. August 1826 heiter und scherzhaft antwortet:

„Wenn sich die transcendentale Universalität meines Geistes manifestirt im Erkennen und Auffassen der Qualitäten der Mauersteine und des Gemäuers überhaupt, so machst Du mir diese Universalität gewiß und mit vollem Rechte streitig, indem Du durch und in Deinem Briefe darlegst, mit welcher Leichtigkeit Du ein Feld bebaust, das bisher Deiner innersten Natur fremd zu sein schien, Astronomie und Physik, Pendelversuche, Dreiecksnetze und Karten. Das freut mich, weil es mich vielleicht rächt, und Du erkennst, daß eben das nur Werth hat, was sich bethätigen läßt ... Die wahrhaft begeisterte Schilderung von Bessel hat mich sehr ergötzt ... was wird Steiner, was Rötscher, was Hegel sagen, wenn er hört, daß Du dem Werth beilegst, was das Resultat schlichter Wiederholung, beharrlicher Beobachtung ist ... Mit Schrecken lese ich, welche demagogischen Umtriebe Bessel im Sinne hat, es ist alles so hübsch in Ordnung mit den Maßen, die Schwere und Gravitation sind abgethan, was will man weiter — findet man, daß etwas falsch ist, so muß man es lieber vertuschen, um die doch stattfindende Confusion nicht zu vergrößern — alle neuen Entdeckungen müssen desavouirt werden, das ist das beste."

Während nun Jacobi durch seine Versetzung nach Königsberg für seine Lehrtätigkeit ein reiches und fruchtbares Feld eröffnet wurde, war es für seine schriftstellerische Betätigung ein glückverheißendes Ereignis, daß Crelle sich damals bereits mit dem Gedanken der Gründung einer mathematischen Zeitschrift trug und denselben in kürzester Zeit,

wenn auch unter den schwierigsten Verhältnissen, zum Segen der Mathematik und der exakten Naturwissenschaft in Ausführung zu bringen wußte. Das Journal sollte schon am 1. Januar 1826 zu erscheinen beginnen. „La possibilité de voir ses mémoires imprimés et publiés tout de suite, dès qu'ils seraient achevés, électrisa Abel, et ce fut dans la maison am Kupfergraben un travail intrépide, infatigable", und auch Jacobi beeilte sich, einige bereits fertiggestellte kleinere Arbeiten Crelle zur Veröffentlichung zu übersenden. Auf die Anfrage Crelles, ob er den Druck der ihm geschickten Abhandlungen gestatte, antwortet Jacobi aus Königsberg am 8. Oktober 1826:

„In Antwort auf Ihr geehrtes Schreiben bemerke ich, daß ich nicht erlaube, sondern überaus wünsche, daß Sie meinen kleinen Arbeiten in Ihrem Journal einen Platz einräumen möchten, welche es sich gewiß zur größten Ehre anrechnen werden, in so anständiger Gesellschaft zu erscheinen. Da ich in meinen beiden vorigen Briefen Ihnen dieselbe Versicherung gegeben habe und Sie noch im Vorigen zum Herrn über Leben und Tod der kleinen Geschöpfe autorisirte, so bedurfte es von meiner Seite keines zu fassenden Entschlusses, noch von der Ihrigen, einen solchen abzuwarten. Es wäre mir angenehm, wenn, wo möglich, das 4. Heft sie aufnähme. Die kleinere von den beiden nachgeschickten Abhandlungen hätte füglich mit der über Gauss' Methode zusammengeworfen werden können, da beide Eigenschaften derselben Functionen betreffen. Die Besorgniß, die Sie mir eingeflößt haben und welche gewiß jedes analytische Herz theilen wird über die Zweifelhaftigkeit des Fortbestehens des Journals hat mich gehindert. Ihnen mehrere nicht uninteressante Abhandlungen, die ich bereit habe, zuzuwenden, andere bedürften nur der Ausarbeitung; es dürften sich auch einige neuere Theoreme aus der Theorie der Zahlen darunter befinden."

Inzwischen waren die gleich zu Anfang gehegten Be-

sorgnisse Crelles wegen des Fortbestehens des Journals immer ernster geworden; er bat am 14. Oktober 1826 die Regierung für 2—3 Jahre um einen jährlichen Zuschuß von 800 Talern, damit auch der Verleger imstande sei, ein Honorar zu bewilligen, und der Minister von Altenstein sowie der General-Leutnant von Müffling befürworteten in einem Bericht an den König seine Bitte, indem sie den Vorschlag machten, die jährlich nicht abgesetzten Exemplare bis auf höchstens 200 zu dem Preise von 4 Talern abzunehmen und „diese Exemplare unter die höheren Civil- und Militairbildungsanstalten der Monarchie zu vertheilen, auch zu Praemien für junge Männer, die sich im Studium der Mathematik auszeichnen, zu bestimmen“.

„Käme nur mein Project mit dem Journal zu Stande“, schreibt Crelle am 24. November 1826 nach Paris an Abel, den er gern zur Unterstützung in der Leitung des Journals in seine Nähe gezogen hätte, „dann könnte ich Ihnen sogar einige Geldmittel verheißen. Es ist zwar noch Hoffnung da, aber noch nichts entschieden. Ich wollte Ihnen anfangs nicht eher davon erzählen, bis die Entscheidung erfolgt wäre, aber da es so lange dauert, will ich Ihnen meinen Plan sagen. Vielleicht macht Ihnen schon die Hoffnung, die ich darauf gründe, einiges Vergnügen . . . Ich werde gewiß keine Mühe sparen, doch kann man freilich nichts bestimmtes vorhersagen. Wird meine Bitte genehmigt, dann kann ich, unter uns gesagt, Ihnen ein Honorar zahlen. Es bleibt aber unter uns, denn ich kann es nicht jedem andern ebenfalls geben.“

Erst am 14. Februar 1827 erhielt Crelle die Mitteilung, daß sein Gesuch aus Mangel an Mitteln durch Kabinettsordre zurückgewiesen sei, und daß nur 20 Exemplare jährlich vom Unterrichtsministerium und einige vom Kriegsministerium übernommen werden könnten; diesen wenig erfreulichen Bescheid konnte er Abel mündlich mitteilen, der am 10. Januar auf der Rückreise von Paris in Berlin eingetroffen war und dort bis Anfang Mai sich aufhielt.

Inzwischen war die schon im Laufe des Sommers 1826 von Jacobi der Redaktion überschickte Arbeit: „Über Gauss' neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden“ in dem ersten Bande des Journals erschienen; er hebt in derselben hervor, daß Gauss in den Göttinger Kommentarien für die von Newton mit Hilfe des Interpolationsproblems aufgestellte Berechnung der bestimmten Integrale den Grad der Näherung dadurch auf das Doppelte getrieben habe, daß er nicht gleiche Intervalle der Abszissen zugrunde legte, für welche die Ordinaten berechnet werden, sondern eine schickliche Wahl derselben, und daß die Bestimmung derselben unabhängig sei von der zu quadrierenden Kurve. „Gauss gelangt zu seinen Resultaten auf dem Wege einer schwierigen Induktion“; Jacobi will auf einem einfachen und direkten Wege eben diese Resultate herleiten. Wenn $\int f(x)dx$ zu berechnen und $\varphi(x)=(x-\alpha')\ldots(x-\alpha^{(n)})$ gesetzt wird, so ist auf Grund der Newtonschen Näherungsmethode, welche für $f(x)$ die ganze Funktion U vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade substituiert, welche für die Abszissen α die Werte von $f(x)$ annimmt, und die sich unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ den Charakter einer ganzen Funktion hat, unmittelbar ergibt, wenn man aus $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ die darin enthaltene ganze Funktion V absondert, die Aufgabe gestellt, die Größen $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(n)}$ so zu bestimmen, daß der Fehler $\varDelta = \int f(x)dx - \int U dx = \int V\varphi(x)dx$ möglichst gering oder die Annäherung möglichst genau werde. Indem nun Jacobi $f(x) = a + a'x + a''x^2 + \cdots + a^{(n)}x^n + a^{(n+1)}x^{n+1} + \cdots$, und in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes $\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{A'}{x^n} + \frac{A''}{x^{n+1}} + \cdots$ setzt, so daß die in jenem rationalen Bruche enthaltene ganze Funktion $V = a^{(n)}A' + a^{(n+1)}(A'x + A'') + a^{(n+2)}(A'x^2 + A''x + A''') + \cdots$ wird, ferner bemerkt, daß, was auch $\alpha', \alpha'', \ldots$ waren, in dem Ausdrucke für den Fehler $\varDelta$ die Koeffizienten $a, a', a'', \ldots a^{(n-1)}$ nicht vorkommen, so erreicht er den doppelten Grad der An-

näherung und dadurch für rasch abnehmende Koeffizienten von $f(x)$ eine brauchbare Näherungsmethode, wenn er die $\alpha', \alpha'', \ldots$ so bestimmen kann, daß noch die mit $a^{(n)}$, $a^{(n+1)}, \ldots a^{(2n-1)}$ behafteten Glieder verschwinden, wozu, wie aus dem Ausdrucke für V ersichtlich, nur eine solche Bestimmung von $\varphi(x)$ erforderlich ist, daß, wenn $\int_0^1 f(x)\,dx$ ermittelt werden soll, die Integrale $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$, $\int_0^1 x\varphi(x)\,dx, \ldots \int_0^1 x^{n-1}\varphi(x)\,dx$ verschwinden. Durch Reduktion dieser Ausdrücke auf iterierte Integrale findet er, daß dann auch $\int \varphi(x)\,dx$, $\int^{(2)} \varphi(x)\,dx^2, \ldots \int^{(n)} \varphi(x)\,dx^n$, zwischen denselben Grenzen genommen, verschwinden müssen und umgekehrt, oder daß, wenn $\int^{(n)} \varphi(x)\,dx^n = \pi(x)$ gesetzt wird, eine Funktion $\pi(x)$ zu suchen ist, welche für $x = 0$ und $x = 1$ zugleich mit ihrem $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten verschwindet. Setzt man daher

$$\varphi(x) = M\frac{d^n x^n (x-1)^n}{dx^n}, \text{ worin } M = \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n},$$

so folgt für den Fehler die Gausssche Formel

$$\varDelta = \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\int_0^1 x^n (x-1)^n \frac{d^n V}{dx^n}\,dx.$$

Eine Anzeige dieses Memoires findet sich im „Bulletin de Férussac“; „il est bien possible“, sagt Holst in seiner Biographie Abels, „que ce soit Abel lui-même, qui se serait alors pour la première fois occupé de Jacobi dans un bref compte-rendu de l'objet du mémoire.“

Noch im August hatte Jacobi die mit der ersteren in engem Zusammenhange stehende und „Über eine besondere

Gattung algebraischer Funktionen, die aus der Entwicklung der Funktion $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ entstehen" betitelte Arbeit an das Journal gesandt. Er zeigt in derselben, wie aus den Beziehungen der Legendreschen Kugelfunktionen

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} X_m^2 dx = \frac{2}{2m+1}$$

die Entwicklung einer jeden Funktion nach Kugelfunktionen hergeleitet werden kann, und ergänzt die Untersuchungen von Legendre über diese Funktionen durch Herleitung des Ausdruckes

$$X_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

woraus der Zusammenhang derselben mit der von Gauss zur annäherungsweisen Berechnung der Integrale gebrauchten ersichtlich ist. Die weiter ermittelte Relation

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-r)} \frac{d^{n-r}(x^2-1)^n}{dx^{n-r}} = \frac{(x^2-1)^r}{1 \cdot 2 \ldots (n+r)} \frac{d^{n+r}(x^2-1)^n}{dx^{n+r}} \; (r \leqq n)$$

findet er mit Hilfe der schon in seiner Dissertation gegebenen Methode durch Vergleichung der Entwicklungskoeffizienten zweier verschiedener Formen einer Funktion von h nach steigenden h-Potenzen.

Jacobi beschäftigte sich nun in den Herbstferien bei Gelegenheit eines wiederholten tieferen Studiums der Gaussschen Disquisitiones arithmeticae mit der Fortführung äußerst schwieriger zahlentheoretischer Untersuchungen, deren er schon in dem letzten Briefe an Crelle Erwähnung getan, und zu denen ihm die von Bessel übersandte kurze Notiz von Gauss über biquadratische Reste die unmittelbare Veranlassung gab.

„Diese Ankündigung", sagt Kummer, „welche einige der Gaussschen Resultate gab, deren Beweis auf einem ganz neuen Prinzip der Zahlentheorie beruhen sollte, erregte

zugleich Jacobis und Dirichlets Wißbegierde in hohem Grade, beide suchten auf ganz verschiedenem Wege in das Gausssche Geheimnis einzudringen, und beiden gelang es auch, in diesem Gebiete der höheren Potenzreste eine Fülle neuer Sätze zu finden, obgleich das neue Prinzip, welches in der Einführung der komplexen ganzen Zahlen bestand, ihnen damals noch verborgen blieb."

Schon am 26. Oktober 1826 berichtet Jacobi an Bessel in einem kurzen Billett über seine Erfolge auf diesem Gebiete:

„Gauss hat in den Göttinger Anzeigen, wo er den Auszug einer gelesenen Abhandlung giebt, den Satz bekannt gemacht: es sei p eine Primzahl von der Form $8n+1$ und gleich e^2+f^2, wo e^2 das ungrade Quadrat, f^2 das grade; geht f durch 8 auf, so ist 2 biquadratischer Rest; wo nicht, nicht. Sein Weg muß nach dem Auszug zu urtheilen, äußerst schwierig sein, die aufgewandte Kraft außerordentlich. Die Sätze über andere Zahlen als 2, ob sie biquadratische Reste sind, sagt er, könne er nicht geben, ohne noch bei weitem größere Zurüstungen und eine eigenthümliche Erweiterung der höheren Arithmetik; daher er den Satz über 2 voraufgenommen. Ich bin im Besitze einer allgemeinen, leichten, directen Methode, zu den Fundamentaltheoremen über die Reste aller Potenzen zu gelangen. Als ich sie auf die biquadratischen Reste anwendete, fand ich, was folgt: Es sei p Primzahl von der Form $4n+1$ und gleich e^2+f^2, wo e^2 das ungrade, f^2 das grade Quadrat ist. Zuvörderst sind alle Primzahlen, die Factoren von f sind und quadratische Reste von p, auch biquadratische; ferner alle Primzahlen von der Form $8n \pm 1$, die Factoren von e sind und quadratische Reste von p, auch biquadratische ...", und er führt noch eine Methode an, um zu untersuchen, ob eine andere Primzahl q, die quadratischer Rest ist und nicht zu dieser Reihe gehört, auch biquadratischer Rest sei, wonach z. B. 3 und 5, wenn sie quadratische Reste sind,

dann und nur dann auch biquadratische Reste sein werden, wenn f resp. durch 3 und 5 aufgeht. Zugleich schreibt er aber auch am folgenden Tage an Gauss:

„Ew. Hochwohlgeboren bin ich so frei, einiges von Untersuchungen über die Reste von Potenzen mitzutheilen, welche ich vor Kurzem angestellt habe, als dieser Gegenstand sowohl durch sich selbst, als auch durch die Autorität Ihres Namens großes Interesse erlangt hat. Ich gerieth nämlich zufällig, als ich einige in Ihren Disquisitiones angestellte Betrachtungen verfolgte, auf eine einfache und directe Methode, die Fundamentaltheoreme über die Reste der Potenzen zu erforschen. Als ich dieses Gegenstandes gegen den Herrn Professor Bessel erwähnte, gab er mir die interessante Notiz von dem Auszug, den Ew. Hochwohlgeboren in den Göttinger Anzeigen von einer der Göttinger Societät über die biquadratischen Reste vorgelegten Abhandlung gegeben haben. Ich nahm daher Gelegenheit, meine Methode zu prüfen. Als ich sie, nachdem ich sie zuvor nur auf die Reste der 3^{ten} und 5^{ten} Potenzen angewendet hatte, nun auch auf die biquadratischen Reste anwandte, fand ich alsbald das von Ew. Hochwohlgeboren über die Zahl 2 gegebene Theorem. Allgemein aber fand ich was folgt: Es sei p Primzahl von der Form $4n+1$, q Primzahl und quadratischer Rest von p, ferner $p = e^2 + f^2$, wo e das ungrade Quadrat bedeute; I) es sei nicht zusammen p von der Form $8n+5$, q von der Form $4n-1$: wenn q Theiler von f ist, so ist es biquadratischer Rest; wenn q Theiler von e ist, so ist es biquadratischer Rest, wenn es zugleich die Form $8n \pm 1$ hat; ist es Theiler von e von einer andern Form, so ist es biquadratischer Nichtrest ... II) Ist zu gleicher Zeit p von der Form $8n+5$, q von der Form $4n-1$, so findet das Gegentheil statt. Wollten Ew. Hochwohlgeboren sich so weit herablassen, mir den Zusammenhang, in welchem die sonstigen in den Göttinger Anzeigen mitgetheilten, äußerst merkwürdigen Sätze mit den biquadra-

tischen Resten stehen, mitzutheilen, so würde ich dies als Erlaubniß ansehen, Ew. Hochwohlgeboren mehreres von diesen Untersuchungen, welche in mehr als einer Beziehung sich an die berühmten Arbeiten von Ew. Hochw. knüpfen, vorzulegen; auch dürfte aus etwaiger Vergleichung Vortheil für die Wissenschaft resultiren. Nur der Eifer für diese konnte einem unbekannten jungen Mann die Kühnheit einflößen, aus seinem Dunkel zu einem Mathematiker, der in solchem Ruhmesglanze dasteht, zu reden. Ich verbleibe ehrfurchtsvoll . . ."

Diese briefliche Mitteilung erregte sogleich die Aufmerksamkeit von Gauss, der am 26. November 1826 an Bessel schreibt: „Einlage bitte ich Herrn Jacobi zu übergeben. Sie würden mich sehr verbinden, wenn Sie mir etwas Näheres über diesen wie es scheint sehr talentvollen jungen Mann, auch über seine persönlichen Verhältnisse anzeigen wollten", und von Bessel am 12. Dezember 1826 die interessante Antwort erhält:

„Jacobi ist seit Anfang des Sommers hier und bezieht, als Privatdocent, ein kleines Gehalt; förmlich angestellt ist er noch nicht, ich hoffe aber, daß es bald geschehen wird. Er ist gewiß sehr talentvoll, allein er hat sich hier fast alle zu Feinden gemacht, weil er, als er hier ankam, jedem etwas unangenehmes sagte: den geborenen Königsbergern versicherte er, daß er seinen hiesigen Aufenthaltsort als ein Exil betrachte, den Philosophen lobte er Hegel, den Philologen Boeckh, alles auf eine Art, die man ihm nicht verzeihen will. Doch hoffe ich, daß solche kleine Albernheiten bald nicht mehr werden erwähnt werden. Mir ist er immer als ein artiger junger Mann erschienen. Von seinen sonstigen Verhältnissen weiß ich nichts näheres, als daß sein Vater ein Jude und Geldwechsler in Potsdam ist. Mit Dirksen soll er nicht freundschaftlich gestanden haben; allein das sagt in Berlin garnichts."

Weder die oben von Gauss erwähnte und für Jacobi

bestimmte briefliche Einlage noch irgendeine spätere schriftliche Mitteilung von Gauss an Jacobi hat sich in den nachgelassenen Papieren vorgefunden.

Der Winter 1826/27, in welchem Jacobi über Trigonometrie und analytische Geometrie las und analytische Übungen zu leiten anfing, mit denen, wie Richelot sich später ausdrückte, der großartige Geist Jacobis zu wirken begann, war für ihn eine der arbeitsvollsten Perioden seines Lebens, indem er die schwierigsten Probleme auf den verschiedensten mathematischen Gebieten zu gleicher Zeit in Angriff nahm.

Zunächst führte ihn der überaus anregende tägliche Verkehr mit Bessel einem Probleme aus der Theorie der Gleichungen zu, dessen Behandlung den Gegenstand der Arbeit „Über den Ausdruck der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale“ bildete. Nachdem Parseval 1805 die Lagrangesche Reihe, welche die Wurzeln einer gegebenen Gleichung darstellt, mit Hilfe bestimmter Integrale summiert und Bessel Anwendungen davon auf das Keplersche Problem gemacht hatte, will Jacobi die von Parseval begonnenen Untersuchungen vervollständigen, veranlaßt durch eine Arbeit von Cauchy, welche wieder die Aufmerksamkeit der Analysten auf die Art, die verschiedenen Wurzeln einer Gleichung zu bestimmen, gelenkt hatte. Indem er von der Bestimmung der Koeffizienten der Fourierschen Reihe durch Multiplikation der hypothetisch angenommenen Entwicklung mit cosinus- und sinus-Funktionen und Integration zwischen $-\pi$ und $+\pi$ ausgeht und nach Cauchy bei der Entwicklung eindeutiger Funktionen nach Potenzen von e^{zi} und e^{-zi} verschiedene Entwicklungen in verschiedenen Bereichen findet, folgert er, daß, wenn die Funktion $\varphi(x)$, je nach den verschiedenen Grenzen, innerhalb welcher sich x befindet, anders entwickelt werden muß, damit man konvergierende Reihen erhalte, für jene analog bestimmten Integrale nach den verschiedenen Werten

des absoluten Betrages von x oft wesentlich verschiedene Resultate sich ergeben werden, und er gelangt so zu Anschauungen und analytischen Formulierungen, wie sie jetzt der Funktionentheorie geläufig sind. Er wählt zur Erläuterung seiner Überlegungen und Behauptungen $\varphi(x) = \log(a + bx + cx^2 + \cdots + x^p) = \log(x - \alpha')(x - \alpha'') \ldots (x - \alpha^{(p)})$ und erhält für $x = re^{iz}$ und $x = re^{-iz}$ aus $\varphi(re^{iz}) + \varphi(re^{-iz}) = \log\{(a + br\cos z + cr^2\cos 2z + \cdots)^2 + (br\sin z + cr^2\sin 2z + \cdots)^2\} = \log(U^2 + V^2)$, indem die Entwicklungen von $\log(x - \alpha')$, $\log(x - \alpha''), \ldots$ je nach der Lage von z verschieden sind, durch dieselbe Operation, wie sie zur Koeffizientenbestimmung der Fourierschen Reihe angewandt wird, für die verschiedenen zwischen $-\pi$ und $+\pi$ genommenen Integrale dieses Ausdruckes die Werte $2\pi p\log r^2$, wenn $r >$ als alle Wurzeln, $2\pi\log a^2$, wenn $r <$ als alle Wurzeln, $2\pi\{\varkappa\log r^2 + \log\alpha^{(\varkappa+1)^2} + \log\alpha^{(\varkappa+2)^2} + \cdots + \log\alpha^{(p)^2}\}$, wenn $\alpha^{(\varkappa)} < r < \alpha^{(\varkappa+1)}$, und ähnliche Beziehungen, in denen *arc·tg*-Funktionen unter dem Integral vorkommen, und aus denen sich dann z. B. für die n. Potenzsumme einer beliebigen Anzahl der Wurzeln Ausdrücke durch die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ genommenen Integrale von $\log(U^2 + V^2)$ und $\operatorname{arctg}\frac{V}{U}$ ergeben. Das von Jacobi befolgte Prinzip steht im engsten Zusammenhang mit den Untersuchungen von Cauchy, welche die Nullwerte einer innerhalb eines vollständig begrenzten Raumes eindeutigen Funktion durch das Randintegral dieses Raumes bestimmen.

Mit diesen Fragen, welche ein theoretisches und praktisches Interesse zugleich haben und Bessels Aufmerksamkeit in hohem Grade fesselten, liefen parallel die abstraktesten Untersuchungen aus der Theorie der Zahlen und der Kreisteilung, aus denen er einiges, da ihm eine zusammenhängende Darstellung seiner Resultate noch im Winter auszuarbeiten unmöglich war, am 8. Februar 1827 brieflich Gauss mitteilte:

„Die Güte, mit welcher Ew. Hochwohlgeboren die unbedeutenden arithmetischen Sätzchen, die ich mich Ihnen zu übersenden unterstand, aufgenommen haben, hätte mich schon längst verpflichten sollen, Ihnen für Ihr gütiges Schreiben zu danken; doch als ich von Ihrer gütigen Erlaubniß Gebrauch machen wollte, Ihnen mehreres von den von mir angestellten Untersuchungen mittheilen zu dürfen, fühlte ich deren Dürftigkeit so tief, daß ich dies unterlassen zu müssen glaubte. Erst als ich vor Kurzem nach längerer Unterbrechung zu diesem Gegenstande zurückkehrte, boten sich mir einige Sätze dar, welche mir nicht ganz unwürdig schienen, sich ihrem hohen Gönner vorzustellen: Ist p eine Primzahl, x primitive Wurzel der Gleichung $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$ (man darf sich ja wohl dieses Ausdruckes bedienen), g primitive Wurzel der Congruenz $\frac{x^{p-1} - 1}{x - 1} \equiv 0$ mod. p, und setzt man $\xi(r)$, wo r primitive Wurzel der Gleichung $\frac{x^l - 1}{x - 1} = 0$, l aber Factor von $p - 1$, setzt man also $\xi(r) = x + rx^g + r^2x^{g^2} + \cdots + r^{p-2}x^{g^{p-2}}$, so findet sich Folgendes:

I. $\frac{\xi(r)\xi(r^m)}{\xi(r^{m+1})}$ ist eine ganzzahlige Function von r, d. h. ist gleich $A + A'r + \cdots + A^{(l-1)}r^{l-1}$, wo $A, A', \ldots A^{(l-1)}$ ganze Zahlen sind.

II. $\xi(r)\xi\left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{l}}p$. Dieser Fundamentalsatz für die Theorie der Kreistheilung machte mir eine dunkle Andeutung zu den Disqu. Ar. pag. 651 klar.

III. Setzt man $\frac{\xi(r)\xi(r^m)}{\xi(r^{m+1})} = \psi(r)$, so wird $\psi(r)\psi\left(\frac{1}{r}\right) = p$. Aus diesen drei Sätzen folgt sogleich für $l = 2, 3, 4$: 1) für $l = 2$, wo $r = \frac{1}{r}$, $\xi(r)\xi\left(\frac{1}{r}\right) = \{\xi(r)\}^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$, $\xi(r) = \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$, 2) für $l = 3$, $\{\xi(r)\}^2 = \psi(r)\xi(r^2)$, $\{\xi(r)\}^3$

$= p\psi(r)$, wo $\psi(r)$ von der Form $\frac{a + b\sqrt{-3}}{2}$ und $a^2 + 3b^2 = 4p$. Es läßt sich dann leicht weiter zeigen, daß $a - 1$ und b durch 3 aufgehen müssen. Diese beiden Sätze stehen in den Disquisitiones. 3) für $l = 4$, $m = 1$ wird $\{\xi(r)\}^2 = \psi(r)\xi(r^2) = \psi(r)\sqrt{p}$, wo $\psi(r)$ die Form $a + b\sqrt{-1}$ hat und $a^2 + b^2 = p$. b geht durch 2 auf und $a + 1$ durch 4, was das Zeichen von a bestimmt, wie sich sonst leicht zeigen läßt. Für höhere Zahlen als 4 wird die Sache weitläufiger; dafür wird aber der Blick eröffnet in ein weites unausgebautes Feld der quadratischen Formen."

Jacobi zeigt sodann an einem Beispiel für $l = 7$, welchen Vorteil man aus den drei Fundamentalsätzen ziehen kann, und fährt fort:

„... Aber ich habe in diesen Tagen eine directe Bestimmung für $\psi(r)$ für jedes l gefunden, welche, wenn gleichwohl weitläufiger als das Versuchen, doch wegen ihrer extremen Eleganz angeführt zu werden verdient. Es sei also $\frac{\xi(r)\xi(r^m)}{\xi(r^{m+1})} = \psi(r)$; ferner setze man in Bezug auf den Modul $l: m + 1 \equiv a_1$, $2(m + 1) \equiv a_2, \ldots (l - 1)(m + 1) \equiv a_{l-1}$; ferner bezeichne man $\frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - \beta + 1)}{1 \cdot 2 \ldots \beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$; setzt man nun in $\psi(r)$ für r eine primitive Wurzel der Congruenz $\frac{x^l - 1}{x - 1} \equiv 0 \bmod. p$, so wird, wenn $p = ln + 1$, $\psi(r) \equiv -\left(\frac{a_1 n}{n}\right)$, $\psi(r^2) \equiv -\left(\frac{a_2 n}{2n}\right), \ldots \psi(r^{l-1}) \equiv -\left(\frac{a_{l-1} n}{(l-1)n}\right)$ in Bezug auf den Modul p; woraus sich sogleich, wenn man nur eine Wurzel der Congruenz $\frac{x^l - 1}{x - 1} \equiv 0 \bmod. p$ kennt, $\psi(r)$ finden läßt, wenn r im ersten Sinne genommen wird. Ew. Hochwohlgeboren bemerken sogleich, wie hierunter der Satz begriffen ist, den Sie in den Göttinger Anzeigen für $l = 4$ angekündigt haben." Nach Anwendung dieses Satzes auf $l = 3$ und $l = 7$ bemerkt er weiter:

„Die Theorie der Reste habe ich bis jetzt nur in dem

Zusammenhange betrachtet, wie sie aus der Kreistheorie unmittelbar hervorgeht. Setzt man nämlich, wenn q eine Primzahl ist, $\{\xi(r)\}^q = \varphi(r)\xi(r^q)$, wo $\varphi(r)$ eine ganzzahlige Funktion von r ist, so muß, wenn q Rest einer l^{ten} Potenz in Bezug auf den Modul p sein soll, $\varphi(r) \equiv 1 \text{ mod. } q$ sein (daraus das Fundamentaltheorem für quadratische Reste). Ist q ebenfalls wie p von der Form $ln + 1$, so werden die allgemeinen Sätze über die Reste eleganter. Setzt man nämlich $\{\xi(r)\}^l = \varphi(r)$ und in $\varphi(r)$ statt r eine Wurzel der Congruenz $\frac{x^l - 1}{x - 1} \equiv 0 \text{ mod. } q$, so wird q Rest der l^{ten} Potenz in Bezug auf p, wenn $\varphi(r)$ Rest der l^{ten} Potenz in Bezug auf q ist, . . . Ew. Hochwohlgeboren können sich denken, wie sehnsüchtig ich die erste Abhandlung über biquadratische Reste erwarte. Wenn Sie mir doch nur etwas von der noch allgemeineren Theorie und der eigenthümlichen Erweiterung der höheren Arithmetik schreiben wollten. Die Anwendung der höheren Arithmetik auf die Theilung der elliptischen Transcendenten ist in den Disquisitiones versprochen, o würde doch das Versprechen erfüllt! Verzeihen Sie, hochgeehrter Herr Hofrath, das Flüchtige und Schülerhafte der gemachten Mittheilung, und nehmen Sie die Versicherung der unbegrenzten Verehrung . . ."

Erst im Laufe des Sommers, im Juni 1827, gelang es ihm, wenigstens eine Mitteilung über die Resultate seiner zahlentheoretischen Untersuchungen fertigzustellen und unter dem Titel „De residuis cubicis commentatio numerosa" zu veröffentlichen.

„. . . Ante biennium fere Vir ille Clarissimus [Gauss] commentationem primam de residuis biquadraticis conscriptam societati Göttingensi tradidit, quae tamen diu desiderata nondum lucem vidit. Quam ne nimis graviter ferant arithmetici moram, ipse praecipua, quae ibi adornaverat, theoremata jam tum temporis publici juris facere voluit . . . Equidem dum ad egregia Viri inventa probe intelligenda animum

bene praeparatum esse volebam, hisce quaestionibus intentus casu, ut fit, in methodum satis generalem incidi, cujus ope plurima de residuis dignitatum theoremata investigare, vel undecunque cognita comprobare posse mihi videor. Cujus ope eruta de residuis cubicis theoremata fundamentalia arithmeticis jam proponam."

Jacobi spricht in dieser Arbeit die Sätze aus, daß, wenn p und q zwei Primzahlen von der Form $6n+1$, $4p = L^2 + 27M^2$, $x^2 + 3 \equiv 0 \bmod q$ ist, q ein kubischer Rest der Primzahl p dann und nur dann sein wird, wenn $\frac{p(L+3Mx)}{2}$ oder $\frac{L+3Mx}{L-3Mx}$ ein kubischer Rest von q ist; ist die Primzahl p jedoch von der Form $6n+1$, und $4p = L^2 + 27M^2$, ferner q von der Form $6n-1$, so ist q dann und nur dann kubischer Rest von p, wenn $\frac{L+M\sqrt{-3}}{L-M\sqrt{-3}}$ kubischer Rest von q ist. Nach Ausführung der Grundzüge einer mit Hilfe dieser beiden Sätze zu entwerfenden Tabelle verallgemeinert er noch einen von Gauss gegebenen Satz dahin, daß, wenn für eine Primzahl p von der Form $3n+1$ $4p = L^2 + 27M^2$ gesetzt wird, L kleinster Rest der durch p dividierten Zahl $-\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1\cdot 2\ldots n}$ ist, und dieser Rest, durch 3 dividiert, immer $+1$ als Rest liefert, und ähnlich wird für eine Primzahl p von der Form $7n+1$, wenn $p = L^2 + 7M^2$ gesetzt wird, L kleinster Rest der durch p dividierten Zahl $\frac{1}{2}\frac{(2n+1)(2n+2)\ldots 3n}{1\cdot 2\ldots n}$ sein, und dieser Rest durch 7 dividiert immer den Rest $+1$ lassen.

„Die Arbeit über die kubischen Reste", sagt Dirichlet, „enthält zwar nur Sätze ohne Beweis, aber diese Sätze sind derart, daß sie nicht das Ergebnis der Induktion sein können und keinen Zweifel darüber lassen, daß Jacobi schon damals in dem wissenschaftlichen Gebiete, welches Gauss ein Vierteljahrhundert früher der mathematischen Spekulation eröffnet hatte, und welches ebensosehr der höheren Algebra als der

Theorie der Zahlen angehört, im Besitze neuer, fruchtbarer Prinzipien sein mußte, was auch durch eine spätere Publikation bestätigt wird, in der er ausdrücklich erwähnt, daß er diese Prinzipien schon damals Gauss brieflich mitgeteilt habe.“

Ob Gauss sich mündlich Dirichlet gegenüber, der ihn auf der Reise von Paris nach Breslau am 18. März 1827 besucht hatte, über Jacobis zahlentheoretische Arbeiten geäußert hat, wissen wir nicht — es fehlen alle näheren Nachrichten über jenes Zusammentreffen.

Die Vorlesungen des Sommersemesters über die Theorie der krummen Flächen und über Elementargeometrie waren die Veranlassung zu zwei kleineren Notizen, die vom Mai und Juni datiert sind. In der „Über die Hauptaxen der Flächen der zweiten Ordnung“ betitelten Arbeit soll, von einem schiefwinkligen Koordinatensysteme ausgehend, der Ausdruck $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2ayz + 2bzx + 2cxy$ durch lineare Transformationen in einen andern der Form $L\xi^2 + M\eta^2 + N\zeta^2$ übergeführt werden, und es wird von Jacobi hierfür der Einfachheit halber der umgekehrte Weg der Verwandlung des zweiten Ausdruckes in den ersten gewählt. „Dieser zweite Weg bewährt sich als der vortheilhaftere. Wir werden ihn Gauss nachgehen, welcher ihn bei einer Untersuchung eingeschlagen, die von der unsrigen dem Gegenstande nach gänzlich fernliegend gleichwohl die nämliche Analyse erfordert. Man vergleiche die berühmte Abhandlung: Determinatio attractionis etc.“, und Jacobi führt das Problem auf die Auflösung von 12 Gleichungen in den Größen L, M, N und den 9 Koeffizienten der linearen Transformationen zurück, die er in einfacher und völlig symmetrischer Form durchführt, und aus denen er die bekannten Ausdrücke für ein ursprünglich rechtwinkliges oder ein schiefwinklig konjugiertes Koordinatensystem herleitet. In der zweiten kurzen Notiz: „Euleri formulae de transformatione coordinatarum“ reproduziert Jacobi nur die Formeln von Euler und Lexell, die für die Koeffizienten der Koordinatentransformation Aus-

drücke durch 3 Winkel φ, ψ, ϑ gefunden, welche für die Behandlung mechanischer Probleme wesentlich in Frage kommen. „Demonstrationes quas illi V. V. Cll. dederunt, hodie elegantiores reddi possunt. Hic tamen rem tantum modo indicatam volo, atque juvat, formulas maxime memorabiles oblivioni eripuisse.“

Den Winter 1826/27 hindurch war Jacobi bereits mit den Vorbereitungen zu seinen großen Untersuchungen beschäftigt, welche sehr bald in Gemeinschaft mit denen von Abel für die moderne Analysis eine neue Basis bilden sollten, von denen jedoch zunächst nur Sätze mehr formaler Natur, die Reduktion eines elliptischen Integrales betreffend, in einer an Bessel gerichteten brieflichen Notiz vom 1. März 1827, nach welcher die Substitution, welche $\cos\varphi$ als gebrochene rationale Funktion 3. Grades von x ausdrückt, das elliptische Differential erster Gattung in x in ein solches in φ überführt, dessen Irrationalität die Form $\sqrt{A + B\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi}$ hat, sowie in der vom Juni datierten Abhandlung: „De singulari quadam duplicis integralis transformatione“ in die Öffentlichkeit traten.

„Celeberrima illa dissertatio Gaussiana inscripta 'Determinatio attractionis etc.' in eo maxime versatur, ut expressio data $\frac{dE}{\sqrt{(A - a\cos E)^2 + (B - b\sin E)^2 + C^2}}$ in formam simpliciorem redigatur hanc $\frac{dP}{\sqrt{G + G'\cos^2 P + G''\sin^2 P}}$, id quod fieri a Cl.⁰ autore demonstratur per substitutionem factam: $\cos E = \frac{\alpha + \alpha'\cos P + \alpha''\sin P}{\gamma + \gamma'\cos P + \gamma''\sin P}$, $\sin E = \frac{\beta + \beta'\cos P + \beta''\sin P}{\gamma + \gamma'\cos P + \gamma''\sin P}$, novem coefficientibus rite determinatis. Dum egregiae illi commentationi identidem incumbebam, non fugit me, eandem fere analysin ad duplicis Integralis cujusdam insignem transformationem adhiberi posse, quam communicare cum geometris eo minus dubito, quod duplicium Integralium theoria adhuc valde jacet“, und Jacobi zeigt nun, daß, wenn $e = a + a'\cos^2\psi + a''\sin^2\psi\cos^2\varphi + a'''\sin^2\psi\sin^2\varphi + 2b'\cos\psi$

$+ 2b'' \sin\psi \cos\varphi + 2b''' \sin\psi \sin\varphi + 2c' \sin^2\psi \cos\varphi \sin\varphi$ $+ 2c'' \cos\psi \sin\psi \sin\varphi + 2c''' \cos\psi \sin\psi \cos\varphi$ gesetzt wird, worin e außer der Konstanten die Ausdrücke $\cos\psi$, $\sin\psi \cos\varphi$, $\sin\psi \sin\varphi$, deren Quadrate und Produkte zu je zweien enthält, das Doppelintegral

$$\int\int \frac{\sin\psi\, d\psi\, d\varphi}{e}$$

sich in

$$\int\int \frac{\sin P\, dP\, d\vartheta}{G + G' \cos^2 P + G'' \sin^2 P \cos^2\vartheta + G''' \sin^2 P \sin^2\vartheta}$$

transformieren läßt durch Ausdrücke für $\cos P$, $\sin P \cos\vartheta$, $\sin P \sin\vartheta$, welche linear gebrochene Funktionen von $\cos\psi$, $\sin\psi \cos\varphi$, $\sin\psi \sin\varphi$ darstellen.

Die zunächst noch ganz im ursprünglichen Legendreschen Sinne auf die Umformung der elliptischen Integrale gerichteten Bestrebungen führten Jacobi jedoch sehr bald zu Überlegungen völlig anderer Natur.

Nachdem jener ausgezeichnete französische Mathematiker bereits 1786 und 1793 in seinen Mémoires „Sur les intégrations par d'arcs d'ellipse“ und „Sur les Transcendantes elliptiques“ eine allgemeinere analystische Auffassung der Elemente der Transformationstheorie der elliptischen Integrale kundgegeben und deren Einteilung in verschiedene Gattungen sowie deren Reduktion auf die Normalformen ausführlich entwickelt hatte, faßte er alle diese Untersuchungen in seinen „Exercices de calcul intégral sur divers ordres de Transcendantes et sur les Quadratures“ (1811—19) zusammen, aus deren Studium Jacobi zuerst die Grundlagen der bisher über die elliptischen Integrale angestellten Untersuchungen kennen lernte.

„Aber der junge Mathematiker, der sich schon in so vielen Richtungen mit Erfolg versucht hatte“, erzählt Dirichlet, „schien längere Zeit in der Theorie der elliptischen Funktionen vom Glücke nicht begünstigt zu werden. Einer seiner Freunde, der ihn eines Tages auffallend ver-

stimmt fand, erhielt auf die Frage nach dem Grunde dieser Verstimmung die Antwort: Sie sehen mich im Begriff, dieses Buch (Legendres exercices) auf die Bibliothek zurückzuschicken, mit welchem ich entschiedenes Unglück habe. Wenn ich sonst ein bedeutendes Werk studiert habe, hat es mich immer zu eignen Gedanken angeregt, und ist dabei etwas für mich abgefallen. Diesmal bin ich ganz leer ausgegangen und nicht zum geringsten Einfalle inspiriert worden.“ ... „Wenn die eignen Gedanken“, fügt Dirichlet hinzu, „in diesem Falle etwas lange auf sich warten ließen, so stellten sie sich später dafür um so reichlicher ein.“

Die Untersuchungen Abels, die, wie sich später aus dessen nachgelassenen Papieren ergab, damals schon ein großes Gebiet der Transzendentenlehre beherrschten, waren Jacobi völlig unbekannt geblieben; es kann kein Zweifel darüber obwalten, daß Abel bereits im Jahre 1825 im Besitz der Kenntnis der doppelten Periodizität der Umkehrungsfunktionen der elliptischen Integrale gewesen, und daß er nicht etwa nur an einer erweiterten und auf neuer Grundlage aufgebauten Theorie der elliptischen Transzendenten arbeitete, sondern daß sein Streben von vornherein darauf gerichtet war, eine allgemeine Theorie der Integrale algebraischer Differentiale zu entwickeln; wir wissen, daß er schon im Jahre 1825 damit umging, eine systematisch und einheitlich angelegte Theorie der elliptischen Transzendenten zu veröffentlichen. Am 4. März 1827 schreibt er an Holmboe aus Berlin: „Mais ce que j'ai de plus beau, c'est dans la théorie des fonctions transcendantes en général et celle des fonctions elliptiques en particulier; mais différons de t'en faire part jusqu'à mon retour.“ In der Tat schickt er auch Crelle sogleich den ersten Teil seiner berühmten „Recherches sur les fonctions elliptiques“, der im September 1827 erschien — aber inzwischen hatte schon Jacobi an Schumacher, den Herausgeber der „Astronomischen Nachrichten“, zwei vom 13. Juni und 2. August aus

Königsberg datierte Mitteilungen gesandt, welche im September in dieser Zeitschrift veröffentlicht wurden und Sätze enthielten, welche Abel damals ebenfalls bereits gefunden, aber erst in dem zweiten Teile seiner recherches, also später als Jacobi, veröffentlicht hat.

„Ayant terminé“, sagt Abel in einem Zusatze zu dem am 12. Februar 1828 an Crelle übersandten zweiten Teile seiner recherches, „le mémoire précédent sur les fonctions elliptiques, une note sur les mêmes fonctions par Mr. C. G. J. Jacobi inserée dans le No. 123 année 1827 du recueil de Mr. Schumacher, qui a pour titre 'Astronomische Nachrichten' m'est venu sous les yeux. Mr. Jacobi donne le théorème suivant ... Ce théorème élégant, que Mr. Jacobi donne sans démonstration, est contenu comme cas particulier dans la formule (227) du mémoire précédent, et au fond il est le même que celui de la formule (270). Nous allons démontrer cela.“ Daß Abel in der Tat in dieser Zeit schon im Besitze der allgemeinen algebraischen Transformationstheorie war, geht übrigens auch aus dem am Ende des Jahres 1827 ohne Angabe des Beweises unter dem Titel „Aufgaben und Lehrsätze“ im Crelleschen Journale von ihm ausgesprochenen Theoreme hervor: Si l'équation différentielle séparée $\frac{a\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$ $= \frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, a$ sont des quantités réelles, est algébriquement intégrable, il faut nécessairement, que la quantité a soit un nombre rationnel.

In dem ersten der beiden unter dem Titel „Extraits de deux lettres de M. Jacobi de l'université de Königsberg à Mr. Schumacher“ mitgeteilten Briefe sagt Jacobi:

„Veuillez bien, Monsieur, insérer dans votre journal les notices sur les transcendantes elliptiques, que j'ai l'honneur de vous adresser. C'est que je me flatte d'avoir fait quelques découvertes assez intéressantes dans cette théorie, dont je vais soumettre l'exposé au jugement des géomètres.

Les intégrales de la forme $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}$ appartiennent d'après la diversité du module c à des transcendantes diverses. On ne connait qu'un seul système de modules qu'on peut réduire l'un à l'autre, et Mr. Legendre dans ses Exercices dit même, qu'il n'y avait que ce seul. Mais en effet il y a autant de ces systèmes qu'il y a de nombres premiers, c'est à dire il y a un nombre infini de ces systèmes indépendants l'un de l'autre, dont chacun répond à un nombre premier, et dont le système connu répond au nombre premier 2."

Jacobi spricht in dieser Notiz bereits, wenn auch ohne Beweis, den allgemeinen Satz von der rationalen Transformation der elliptischen Integrale erster Gattung aus, daß $\sin\varphi = \frac{u}{v}$ gesetzt, worin u eine gewisse unpaare Funktion n^{ten} Grades von $\sin\psi$, v eine bestimmte paare Funktion $n - 1^{\text{ten}}$ Grades eben dieser Größe bedeutet, die Beziehung

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = m \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}}$$

liefert, und hebt hervor, daß man jetzt $\sin\psi$ auf fast analoge Art durch $\sin\vartheta$ so ausdrücken kann, daß man durch Zusammensetzung der beiden Integralgleichungen

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = n \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \vartheta}}$$

erhält, worin sich $\sin\varphi$ durch einen rationalen Bruch in $\sin\vartheta$ darstellt, dessen Zähler die unpaaren Potenzen bis zur n^2., der Nenner die paaren bis zur $n^2 - 1$. enthält. Dieser noch ohne Beweis und ohne Angabe des allgemeinen analytischen Transformationsausdruckes mitgeteilte Satz ist für die Transformation 3. und 5. Grades weiter ausgeführt und mit der Multiplikation und Division für diese Gradzahlen in Verbindung gebracht, wobei Jacobi bemerkt: „ainsi je donne ici pour la première fois la solution algébrique de l'équation du 9$^{\text{ième}}$ degré, dont la trisection de notre transcendante dépend." Die Transformation 3. Grades

war jedoch inzwischen schon von Legendre in dem im Januar 1827 ausgegebenen „Traité des fonctions elliptiques" veröffentlicht worden, ohne daß Jacobi zur Zeit der Veröffentlichung seiner Notiz davon Kenntnis hatte.

Schumacher hatte sogleich, nachdem er von den Untersuchungen Jacobis nur andeutungsweise Kenntnis erhalten, Gauss eine Mitteilung darüber gemacht, welcher den dringenden Wunsch äußerte, zu wissen, in welcher Richtung sich die Forschungen Jacobis bewegten. Nach Empfang des ersten Jacobischen Briefes schreibt Schumacher am 24. Juli 1827 an Gauss: „Von Jacobi ist beifolgender Brief gekommen, den ich Ihnen nur schicke, weil Sie es ausdrücklich verlangten und mir noch auf dem Erinnerungszettel notirt haben. Seinem Verlangen gemäß will ich hinzusetzen, daß er Legendre's neues Werk damals noch nicht gesehen habe; ich bitte Sie aber sehr, wenn Sie sonst mögen und können, senden Sie mir ein Paar Worte Anmerkung", worauf ihm Gauss am 2. August erwiderte: „Es scheint mir nach Erwägung aller Umstände am schicklichsten, wenn ich dabei ganz aus dem Spiele bleibe", und am 6. August in seinem Tagebuch eine Notiz machte, aus der hervorgeht, daß, während Jacobi in seinem ersten Briefe nur die Darstellung der Transformation 3. und 5. Grades durchgeführt hat, Gauss bereits längst im Besitze der Transformationsformeln 7. Grades war.

Am 2. August hatte Jacobi in einem zweiten, zugleich mit dem ersten veröffentlichten Briefe den allgemeinen analytischen Transformationsausdruck, wenn auch noch ohne Beweis, wirklich hingestellt, und zwar in der Form

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\psi}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi' - \varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi''' + \varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi' + \varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi''' - \varphi}{2}\right)} \cdots \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi^{(p-2)} \pm \varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi^{(p-2)} \mp \varphi}{2}\right)} \operatorname{tg}\left(45^0 \mp \frac{\varphi}{2}\right),$$

worin die Amplituden $\varphi^{(m)}$ durch die Beziehung der ersten elliptischen Integrale

$$F(\varkappa, \varphi^{(m)}) = \frac{m}{p} F(\varkappa, 90^0)$$

definiert werden, und p eine beliebige unpaare Zahl bedeutet.

Kurz zuvor hatte er diese Notiz Bessel mit den Worten gesandt: „Ihrer gütigen Erlaubniß gemäß überschicke ich Ihnen hier das bewußte für die A. N., nicht ohne Zittern und Zagen. Aber zürnen Sie nicht, wenn alles die Mängel eines ersten Beweises verräth; es hat wahrlich nicht an meiner Bemühung gelegen."

Auch diese zweite Mitteilung Jacobis schickte Schumacher noch vor dem Drucke am 14. August 1827 an Gauss: „Ich sende Ihnen noch folgenden Brief von Jacobi (diesmal mit seinem eignen Pettschafte gesiegelt), ich werde ihn einrücken und damit, denke ich, ist die Communication geschlossen", worauf ihm Gauss am 19. August erwiderte:

„Hieneben erhalten Sie zuvörderst den Jacobi'schen Brief zurück. Auch das darin enthaltene Theorem wird ganz leicht aus meinen Untersuchungen über die Transcendenten abgeleitet. Aus einer Andeutung Ihres Briefes scheint es mir fast, als ob sie abgeneigt sind, ähnliche nackte Aufstellungen von Sätzen ohne Begründung in Ihr Blatt aufzunehmen. Ich enthalte mich ganz, ein eignes Urtheil über diese Manier, die wenigstens nicht die meinige ist, zu fällen; aber auf den Fall, daß ich Ihre Andeutung recht verstanden haben sollte, bitte ich Sie, wenn künftig solche Briefe eingehen sollten, die sie nicht publiciren wollen, sie mir nicht zu schicken."

„Meine Absicht ist es allerdings", lautete die Antwort Schumachers vom 28. August, „künftig nicht nackte Aufstellungen ohne Begründung zu publiciren, wenn nicht die besondern Umstände der Sache die Publication rathsam machen. Da ich aber wegen dieser Umstände von Niemandem bessern Rath haben kann als von Ihnen, so setzt mich ihre Weigerung, solche Papiere zu sehen, etwas in Verlegenheit. Doch bescheide ich mich gern, daß mein

Wunsch, Ihren Rath zu erhalten, Sie nicht bestimmen kann, Papiere, die Sie nicht interessiren, durchzusehen ...";

aber Gauss beruhigte ihn am 9. September in einer des großen Mathematikers würdigen Form:

„Es hat mich geschmerzt, daß Sie meine Äußerungen über die Jacobi'schen Mittheilungen auf eine für mich so ungerechte Art ausgelegt haben. Ich werde stets gern bereit sein, auch etwas, was mich nicht interessirt, durchzugehen, wenn ich Ihnen damit einen Dienst erweisen kann. Aber wenn ich wünsche, solche Mittheilungen von Herrn Jacobi, die Sie nicht drucken lassen wollen, nicht mitgetheilt zu erhalten, so ist der Grund ja bloß der, daß ich in so fern Partei bin, als die Mittheilungen nur Stücke meiner eignen ausgedehnten Untersuchungen sind, die ich, wenn der Himmel mir in Zukunft noch Leben, Kräfte und Muße schenkt, zu einem umfassenden Werke ausarbeiten werde, und wobei es mir nicht gleichgültig sein kann, ob Jemand sagen kann, Theile davon seien mir durch Privatmittheilung bekannt geworden."

Unmittelbar nach Absendung seiner Briefe an Schumacher hatte Jacobi am 5. August 1827 ein Schreiben an Legendre gerichtet, in welchem er die in den beiden Noten erwähnten Resultate skizziert, das jedoch durch Nachlässigkeit des Überbringers erst einige Monate später Legendre eingehändigt wurde. Hiermit beginnt der für die Geschichte der mathematischen Wissenschaften so hochinteressante Briefwechsel zwischen Legendre und Jacobi, der sich bis zum Jahre 1832, ein halbes Jahr vor Legendres Tode hinzog; die Briefe Jacobis an Legendre wurden zuerst von Bertrand publiziert, kurz bevor sie bei einem der Brände in der Communezeit verloren gingen; der Briefwechsel zwischen beiden wurde von Borchardt im 80. Bande seines Journals veröffentlicht.

Dieser erste Brief Jacobis beginnt mit den schönen Worten:

„Monsieur, un jeune géomètre ose vous présenter quelques découvertes faites dans la théorie des fonctions elliptiques,

auxquelles il a été conduit par l'étude assidue de vos beaux écrits. C'est à vous, Monsieur, que cette partie brillante de l'analyse doit le haut degré de perfectionnement, auquel elle a été portée, et ce n'est qu'en marchant sur les vestiges d'un si grand maître, que les géomètres pourront parvenir à la pousser au delà des bornes qui lui ont été prescrites jusqu'ici. C'est donc à vous que je dois offrir ce qui suit comme un juste tribut d'admiration et de reconnaissance."

Die Existenz einer Transformation 5. Grades überraschte Legendre in hohem Grade, und er konnte sich mit dem in dem Schreiben Jacobis an ihn ausgesprochenen Gedanken von der Existenz einer zu einem beliebigen Grade gehörigen algebraischen Transformation so wenig vertraut machen, daß er — ganz anders als Gauss — bestimmt glaubte, daß Jacobi durch eine Induktion irregeführt worden; erst das Studium der beiden Briefe Jacobis in den „Astronomischen Nachrichten" überzeugte ihn sehr bald davon, daß die allgemeine Transformationstheorie auf einer festen Basis beruhe, und daß die Existenz einer unendlichen Anzahl von Modulnketten nicht mehr anzuzweifeln war.

„Ici je n'ai plus été de l'avis de Mr. Jacobi", sagt Legendre in einer in der Akademie gegebenen Besprechung dieser Jacobischen Sätze, „et j'ai même cru pouvoir lui écrire une lettre, dans laquelle je lui indiquais ce qui, suivant moi, l'avait induit en erreur. Heureusement l'envoie de cette lettre a été assez retardé pour que j'aie pu reconnaître, que c'était moi-même qui me trompais, et que Mr. Jacobi sur ce point comme sur les autres avait complétement raison; et je l'ai reconnu avec d'autant plus de plaisir que c'est sur un sujet dont je m'occupe depuis plus de quarante ans que j'ai été ainsi surpassé par Mr. Jacobi, mon émule."

Aber durchaus nicht einverstanden war Legendre mit den Schlußworten des Jacobischen Briefes vom 5. August: „il n'y a que très-peu de temps que ces recherches ont

pris naissance. Cependant elles ne sont pas les seules entreprises en Allemagne sur le même objet. M. Gauss, ayant appris de celles-ci, m'a fait dire, qu'il avait développé déjà en 1808 les cas de 3 sections, 5 sections et de 7 sections, et trouvé en même temps les nouvelles échelles de modules qui s'y rapportent. Cette nouvelle, à ce qui me paraît, est bien intéressante.“ Legendre wies vielmehr die Behauptungen von Gauss als unberechtigt zurück — und doch beruhten nicht bloß diese Angaben des großen Mathematikers, wie wir jetzt aus seinen Aufzeichnungen wissen, auf strenger Wahrheit, er war vielmehr schon seit langer Zeit vielen bis zur Mitte des Jahrhunderts auf diesem Gebiete gemachten Entdeckungen weit vorausgeeilt.

Auch die Antwort Jacobis: „Quant à Mr. Gauss, il n'a rien encore publié sur les fonctions elliptiques, mais il est certain qu'il a eu de jolies choses. S'il a été prévenu et peut-être surpassé, c'est une juste peine de ce qu'il a répandu un voile mystique sur ses travaux“, konnte Legendre für Gauss nicht günstiger stimmen; er häufte in seinem Berichte an die Akademie vom 29. November alles Lob auf Jacobi:

„Ce n'est pas par induction que Mr. Jacobi est parvenu aux résultats qu'il a publiés; c'est par une théorie profonde et infaillible et à l'aide de deux théorèmes, entièrement nouveaux, qu'il a fait cette découverte, qui agrandit considérablement la théorie des fonctions elliptiques et en fait une branche d'analyse parfaite dans son genre et qui ne peut-être comparée à aucune autre.“

Jacobis Plan, während der Herbstferien eine ausführlichere Darstellung der Transformationstheorie sowie seiner weiteren, bereits durchgeführten Untersuchungen in der Theorie der elliptischen Funktionen zu entwerfen, erlitt zunächst dadurch eine kurze Verzögerung, daß er durch seine Vorlesung über Variationsrechnung, die er im Sommer gehalten, veranlaßt worden, sich mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu beschäftigen, und auch hier wieder

zu neuen und interessanten Resultaten gelangt war, von denen er einen Teil am 12. August 1827 unter dem Titel „Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung“ an das Journal sandte.

„Die Entstehung und Ausbildung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen bildet einen der wichtigsten Momente in der Geschichte der Mathematik des 18. Jahrhunderts. Euler hatte diesen so fruchtbaren Zweig der Analysis ans Licht gerufen, und in einer großen Zahl von Beispielen durch besondere, dem jedesmaligen Falle angepaßte Kunstgriffe die Integration bewerkstelligt. Lagrange gab hierauf die ersten allgemeinen Vorschriften, die linearen partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen jeder Anzahl von Variabeln und insbesondere jede auch nicht lineare zwischen 3 Variabeln auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückzuführen. Die von Lagrange zu letzterem Zwecke angewendete Methode schien keiner Ausdehnung auf jede Anzahl von Variabeln fähig zu sein, da die Analysten, die dieses versuchten, die ihnen aufstoßenden Schwierigkeiten nicht überwinden konnten. Pfaff betrachtete daher den Gegenstand aus einem von allen bisherigen gänzlich verschiedenen Gesichtspunkte. Er sah nämlich das ganze Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung als speziellen Fall des weit umfassenderen an, jede gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integrieren; und indem er dieses Problem vollständig löste, hat er zugleich die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vollendet. Ich werde im folgenden diesen Gegenstand wieder aufnehmen, und ihn einer, wie ich glaube, neuen Behandlung unterwerfen, welche sich vielleicht durch ihre Leichtigkeit den Analysten empfiehlt. Durch sie werden die Schwierigkeiten, welche der Ausdehnung der Lagrangeschen Methode auf jede Anzahl von Variabeln entgegenstanden, so-

weit die Natur dieser Methode es möglich macht, gehoben werden, und man wird so auf dem entgegengesetzten Wege zu denselben Resultaten gelangen, welche Pfaff gefunden hat."

Zunächst wird in der Arbeit von Jacobi hervorgehoben, daß, wie Lagrange gezeigt hat, die Integration der Differentialgleichungen $dx : dx' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : \ldots : X^{(n)}$ mit der Lösung der Aufgabe übereinkommt, n verschiedene Funktionen F zu finden, von denen jede der Gleichung $\frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial x'} X' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} = 0$ identisch genügt, und daß jede willkürliche Funktion von solchen Integralfunktionen wieder eine Integralfunktion darstellt, wodurch Lagrange die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung auf die eines Systems totaler Differentialgleichungen zurückgeführt hat. Jacobi verallgemeinerte nun das Lagrangesche Theorem dahin, daß, wenn $F_1, F_2, \ldots F_n$ solche Funktionen der Variabeln $x, x', \ldots x^{(n)}$ darstellen, welche, für F gesetzt, die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial x'} X' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} X^{(n)} = 0$ identisch erfüllen oder welche nach Lagrange, willkürlichen Konstanten gleich gesetzt, die Gleichungen $dx : dx' : \ldots : dx^{(n)} = X : X' : \ldots : X^{(n)}$ integrieren, dann das System der m Gleichungen

$$X^{(i)} = X^{(m)} \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(m)}} + X^{(m+1)} \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(m+1)}} + \cdots + X^{(n)} \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(n)}}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots m - 1),$$

worin $x^0, x', \ldots x^{(m-1)}$ als Funktionen von $x^{(m)}, x^{(m+1)}, \ldots x^{(n)}$ betrachtet werden, integriert wird durch die m Gleichungen $\Pi_1 = 0, \Pi_2 = 0, \ldots \Pi_m = 0$, wenn $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_m$ willkürliche Funktionen von $F_1, F_2, \ldots F_n$ sind, wobei das Jacobische System linearer partieller Differentialgleichungen dadurch charakterisiert ist, daß in jeder Gleichung nur die partiellen Ableitungen einer Variabeln vorkommen, und daß in allen Gleichungen die Koeffizienten der nach derselben Variabeln genommenen Ableitung dieselben sind.

Von diesem Systeme linearer partieller Differentialgleichungen kann er nun den Übergang zu der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung machen, indem er aus einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung $\varphi(x, x', \ldots x^{(n)}, p', \ldots p^{(n)}) = 0$ mit einer abhängigen und n unabhängigen Variabeln durch Differentiation nach diesen n Variabeln und Hinzufügung einer identischen Gleichung ein System von $n+1$ linearen partiellen Differentialgleichungen der obigen von ihm aufgestellten Form herleitet, zu deren Integration somit nur ein System von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen ausreicht. Bildet man nun n willkürliche Funktionen $\Pi_1, \ldots \Pi_n$ der $2n-1$ Integralfunktionen $\varphi_1, \ldots \varphi_{2n-1}$ des totalen Systems, so liefert das System der $n+1$ linearen partiellen Differentialgleichungen integriert Gleichungen von der Form $\varphi = 0, \Pi_1 = 0, \ldots \Pi_n = 0$. Wie nun Lagrange die Bestimmung der bei der Integration einer partiellen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Variabeln vorkommenden zwei willkürlichen Funktionen von der Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variabeln durch das System zweier Gleichungen abhängig macht, so zeigt Jacobi, daß in dem von ihm betrachteten allgemeinen Falle die Bestimmung der willkürlichen Funktionen die Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $2n-1$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen oder, indem man eine der Variabeln konstant setzt, zwischen $2n-2$ Variabeln durch ein System von $n-1$ Gleichungen erfordert.

„Wie nun aber diese letztere immer und allgemein geleistet werden kann, ist erst durch die berühmte Pfaffsche Arbeit den Analysten kund geworden. Wenngleich also im allgemeinen das Problem immer nur durch diese schließlich gelöst werden kann, so schien es uns doch der Mühe wert, die Lagrangesche Methode so weit zu verfolgen, wie sie zu führen imstande ist ... Ich werde die

Pfaffsche Methode in mehreren Abhandlungen besonders behandeln, wo ich auch diesen Gegenstand wieder aufzunehmen gedenke."

Schon zwei Tage später, am 14. August, verfaßte er die erste dieser in Aussicht gestellten Abhandlungen und gibt in der unter dem Titel „Über die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integrieren", veröffentlichten Arbeit zunächst nur eine klare und etwas weiter ausgeführte Darstellung der Pfaffschen Methode.

„Pfaff hat in einer Abhandlung (Berl. Akad. 1814—15) gezeigt, wie man jede Gleichung von der Form $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0$, wo $X_1, \cdots X_{2n}$ beliebige Funktionen von $x_1, \ldots x_{2n}$ sind, durch ein System von n Gleichungen integrieren kann, von welcher Aufgabe die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen n Variabeln nur ein besonderer Fall ist. Zu diesem Ende drückt er $2n-1$ von den Variabeln $x_1, \ldots x_{2n}$ durch die übrige x_m und durch $2n-1$ neue Größen $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$ aus, wo $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$ gewisse Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ sind. Nach solcher Substitution verwandelt sich die Gleichung $X_1 dx_1 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0$ immer in eine andere von der Form $U dx_m + A_1 da_1 + \cdots + A_{2n-1} da_{2n-1} = 0$, wo $U, A_1, \ldots A_{2n-1}$ Funktionen von $x_m, a_1, \ldots a_{2n-1}$ sind. Die Funktionen $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$ bestimmt nun Pfaff so, daß $U = 0$, und daß x_m in den Größen $A_1, \ldots A_{2n-1}$ nur in einem allen gemeinschaftlichen Faktor vorkommt. Dividiert man mit diesem, so hat man die gegebene Gleichung in eine andere ähnliche, aber nur zwischen $2n-1$ Variabeln $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$ verwandelt ..."

Jacobi führt nun die allgemeine Methode, eine Gleichung $X dx + X_1 dx_1 + \cdots + X_p dx_p = 0$ in eine andere $U dx + A_1 da_1 + \cdots + A_p da_p = 0$ zu verwandeln, in welcher $U = 0$ sein soll und x in $A_1, \ldots A_p$ nur in einem allen

gemeinschaftlichen Faktor M vorkommt, in eleganter und symmetrischer Form näher aus, und findet, wenn er $\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial x} = N$, $\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha} = (\alpha, \beta)$ setzt, die bereits bekannten $p+1$ zu erfüllenden Gleichungen in der Form:

$$NX_i = (i, 0) + (i, 1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + \cdots + (i, p)\frac{\partial x_p}{\partial x} \quad (i = 0, 1 \ldots p);$$

es werden daher, wenn sich in leicht kenntlichen Bezeichnungen

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{NV_1}{\varDelta}, \quad \ldots \frac{\partial x_p}{\partial x} = \frac{NV_p}{\varDelta}, \quad N = \frac{\varDelta}{V}$$

ergibt, $a_1, a_2, \ldots a_p$ diejenigen Funktionen sein, welche bei Integration der Gleichungen $dx : dx_1 : \ldots : dx_p = V : V_1 : \ldots : V_p$ den p willkürlichen Konstanten gleich gesetzt werden. Er behandelt nun einige merkwürdige Eigenschaften des obigen, für die spätere Eliminationstheorie wichtigen Gleichungssystems, in welchem die Vertikalreihen der Koeffizienten das Negative der Horizontalreihen sind, und findet leicht, daß die Anzahl der Variabeln $x, x_1, \ldots x_p$ eine gerade sein muß. „Es ist nämlich bekannt, daß man bei jedem System von n Gleichungen zwischen n unbekannten Größen darauf zu sehen hat, ob nicht der den Werten der Unbekannten gemeinsame Nenner, welchen Gauss in den Disqu. Arithm. mit dem Namen Determinante bezeichnet, verschwinden könne, welches ein Zeichen ist, daß das System der n Gleichungen nicht bestehen kann, wofern nicht etwa eine Bedingungsgleichung zwischen den Konstanten stattfindet, vermöge welcher die n^{te} Gleichung eine Folge der übrigen $n-1$ Gleichungen ist.“

Die Arbeit, welche bereits deutlich das Eindringen in weit tiefere algebraische und analytische Probleme erkennen läßt, schließt mit den Worten: „Da die Pfaffsche Methode auf Variation der Konstanten beruht, und Lagrange und Poisson in der Mechanik bei der Methode der Variation

der Konstanten auf ein ebensolches Gleichungssystem gekommen sind, so scheint dieses System vorzugsweise bei dieser Methode der Variation der Konstanten vorzukommen", und weist schon auf weit spätere bahnbrechende Untersuchungen in der analytischen Mechanik hin.

Arbeiten von Bessel und mündliche Erörterungen astronomischer Fragen mit demselben führten Jacobi noch zu einer kleinen, vom 20. August 1827 datierten Arbeit „Über die Bestimmung der Rektaszension und Deklination eines Sternes aus den gemessenen Distanzen desselben von zwei bekannten Sternen", in welcher zum Teil bekannte, aber komplizierte und zu einer eleganten Methode der Berechnung noch nicht geeignete Formeln auf einem kurzen und direkten Wege ohne Beihilfe der sphärischen Trigonometrie entwickelt werden.

Kaum hatte er diese Arbeiten niedergeschrieben, so wendet er sich wieder mit seinem unermüdlichen Wissensdrange und der eminenten Kraft seines Geistes der Theorie der elliptischen Funktionen zu, wird aber durch die Fülle der Entdeckungen, die ihn täglich neue und ungeahnte Wahrheiten erkennen lassen, gehindert, alles methodisch zusammenzustellen oder auch nur strenge Beweise und klare Ausführungen für seine Theoreme zu liefern. Inzwischen war auch das Heft des Crelleschen Journals, worin der erste Teil der Abelschen recherches veröffentlicht wurde, im September 1827 ausgegeben und wohl noch am Ende dieses Monats in Königsberg eingetroffen, wie aus einem vom 4. Oktober datierten Schreiben der Bibliotheksverwaltung an das Ministerium hervorgeht, worin letzteres ersucht wird, dafür zu sorgen, daß Reimer nicht, wie bei dem letzten Heft, diese wieder per Post schickt, da sie einen Taler Porto gezahlt habe und „gar keine Eile nöthig ist". Zunächst ging dieses Heft aber an Bessel, der erst nach einiger Zeit Jacobi davon Mitteilung macht: „Es ist ein neues Heft des Crelle'schen Journals angekommen

(B. 2. H. 2) mit einer Abhandlung über elliptische Transcendenten von Abel. Sie werden mir am besten sagen können, ob der Gesichtspunkt, unter welchem er sie ansieht, interessant ist.“ Zu einem wirklichen Studium der recherches wird Jacobi nach allem, was wir wissen, wohl kaum vor Ende des Jahres gekommen sein.

Die von Gauss geäußerten Bedenken in betreff der von Jacobi gewählten Art der Veröffentlichung in kurzen Anzeigen, sowie der ausdrücklich von Legendre ausgesprochene Wunsch, den Beweis Jacobis für das allgemeine rationale Transformationsproblem kennen zu lernen, veranlaßten Schumacher, sich am 5. November direkt an Jacobi zu wenden: „Aufrichtig gesagt bin ich auch insofern Legendre's Meinung, als es mir auch am besten scheint, wenn man solche brillante Entdeckungen wie die Ihrigen bekannt macht, nicht bloß das Enoncé zu geben, sondern sie gleich zu beweisen. Jeder, der die Wissenschaft wirklich liebt, ist immer zwischen der Erscheinung des Enoncés und der Erscheinung des Beweises in einer unangenehmen gespannten Stimmung und kann die heimliche Furcht, daß es nicht bewiesen werde, nicht unterdrücken. Erlauben Sie mir also eine Bitte, reißen Sie uns alle bald aus dieser Spannung und geben Sie die Deduction.“

Glücklicherweise gaben die Vorlesungen im Wintersemester über Kegelschnitte und Elementargeometrie Jacobi wenig zu tun, und er stellte zunächst in einer vom 18. November 1827 datierten Arbeit „Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis“, welche im Dezember in Schumachers „Astronomischen Nachrichten“ veröffentlicht wurde, die wesentlichsten von ihm gewonnenen Resultate zusammen und lieferte zugleich den Beweis für das in seinem zweiten Briefe an Schumacher ausgesprochene Transformationsproblem.

„Proprietates functionum ellipticarum quasdam in No. 123 Astr. N. tradidi, quae novae atque attentione geo-

metrarum non indignae videbantur. Disquisitiones, quibus illae originem debent, exinde ulterius continuatae sunt egregiamque, ni fallor, amplificationem theoriae a Legendre datae praebent. Cum autem tempus, quo tractavi, hasce disquisitiones complectenti, finem imponere licebit, definire nondum queam, geometris non ingratum fore spero, si fragmentum harum disquisitionum, demonstrationem scilicet theorematis in doctrina de transformatione functionum ellipticarum fundamentalis, hic breviter exponam. Multifariis idem modis variari posse, quisquis, perlecta demonstratione, facile intelliget."

Der Beweis beruht auf der Abzählung der Konstanten in der rationalen Substitution $y = \frac{U}{V}$ und der Aufstellung der Bedingungen dafür, daß diese Substitution die Gleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-\alpha y)(1-\alpha' y)(1-\alpha'' y)(1-\alpha''' y)}}$$
$$= \frac{1}{M}\frac{dx}{\sqrt{(1-\beta x)(1-\beta' x)(1-\beta'' x)(1-\beta''' x)}}$$

nach sich ziehen soll; indem nun Jacobi, unabhängig von Abel, die eindeutige Umkehrungsfunktion des elliptischen Integrales einführt, die er als sin am bezeichnet, spricht er das Theorem aus, daß jener Differentialgleichung in der Normalform mit den Integralmoduln λ und $\varkappa$ durch den Ausdruck

$$1 - y = \frac{\left(1 \mp x\right)\left(1 \pm \dfrac{x}{\operatorname{sincoam} \dfrac{2K}{2n+1}}\right)^2 \cdots \left(1 \pm \dfrac{x}{\operatorname{sincoam} \dfrac{2nK}{2n+1}}\right)^2}{\left(1 - \varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \dfrac{2K}{2n+1}\right) \cdots \left(1 - \varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \dfrac{2nK}{2n+1}\right)}$$

genügt wird, und fügt hinzu: „Theorema hoc generaliter valet, non tamen omnes problematis solutiones amplectitur. Ulteriores vero hujus argumenti disquisitiones in tractatu supra nominato reperientur." Zugleich wird der analytische Ausdruck für $\sqrt{\lambda}$ durch $\sqrt{\varkappa}$ gegeben, von dem Legendre

in dem ersten Supplement zu seinem traité sagt: „cette équation transcendante peut être regardée comme l'un des théorèmes les plus beaux et les plus féconds de cette branche d'analyse.“

Nach Empfang dieser Arbeit schreibt Schumacher Ende November an Gauss:

„An Jacobi hatte ich, wie Sie sich vielleicht erinnern, geschrieben, daß mir das Einrücken solcher Enoncés nicht ganz passend erschien. Er hat mir jetzt den Beweis seines Fundamentaltheorems geschickt und will die ganze Analyse nachsenden. Mir scheint seine Ableitung sehr scharfsinnig, ich bin aber zu neu in diesen Untersuchungen, um meinem Urtheile zu trauen. Es wird bald gedruckt und dann werden Sie am besten entscheiden. Legendre hat einem französischen Officier erklärt, er glaube nicht, daß Jacobi seine Enoncés beweisen könne. Er wolle aber, falls dieser Beweis geführt werde, daraus ein Supplement zu seiner Theorie machen. Ich habe Ihnen nicht das Papier vorher gesandt, da ich in Bezug auf Jacobi's Mittheilungen Ihren Wunsch weiß. Jacobi ist übrigens derselbe, von dem Bessel mir so viele sonderbare Sachen erzählt hat“,

und zugleich erhielt Gauss, noch bevor er die Arbeit zu Gesicht bekam, von Bessel eine vom 30. November datierte Mitteilung, die uns keinen Zweifel darüber läßt, daß Jacobi schon vor dem Erscheinen der recherches die Umkehrungsfunktion des elliptischen Integrals in seine Transformationsausdrücke eingeführt hatte:

„So sehr mich die schönen Resultate von Jacobi über die elliptischen Transcendenten erfreut haben, so sehr habe ich auch bedauert, daß er und Abel, der vielleicht noch stärker ist als Jacobi, Ihnen viele Resultate rauben, welche Sie vermuthlich früher schon besessen haben. Zu einer Bezeichnung dieser Functionen habe ich Jacobi aufgefordert; Sie werden bald die Probe sehen, die er damit gemacht hat. Den Sinn, diese Theorie so geschmeidig zu machen,

wie sie sich ohne Zweifel machen läßt, hat Jacobi nicht. Hier und in jeder andern Hinsicht wird Ihre Arbeit wieder classisches Muster werden. Möchten Sie doch, da sie längst reif sein muß, eine Anwendung derselben ausarbeiten und dadurch Ihren Besitz sichern!"

An demselben Tage, als Bessel an Gauss diese Mitteilung richtete, schrieb Legendre an Jacobi, ohne noch von dessen neuer Arbeit etwas zu wissen:

„.... Mais ayant reçu votre lettre j'y ai vu les deux formules générales sous forme trigonométrique, dont toute votre théorie dépend; je vois dès lors que ce n'est pas sur l'induction, mais bien sur une analyse profonde et rigoureuse, que vous avez établi votre proposition générale. Maintenant je ne puis que vous témoigner le désir que j'éprouve d'avoir communication de l'analyse qui vous a conduit à ces deux formules; la grand habitude que j'ai de la matière me fera contenter d'une simple indication de la méthode, ou de son principe fondamental."

Legendre erkannte wohl die ungeheure Tragweite der Jacobischen Prinzipien, ohne jedoch noch die Quelle zu ahnen, aus der alle diese Entdeckungen flossen; „die Scheu des hauptsächlich numerische Werthbestimmungen bezweckenden Mathematikers vor dem Imaginären", sagte später einmal Jacobi in einer für Alexander v. Humboldt gemachten geschichtlichen Aufzeichnung, „war die Ursache, daß Legendre der wichtigste Fortschritt der neueren Analysis, die Einführung der doppelt periodischen Functionen entgangen ist." Dagegen erkannte Abel, welcher im Besitze der meisten damals von Jacobi veröffentlichten Resultate war, ebenso wie Gauss, daß der Weg, den Jacobi eingeschlagen, unaufhörlich zu neuen Entdeckungen führen mußte.

„En décembre", sagt Holst, „les Astron. Nachr. publièrent la démonstration de Jacobi pour l'une des propositions et ce fut cet article, qui, arrivant à Christiania,

effraya tout à coup Abel. Bjerknes présume que, à cause des difficultés des communications postales en hiver, Abel n'a guère dû connaître la démonstration de Jacobi avant le printemps. Ce qui le frappa, ce fut, comme il a été dit, l'usage de l'inversion par Jacobi, et alors il se sentit envahi dans son propre domaine. Hansteen, dans une lettre à Schumacher, a raconté à sa manière sèche, amusante, qu' Abel „devint tout pâle“, lorsque lui Hansteen avait mis sous ses yeux le numéro des Astr. Nachr. avec le mémoire de Jacobi. Abel dut, écrit-il, courir chez le pâtissier et prendre un petit verre d'eau de vie „pour maîtriser son émotion“. Schumacher communique l'histoire à Gauss et il ajoute: Si vous faites un jour connaître vos recherches, ça lui coûtera probablement encore plus cher d'eau de vie.“

Inzwischen hatte sich der Ruhm Jacobis in der mathematischen Welt immer mehr verbreitet, teils durch das günstige Urteil, welches Gauss über dessen Arbeiten ausgesprochen, teils aber auch und vorzüglich durch das begeisterte Lob, welches Legendre ihm in der Akademie gespendet und welches in deutschen Zeitungen Widerhall gefunden. Jacobi, der noch immer Privatdozent mit 200 Talern Gehalt, obwohl der einzige Lehrer der Mathematik an der Universität zu Königsberg war, wandte sich am 22. Oktober 1827 an das Ministerium mit der Bitte um eine Anstellung, „an die er einige Ansprüche zu haben glaube, sei es hier oder anderswo ...“

„Nachdem ich zwei Semester auf der Berliner Universität mit vielem Beifall gelesen hatte, wie ein hohes Ministerium in einem Schreiben an die hiesige Universität zu bezeugen die Geneigtheit hatte, versehe ich bereits während 3 Semester die erledigte Stelle des verstorbenen ordentlichen Professors Wrede, ohne Anstellung und ohne einen der Vortheile zu genießen, welche mit derselben verbunden waren. Ich hatte mir seitdem durch glänzende Entdeck-

ungen einen nicht unbedeutenden Ruf in der Gelehrtenwelt gegründet, und ausgezeichnete Mathematiker, wie der Herr Hofrath Gauss in Göttingen und der Herr Professor Bessel hierselbst werden einem hohen Ministerium gern bezeugen, daß diese zu den wichtigsten und bedeutendsten Erweiterungen der Mathematik in der neueren Zeit gehören. Ich schmeichle mir daher, daß auch ein hohes Ministerium meinen Bestrebungen den Beifall nicht versagen wird, welcher ihnen von den ersten Mathematikern der Zeit geworden ist.“

Die Fakultät, vom Minister zu einem Gutachten aufgefordert, erklärte, daß sie nach Befragen Bessels in Jacobis ausgezeichnete wissenschaftliche Leistungen keinen Zweifel setze, aber den Wunsch hege, mit ihm nicht in kollegialische Verbindung zu treten, der unangemessenen Art wegen, wie sich derselbe über die Universität und die akademischen Lehrer geäußert habe. Der Kurator hebt dem gegenüber in erfreulicher Objektivität in seinem Berichte an den Minister hervor, daß sich die Bemerkungen der Fakultät auf Jacobis erstes Auftreten beziehen, wobei er sich über die Universitätslehrer mit Ausnahme der von ihm verehrten Professoren Bessel, Lobeck und einigen andern mit nicht hinlänglicher Achtung geäußert haben solle, und daß es ihm verargt wurde, weil er nur mit den gleichzeitig an die Universität gekommenen jüngeren Dozenten — Neumann, Dove u. a. — in Verbindung getreten sei. „Da derselbe als professor extraordinarius nicht in die Facultät tritt, so halte ich auch die Besorgniß derselben für voreilig, und sie dürfte es selbst nicht wünschen, einen so tüchtigen Mathematiker von der Universität zu weisen . . .“

Das günstige Urteil, welches Bessel über die wissenschaftliche Bedeutung Jacobis abgab — daß er, wiewohl einziger Dozent der Mathematik, nur vor 4 Zuhörern las, lag an der überaus großen Schwierigkeit, den Geist all-

mählich umzugestalten, in dem die mathematischen Studien damals meist an allen deutschen Universitäten betrieben wurden — war entscheidend für die Entschlüsse des Ministeriums. Am 28. Dezember 1827 wurde Jacobi zum außerordentlichen Professor mit einem Gehalte von 400 Talern ernannt; die Ernennung von Neumann und Dove erfolgte im März 1828. Gerade in dieser Zeit siedelte Dirichlet von Breslau nach Berlin über, wo er sich, wiewohl schon außerordentlicher Professor in Breslau, als Privatdozent habilitieren mußte, während seine definitive Versetzung als außerordentlicher Professor in Berlin erst im Jahre 1831 erfolgte.

Sehr glücklich über diesen ersten Erfolg auf seiner Dozentenlaufbahn, meldet er Legendre, daß er wesentlich ihm seine Professur verdanke, da eine Berliner Zeitung die Mitteilung gebracht habe, welche Legendre in der Pariser Akademie über seine Arbeiten gemacht, und daß die Autorität seines Namens die Ursache war, daß der Minister ihn anstellte. Eben diese Zeitungsnotiz hatte auch Jacobis Eltern zuerst Kunde gebracht von dem Ruhme ihres Sohnes; am 18. Dezember schreibt ihm sein Vater, noch bevor die Ernennung Jacobis zu seiner Kenntnis gekommen: „Wo soll ich Worte des Dankes gegen den Allmächtigen hernehmen für die große Gnade, die er mir durch meine lieben, guten Kinder erzeigt; ich habe ja nur meine Pflicht als Vater erfüllt, und das Bewußtsein, dies gethan zu haben, ist ja schon der süßeste Lohn für mich; auf die große Freude aber, die ich gestern hatte, war ich nicht vorbereitet. Aus inliegendem wirst Du sehen, was gestern in der Vossischen Zeitung aus Paris stand über den jungen 25jährigen Jacobi aus Königsberg . . . .“, und sein Bruder Moritz fügt hinzu: „Legendre hat den Neid gemordet und an den Galgen gebracht; denn ist er es nicht, so darf niemand neidisch sein, selbst nicht einmal ich, der ich doch im 3. Crelle'schen mit meinem angewandten Wind-

hundsflügel aufgetreten bin — nun lebe wohl und sei fidel sehr baldiger Professor.“ Pietätvoll bewahrte Jacobi die Zeilen seines Vaters auf, die sich noch heute in seinem Nachlaß befinden. Am 16. Januar 1828 folgten die Glückwünsche der Eltern zu der fröhlichen Neujahrsbotschaft von der Ernennung zum Extraordinarius.

Jacobi als außerordentlicher Professor an der Universität zu Königsberg vom Januar 1827—Juli 1832.

Kaum war der erste Teil der recherches von Abel erschienen, die es nicht zweifelhaft ließen, daß dieser schon seit fast zwei Jahren in dem Besitze einer allgemeinen und umfassenden Theorie der elliptischen Transzendenten war, und daß ihm jedenfalls in sehr vielen Punkten auf diesem Gebiete die Priorität der Entdeckung gebühre, als der wunderbare, in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften fast einzig dastehende Wettkampf zwischen „den beiden Athleten“ begann, der Jacobi zunächst keine Zeit ließ zu der geplanten Ausarbeitung einer zusammenhängenden, in allen Teilen wohlbegründeten Theorie. Nur Einer sah still und nicht ohne Bewunderung diesem geistigen Ringen zu, er, der schon seit mehr als 30 Jahren im Besitze der meisten Resultate und Methoden war, welche in der nächsten Zeit auf dem so unerwartet entstandenen neuen und großen Gebiete der mathematischen Wissenschaften erobert werden sollten.

Jacobi vertiefte sich nun zunächst in das Studium des ersten Teiles der recherches und schreibt darüber am 12. Januar 1828 aus Königsberg an Legendre:

„Depuis ma dernière lettre, des recherches de la plus grande importance ont été publiées sur les fonctions elliptiques de la part d'un jeune géomètre, qui peut-être

vous sera connu personnellement. C'est la première partie d'un mémoire de Mr. Abel, à Christiania, qu'on m'a dit avoir été à Paris il y a deux ou trois ans, inséré dans le second cahier du second volume du Journal des Mathématiques pures et appliquées publié à Berlin par Mr. Crelle. La continuation doit avoir été publiée dans ces jours dans le cahier troisième dudit Journal; mais elle ne m'est pas encore parvenue. Comme je suppose que ce Mémoire ne vous soit pas encore connu, je vous en veux raconter les détails les plus intéressants. Mais pour plus de commodité, j'avancerai le mode de notation, dont je me sers ordinairement."

Er hebt in diesem Briefe die Lösung des Divisionsproblems besonders hervor, durch welche Abel die algebraische Auflösbarkeit der Divisionsgleichung $n^{2\text{ten}}$ Grades nachgewiesen und die Teilung einer beliebigen elliptischen Funktion auf die Teilung der ganzen Funktion K zurückgeführt, bemerkt jedoch schon hier, daß sich die algebraische Auflösung der Teilungsgleichung einfacher, als es bei Abel geschehen, mit dessen Bezeichnungen in der Form darstellen läßt:

$$\sum_{-n}^{+n}{}_{m} \sum_{-n}^{+n}{}_{\mu} \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega + 2\mu\bar{\omega}i}{2n+1}\right) p^m q^\mu$$
$$= \sqrt[2n+1]{A + Bf(2n+1)\beta F(2n+1)\beta},$$

worin p und q $2n+1$. Einheitswurzeln, A und B ganze Funktionen von $\varphi(2n+1)\beta$ sind, und durch Variation der Größen p und q die $(2n+1)^2$ Posten der linken Seite sich, ohne noch eine Gleichung n. Grades auflösen zu müssen, linear durch die rechten Seiten der so erhaltenen Gleichungen ausdrücken lassen, ein Resultat, das er in einer vom 25. Januar 1828 datierten Notiz „Addition au mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques Vol. II. p. 101 du Journal de M. Crelle" in eben diesem Journal veröffentlichte.

„Nicht minder erfolgreich", sagt Dirichlet, „griff Jacobi in die von Abel gegebene Theorie der allgemeinen

Teilung ein. Die Art, wie Abel das Problem gelöst hatte, zeigte zwar, daß die Wurzeln immer algebraisch ausdrückbar sind, erforderte aber zur wirklichen Darstellung derselben die Bildung von gewissen symmetrischen Wurzelverbindungen, die nur in jedem besonderen Falle bewerkstelligt werden konnte. Aus einem neuen Prinzip leitete Jacobi die schließlichen, für jeden Grad geltenden und unmittelbar aus den Daten des Problems gebildeten Ausdrücke der Wurzeln ab, welche Ausdrücke überdies vor den Abelschen eine größere Einfachheit ihrer Form voraushaben. Es war das der Gedanke, die unendlichen Produkte, durch deren Quotienten Abel die elliptischen Funktionen ausgedrückt hatte, als selbständige Transzendenten in die Analysis einzuführen."

Der Brief Jacobis an Legendre vom 12. Januar, welcher zunächst der Darstellung der Abelschen Entdeckungen gewidmet war, enthält aber auch eigne, für den weiteren Ausbau der Theorie der elliptischen Funktionen höchst bedeutungsvolle Resultate. Er spricht in demselben bereits von den allgemeinen algebraischen Modulargleichungen zwischen den vierten Wurzeln der Integralmoduln, jenen Gleichungen, welche später eine Brücke bilden sollten zwischen der Theorie der elliptischen Transzendenten und der Algebra, hebt hier schon den Satz hervor, daß die zu einem beliebigen Transformationsgrade gehörigen Modulargleichungen ein und derselben Differentialgleichung dritter Ordnung genügen, „un resultat curieux, qui d'abord m'a frappé un peu", und fügt noch die Bemerkung hinzu: „aussi j'ai trouvé que, dans certains cas, on retombe sur le même module ... ce sera dans tous les cas où le nombre n est la somme de deux carrés, $n = a^2 + 4b^2$, $\varkappa$ étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$; la fonction elliptique se trouve alors multipliée par $a \pm 2bi$, ... c'est un genre de multiplication, qui n'a pas son analogie dans les arcs de cercle." Es ist endlich noch für den weiteren Verlauf der Parallelität seiner und Abels Untersuchungen nicht un-

wesentlich, aus jenem Briefe die Stelle hervorzuheben, in welcher er für die Relation $\operatorname{sinam}(iu, \varkappa) = i \operatorname{tgam}(u, \varkappa')$ die Priorität Abel zuspricht: „théorème fondamental d'Abel", so daß hiernach in dieser Gleichung allein, wie wir sehen werden, nicht die Entdeckung der doppelten Periodizität durch Jacobi zu suchen ist.

Am 6. Februar 1828 sendet Legendre eine „Note sur les nouvelles propriétés des fonctions elliptiques découvertes par M. Jacobi" an Schumacher, in der er die Jacobischen Transformationsarbeiten ausführlich bespricht und, indem er den direkten Weg verläßt, eine Verifikation des Jacobischen Theorems zu geben versucht. Aber noch immer kann er seine Verwunderung darüber nicht unterdrücken, daß Transformationen beliebigen Grades ein elliptisches Integral in ein gleichgestaltetes verwandeln, „ce qui multipliéra d'une manière encore plus prodigieuse les transformations de la fonction F, véritable Protée analytique", und bei aller Bewunderung der Jacobischen Entdeckungen wiederholt sich immer wieder die Klage über die Undurchsichtigkeit des von ihm für das Transformationstheorem gegebenen Beweises: „Ici on doit regretter que l'auteur remplisse la tâche, qu'il s'est imposée par une sorte de divination, sans nous mettre dans le secret des idées, dont la filiation l'a amené progressivement à la forme que doit avoir $1 - y$, pour satisfaire aux conditions du problème. Au reste cette suppression des idées intermédiaires s'explique assez naturellement par la nécessité de ne pas donner trop d'étendue à une démonstration, qui devait être insérée dans un journal scientifique; et il est à croire que quand l'auteur donnera un libre cours au développement de ses idées, dans un ouvrage composé ad hoc, il rétablira les intermédiaires dont l'absence se fait remarquer." Dieselbe Klage läßt er am 9. Februar in einem direkten Briefe an Jacobi laut werden: „Vous verrez dans ma note que cette belle démonstration m'aurait paru plus satisfaisante, si vous y eussiez

joint quelques détails sur la série des idées, qui vous ont conduit à la valeur supposée pour $1 - y$; vous pourrez avoir égard à mon observation dans les autres parties de vos recherches qui vous restent à publier."

Am 14. Februar, nachdem bereits zwei Tage zuvor der zweite Teil der recherches von Abel in die Hände von Crelle gelangt war, erhält Jacobi den traité von Legendre und teilt dies am folgenden Tage Bessel mit: „Ew. Hochw. beehre ich mich einen Gruß des Baron v. Humboldt zu bestellen, den er mir in einem Schreiben, das ich gestern von ihm erhielt nebst dem Werke von Legendre aufgetragen hat. Ich erlaube mir, Ihnen diesen Brief selber mitzutheilen, weil ein passus daraus Sie vielleicht interessirt, wie er ganz Deutschland interessiren muß. Denn der Mann, der die Zierde seines Jahrhunderts ist, ist es doch zunächst seiner Zeit und seines Landes, das ihn besitzt. Wir aber, denen das Glück geworden ist, Sie näher kennen zu lernen, dürfen zu der allgemeinen Bewunderung, welche der Geschichte anheimfällt, noch die besondere der persönlichen Tugenden fügen."

Trotz der wiederholten dringenden Bitten Legendres kommt Jacobi noch immer nicht dazu, ihm genauere Mitteilungen über den Beweisgang für all seine umfassenden Theoreme zu machen; denn beständig drängen sich ihm neue Probleme in der Theorie der elliptischen Transzendenten auf, die immer wieder mit wunderbarer Leichtigkeit bewältigt werden. So schreibt er im März 1828 ein kurzes Billett an Bessel: „Sei $q = e^{\frac{-\pi K'}{K}}$, so wird

$$\sin \operatorname{am}(u, \varkappa) = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\sin \frac{\pi u}{2K} - q^{1 \cdot 2} \sin \frac{3\pi u}{2K} + q^{2 \cdot 3} \sin \frac{5\pi u}{2K} - \cdots}{1 - 2q^{1 \cdot 1} \cos \frac{\pi u}{2K} + 2q^{2 \cdot 2} \cos \frac{2\pi u}{2K} - \cdots},$$

hieraus für $u = K$:

$$\sqrt{\varkappa} = 2\sqrt[4]{q} \frac{1 + q^2 + q^6 + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + \cdots},$$

die beiden wichtigsten Formeln vielleicht für die Theorie.

$$\text{Nachschrift: } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}},\ K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa'^2 \sin^2 \varphi}},$$

$\varkappa \cdot \varkappa + \varkappa' \cdot \varkappa' = 1$", und sendet am 1. April eine Arbeit — „fort ingenieux" bezeichnet sie Legendre — „Über die Anwendung der elliptischen Transzendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie" betitelt, an das Crellesche Journal, in der er sich die Aufgabe stellt, die Relation zwischen der Distanz der Mittelpunkte und den Radien zweier Kreise zu finden, von denen der eine einem unregelmäßigen Polygon eingeschrieben, der andere demselben umgeschrieben ist. Diese schon von Euler für das Dreieck behandelte Aufgabe war von Steiner, „der es gewohnt ist, die bekannten Grenzen hinter sich zu lassen", für das Fünfeck, Sechseck und Achteck gelöst worden, nachdem bereits Fuss dieselben Resultate und außerdem noch die Beziehung für das Siebeneck — bei weitem die schwierigste der hierher gehörigen Aufgaben — schon früher hergeleitet hatte, und es spricht Jacobi diesem die Priorität vor Steiner zu, weil die beschränkende Annahme, die Fuss dadurch machte, daß das ein- und umgeschriebene Polygon einen Durchmesser habe, der durch beide Centra geht und das Polygon in zwei gleiche und ähnliche Teile teilt, wie Jacobi nachweist, durch einen Satz von Poncelet beseitigt werden kann.

Jacobi entwickelt in dieser Arbeit einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen dem bekannten Ponceletschen Schließungsproblem und der Theorie der elliptischen Funktionen. Zieht man nämlich aus einem Punkte A eines Kreises mit dem Mittelpunkte C und dem Radius R eine Tangente an einen innerhalb gelegenen Kreis mit dem Mittelpunkte c und dem Radius r, legt ferner von dem Schnittpunkte A' jener Tangente mit dem ersten Kreise wieder an den innern Kreis eine Tangente bis A'', u. s. w., verlängert

endlich $cC = a$ bis zum Schnittpunkte P mit dem ersten Kreise und nennt die Winkel $ACP = 2\varphi$, $A'CP = 2\varphi'$, $A''CP = 2\varphi''$, u. s. w., so findet Jacobi die Beziehungen

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi^{(r+1)} + \varphi^{(r-1)}}{2} = \frac{R-a}{R+a}\operatorname{tg}\varphi^{(r)},$$

welche mit denjenigen übereinstimmen, die zur Vervielfachung des Argumentes t der elliptischen Funktion $\operatorname{am}(u+t)$ aufgestellt werden, und folgert daraus leicht den Satz, daß, wenn man die Größen α und $\varkappa$ aus den Gleichungen bestimmt $\cos\alpha = \frac{r}{R+a}$, $\varkappa^2 = \frac{4Ra}{(R+a)^2 - r^2}$, die Beziehung, welche zwischen R, r und der Distanz a der beiden Mittelpunkte stattfindet, wenn der erste Kreis einem n-Eck umgeschrieben, der zweite diesem eingeschrieben ist und h die Zahl der Umläufe des Vielecks durch die ganze Peripherie bedeutet, in Legendrescher Bezeichnung in der einfachen Form gegeben ist: $F(\alpha, \varkappa) = \frac{h}{n} F(\pi, \varkappa)$.

Schon am folgenden Tage, am 2. April 1828, sendet er noch ohne Kenntniß des zweiten Teiles der in demselben Hefte des Journals veröffentlichten recherches von Abel an Crelle eine „Note sur les fonctions elliptiques" betitelte Arbeit, welche die Ausführung der Bessel bereits früher mitgeteilten Resultate enthält. An die Darstellung der elliptischen Funktionen als Quotienten zweier Fourierschen Reihen schließt sich die Entwicklung von $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ nach den Potenzen von $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, deren Exponenten die Quadrate der natürlichen Zahlen sind, ein Ausdruck, von dem Jacobi später sagt: „me paraît être l'un des résultats les plus brillants de toute la théorie" — „formule due à M. Jacobi", sagt Abel bei der Zitierung dieser Arbeit, „où ce géomètre présente plusieurs autres très remarquables et très élégantes". Es folgen ferner in dieser kurzen, aber fundamentalen Note Jacobis, welche nur die Resultate seiner Untersuchungen bringen

sollte, die für die weitere Entwicklung der Algebra und Zahlentheorie so wichtig gewordene Darstellung von $\sqrt{x}$ als Quotient von zwei nach quadratischen Exponenten von q und $q^{\frac{1}{4}}$ fortschreitenden Reihen, von denen Jacobi später in einem Briefe an Legendre sagt: „toutes les racines des équations modulaires se trouvent par là développées dans des séries d'une élégance et d'une convergence sans exemple dans l'analyse", und weiter das auch von Abel nur in etwas anderer Form im zweiten Teil der recherches veröffentlichte Resultat, daß für einen Primzahlgrad der Transformation einem gegebenen Modul immer $n+1$ andere transformierte Moduln entsprechen, die man erhält, wenn man q durch q^n, $q^{\frac{1}{n}}$, $\alpha q^{\frac{1}{n}}$, $\ldots$ $\alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}}$, worin $\alpha^n = 1$, ersetzt, zu welchem Theorem Jacobi später in einem Briefe an Legendre die Bemerkung hinzufügt: „M. Abel verra donc que les transformations imaginaires ne m'étaient pas échappées." Jacobi stellt endlich noch die schon in dem Briefe an Legendre erwähnte Differentialgleichung 3. Ordnung für den transformierten Integralmodul auf und hebt die Fundamentaleigenschaften der Modulargleichungen bei Anwendung zweier linearer Transformationen auf den primären und transformirten Modul hervor. Das von Abel in seinen „Aufgaben und Lehrsätze" ausgesprochene Theorem gibt ihm Gelegenheit zu einigen Bemerkungen über die komplexe Multiplikation, die er mit den Worten begleitet: „tout cela découle immédiatement des principes établis par M. Abel."

Zu gleicher Zeit theilt Jacobi am 12. April Legendre die in dieser Note besprochenen Entwicklungsformen der sin am, des Integralmoduls und der Periode K mit und weist darauf hin, daß der Zähler und Nenner seiner sin am den mathematischen Physikern Frankreichs bereits bekannte Funktionen sind. „Quant à l'importance de ces formules, vous la sentirez mieux que je ne pourrais le dire. Aussi elles ne seront pas sans intérêt pour les célèbres géomètres, qui s'occupent

du mouvement de la chaleur; les numérateurs et les dénominateurs des fractions, par lesquelles on a exprimé les fonctions trigonométriques de l'amplitude étant souvent rencontrés dans ladite question.“ Indem er nun aber auf die Klagen Legendres über die Undurchsichtigkeit der leitenden Ideen in seinen ersten Transformationsarbeiten näher eingeht, gesteht er zunächst zu, daß Legendre mit seiner Vermutung recht hatte, daß er anfänglich nur durch Induktion zu seinen allgemeinen Transformationsausdrücken gelangt sei.

„Vous auriez voulu, que j'eusse donné la chaîne des idées, qui m'a conduit à mes théorèmes. Cependant la route que j'ai suivie n'est pas susceptible de rigeur géométrique. La chose étant trouvée, on pourra y substituer une autre, sur laquelle on aurait pu y parvenir rigoureusement. Ce n'est que pour vous, Monsieur, que l'ajoute le suivant: La première chose, que j'avais trouvée (dans le mars 1827) c'était l'équation $\frac{T}{M} = V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}$; de là je reconnus, que, pour un nombre n quelconque, la transformation était un problème d'analyse algébrique déterminé, le nombre des constantes arbitraires égalant toujours celui des conditions. Au moyen des coefficients indéterminés, je formai les transformations relatives aux nombres 3 et 5. L'équation du quatrième degré à laquelle me mena la première ayant presque la même forme que celle qui sert à la trisection, j'y soupçonnais quelque rapport. Par un tâtonnement heureux, je remarquais dans ces deux cas l'autre transformation complémentaire pour la multiplication. Là j'écrivis ma première lettre à Mr. Schumacher, la méthode étant générale et vérifiée par des exemples. Depuis, examinant plus de proche les deux substitutions $z = \frac{ay + by^3}{1 + cy^2}$, $y = \frac{a'x + b'x^3}{1 + c'x^2}$ sous la forme présentée dans ma première lettre, je vis qu'étant mis $x = \sin \operatorname{am} \frac{2K}{3}$, z devra s'évanouir, et comme,

dans ladite forme, $\frac{b}{a}$ était positif, j'en conclus que y devra s'évanouir aussi. De cette manière je trouvai par induction la résolution en facteurs, laquelle étant confirmée par des exemples, je donnai le théorème général dans ma seconde lettre à Mr. Schumacher. Ensuite, ayant remarqué l'équation $\sin\operatorname{am}(i\xi, \varkappa) = i \operatorname{tg}\operatorname{am}(\xi, \varkappa')$, j'en tirai la transformation de $\varkappa'$ en λ'. J'avais donc deux transformations différentes, l'une de $\varkappa$ dans un module plus petit λ, l'autre de $\varkappa'$ dans un module plus grand λ'. De là, je fis la conjecture, qu'en échangeant entre eux $\varkappa'$ et λ, $\varkappa$ et λ' on aurait l'expression analytique de la transformation complémentaire. Tout étant confirmé par des exemples, j'eux la hardiesse de vous adresser une première lettre qui a été accueillie de vous avec tant de candeur. Les démonstrations n'ont été trouvées que ci après."

Dieser durch Form und Inhalt so hochinteressante Brief, aus dem besonders hervorzuheben, daß, wenn auch Jacobi in einem früheren Schreiben an Legendre in betreff der Auffindung der Relation $\sin\operatorname{am}(i\xi, \varkappa) = i \operatorname{tg}\operatorname{am}(\xi, \varkappa')$ Abel die Priorität der Veröffentlichung zugestanden, er doch selbständig und zwar vor Abfassung seiner vom 18. November 1827 datierten Arbeit „demonstratio theorematis etc.", wahrscheinlich im Juli dieses Jahres, diese Beziehung gefunden, kreuzte sich mit einem Briefe von Legendre vom 14. April 1828, in welchem derselbe erwähnt, daß er von Schumacher, und dieser von Bessel, die Mitteilung erhalten habe, Jacobi sei mit der Abfassung eines großen Memoires über die Theorie der elliptischen Funktionen beschäftigt, und hinzufügt: „mais je vous engage de ne pas trop tarder à publier les parties essentielles de ce travail ... Si Mr. Gauss était tombé sur de pareilles découvertes, qui surpassent à mes yeux, tout ce qui a été fait jusqu'ici en analyse, bien sûrement il se serait empressé de les publier" — und doch hatte Gauss so viele dieser Entdeckungen schon längst gemacht, ohne je etwas darüber zu veröffentlichen!

Noch vor Beginn des Sommersemesters, für das er, weil mit Arbeiten überhäuft, nur eine öffentliche Vorlesung über Arithmetik angekündigt hatte, sandte Jacobi eine vom 24. April 1828 datierte Arbeit „Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre carrés“ an Crelle, welche eine zahlentheoretische Anwendung der kurz zuvor gefundenen Reihenentwicklungen nach Potenzen der Größe q ohne Beweis mit den Worten ankündigt:

„Je tire de la théorie des fonctions elliptiques le théorème suivant: Soit n un nombre impair quelconque, si l'on peut trouver de m manières quatre nombres impairs a, b, c, d tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4n$, en ayant attention de compter une même solution autant de fois que les quatres carrés peuvent être permutés entre eux, m sera égal à la somme des facteurs du nombre n ... Ce théorème remarquable parait être assez difficile à démontrer par les méthodes connues de la théorie des nombres. La démonstration fournie par la théorie des fonctions elliptiques est entièrement analytique.“

Am 7. Mai 1828 schreibt Schumacher an Gauss:

„Ich habe hier einen Brief von Jacobi erhalten, von dessen Inhalt ich Sie doch in Kenntniß setzen muß, um zu erfahren, ob das, was ich ihm zu antworten denke, Ihren Beifall hat. Er schreibt, daß mein Brief aus Altona, der während Ihrer Anwesenheit und, wie ich glaube, mit Ihrer Approbation geschrieben ward, folgende Stelle enthalte: ‘Gauss hat schon im Jahre 1808 die 3theilung, 5theilung und 7theilung entwickelt und dabei die neuen sich darauf beziehenden Modulscalen gefunden.’ Nun verlangt er zu wissen, was ich mit dem Worte ‘entwickeln’ verstanden habe? Ob es heißen solle, daß Sie die Gleichungen vom 9ten, 25ten und 49ten Grade, wovon dieses abhängt, wirklich aufgelöst und die Wurzeln algebraisch dargestellt hätten? In diesem Falle, setzt er hinzu, müßten Sie im Besitz von Hülfsmitteln und Methoden sein, und Schwierigkeiten überwunden haben, wogegen alles, was er gethan habe, Kinder-

spiel sei, indem die ganze allgemeine analytische Theorie, wie glänzend sie auch sein möge, nicht so viel Schwierigkeiten darbiete als die Entwicklung (er hat es unterstrichen) selbst des einfachsten Falles, der Dreitheilung u. s. w. Ich denke nun, sobald ich Ihre Billigung weiß, ihm zu antworten: ich habe damals ihm Ihre Äußerungen, so wie ich sie von Ihnen verstanden zu haben glaubte, mitgetheilt, könne aber, da ich in diesen Sachen fremd sei, nicht verbürgen, ob ich sie wörtlich oder nach dem diesen Äußerungen von mir untergelegten Sinne übersandt habe. Soviel erinnere ich mich bestimmt, daß Sie mir gesagt hätten, diese Untersuchungen seien nur specielle Fälle einer weit allgemeineren Theorie. Er würde also in jeder Hinsicht am besten thun, bei Ihnen selbst Auflösung seiner Zweifel zu suchen. Es ist wie es mir scheint ganz unnatürlich, daß ich in einer mir gänzlich fremden Sache ihm als Mittelperson dienen soll, wo es weit sicherer ist und vor allen Mißverständnissen schützt, wenn er gradezu an Sie schreibt und um Belehrung bittet."

Gauss antwortet Schumacher am 30. Mai 1828:

„Ich kann Ihnen nicht widersprechen, wenn Sie es unnatürlich finden, daß Herr J. Sie mit Fragen, wie die mir von Ihnen aus Copenhagen gemeldete, behelligt, noch weniger es mißbilligen, wenn Sie ihm das Angezeigte antworten. Die ausdrückliche Aufforderung, sich deßhalb an mich zu wenden, könnte vielleicht auch weg — und dies ihm selbst überlassen bleiben, falls Sie es nicht dazu nothwendig finden, für die Zukunft ähnliches bei ihm zu coupiren. Schreibt er deßhalb an mich, so werde ich ihm Rede stehen, obwohl seine Frage unklar ausgedrückt, und meines Erachtens nach dem Erscheinen von Abel's Arbeit (die, Ihnen gesagt, mir von meinen eignen Untersuchungen wohl $\frac{1}{3}$ wegenommen hat, und mit diesem zum Theil selbst bis auf die gewählten bezeichnenden Buchstaben übereinstimmt) sehr müßig ist."

Was Jacobi unter der Entwicklung der Lösungen der

Teilungsgleichungen verstanden, erhellt aus einem späteren Briefe an Legendre.

Inzwischen war das Heft des Crelleschen Journals mit dem zweiten Teile der recherches nach Königsberg gelangt. „Was sagen Sie zu Abels Abhandlung?" schreibt der über den Gang der Untersuchungen Jacobis genau unterrichtete Bessel an diesen am 21. Juni 1828. „Hat er mit Ihrem Kalbe gepflügt oder mit eignen kräftigen Stieren? Auf keinen Fall kann Ihnen die Priorität Ihrer Entdeckung genommen werden ... Legendre thut Gauss Unrecht, aber Gauss hat eine Manier, welche ich auch nicht entschuldige. Ich glaube, Sie werden wohl thun, sich vor dieser Ansicht von Gauss zu hüten, denn sie ist sicher die unrechte."

Der beständige persönliche Verkehr und wissenschaftliche Briefwechsel von Haus zu Haus zwischen Bessel und Jacobi führte ununterbrochen zu neuen und interessanten Ergebnissen auf den verschiedensten mathematischen Gebieten, zu denen Jacobi durch Fragen von Bessel geleitet wird, und die im Sommer 1828 sich meist auf die Eigenschaften und Entwicklungen der Besselschen Funktionen bezogen.

Während dieser Zeit nun entwickelten sich in Berlin die Verhältnisse des Crelleschen Journals in eigentümlicher Weise, und wenn auch von denselben wesentlich nur Abel betroffen wurde, so müssen sie doch an dieser Stelle eine Erwähnung finden, weil auch Jacobis Name vielfach damit in Verbindung gebracht worden ist. Nachdem am 20. April 1827 einige das Journal betreffende Wünsche Crelles, welche rein formaler Natur waren, von dem Unterrichtsminister erfüllt worden, wandte sich derselbe zuerst im November 1827, dann wiederum in den ersten Monaten 1828 wiederholt mit dem Ansuchen an das Ministerium, ihn wegen einer unheilbaren Augenkrankheit von seinem Amte zu entbinden; zugleich fügt er am 14. Mai 1828 die Bitte hinzu, das Gedeihen des Journals auch ferner zu fördern, und kommt wiederum auf eine etwaige Berufung Abels zurück, auch zu seiner eignen

Unterstützung bei der Direktion des Journals; er rühmt dessen Arbeiten über die Theorie der Gleichungen und der elliptischen Funktionen: „ein junger Norweger und vielleicht eines der ersten jetzt existirenden Talente für die höhere Mathematik, der leider nur in seinem Vaterlande fast übersehen wird und gegen ungünstige Verhältnisse kämpft“, während er zugleich von Jacobi lobend anerkennt, daß durch denselben die Theorie der elliptischen Funktionen nach Legendres eignem Geständnis weiter gebracht worden sei.

„Das äußerst günstige Urtheil“, lautet die entgegenkommende Antwort des Ministers, „welches Sie in Ihrem Schreiben über das ausgezeichnete Talent des Herrn Abel für die höhere Mathematik und über seine bisherigen Leistungen ausgesprochen haben, veranlaßt mich zu dem Wunsche, diesen jungen Gelehrten dem diesseitigen Staatsdienste zuführen zu können. Da indessen für den Augenblick keine Gelegenheit vorhanden ist, ihm eine bestimmte Stelle anzutragen, so würden Sie mich verpflichten, wenn Sie es gefälligst übernehmen wollten zu erforschen, ob er geneigt sein möchte, gegen Zusicherung einer angemessenen jährlichen Remuneration als Privatdocent bei der hiesigen Universität in Wirksamkeit zu treten“, und Crelle nimmt am 21. Juni dankbar den Auftrag an: „Der Erwerb dieses Mannes für den diesseitigen Staatsdienst nach Ew. Exc. gnädiger Absicht würde gewiß ein Gewinn für den Dienst und die Wissenschaft sein, und ich freue mich darauf, daß der Staat und die Wissenschaft Ew. Exc. diese neue Acquisition zu verdanken haben werden. Ich habe sogleich durch einen Brief die Neigung des Herrn Abel, als Privatdozent bei der hiesigen Universität sich hierher zu begeben, zu erforschen gesucht, ohne dabei, wie ich thun zu müssen glaubte, meine Autorisation zu der Frage für jetzt näher zu bezeichnen. Ich werde die Ehre haben, Ew. Exc. von der Antwort Anzeige zu machen.“

In der am 11. Juli an Abel gerichteten Anfrage Crelles

deutet dieser ihm zugleich an, daß plötzlich ein anderer Kandidat für die in Aussicht genommene Stelle an der Universität seine Rechte geltend mache, und Abel schreibt in hohem Grade bestürzt am 21. Juli 1828 an Madame Hansteen:

„Hélas, par ce mot fatal commence une lettre de Crelle que j'ai reçue hier, datée du 11. juillet, et je dois avouer hélas, que la lettre m'a beaucoup abattu. Il n'en sortira rien ... Un autre s'est présenté, comme tombé du ciel, qui a fait valoir ses droits, et qu'il faut inévitablement caser avant que l'on pense à moi. Crelle n'écrit pas, qui est cet autre, et je ne connais personne d'un tel calibre ... Aussi dit-il que l'on ne peut me donner aucune réponse décisive avant le mois d'octobre de cette année" — Abel hatte recht, wenn er in seinem Gegenkandidaten eine minderbedeutende Persönlichkeit vermutete.

In diesem Stadium verblieb die Angelegenheit zunächst bis zum Winter dieses Jahres.

Eine im Crelleschen Journal gestellte Aufgabe: „Kann $\alpha^{\mu-1} - 1$, wenn μ eine Primzahl und α eine ganze Zahl kleiner als μ und größer als 1 ist, durch μ^2 teilbar sein", erregte Jacobis Interesse, aber die sich immer weiter ausdehnenden Arbeiten über die Theorie der elliptischen Funktionen ließen ihm nicht die hinreichende Zeit, das Problem zu erledigen, und er ließ nur hierher gehörige vorbereitende Rechnungen durch einen seiner Schüler ausführen, welcher die Kongruenz $x^{\mu-1} \equiv 1 \mod. \mu^2$ für die Primzahlen bis 37 nach allen ihren Wurzeln auflöste, wobei sich z. B. $3^{10} \equiv 1 \mod. 11^2$ ergab, u. a. m.

Wir stehen jetzt mitten in der Zeit des wunderbaren Wettstreites der beiden großen Mathematiker, wir staunen das gegenseitige Ineinandergreifen und sich Ergänzen ihrer Untersuchungen an, das sich Stützen des einen auf die Resultate und Methoden des andern; „je puis me reposer", schreibt Legendre einige Monate später an Jacobi, „sur le zèle de deux athlètes infatigables tels que vous et M. Abel ... je me

félicite néanmoins d'avoir vécu assez longtemps pour être témoin de ces luttes généreuses entre deux jeunes athlètes également vigoureux, qui font tourner leurs efforts au profit de la science dont ils reculent de plus en plus les limites..."

Die Legendre von Jacobi gegebene Erläuterung seiner Transformationssätze beantwortet dieser dankend schon am 11. Mai mit einigen Bemerkungen über das Divisionsproblem, fügt aber mit Bezug auf eine im Briefe Jacobis enthaltene Äußerung die Worte hinzu:

„pour établir le princip de votre démonstration il faut, dites vous, recourir aux formules analytiques concernant la multiplication, données pour la première fois par M. Abel. Cet aveu qui prouve votre candeur, qualité qui s'accorde si bien avec le vrai talent, me fait quelque peine; car tout en rendant justice au beau travail de M. Abel, et le mettant cependant fort au-dessous de vos découvertes, je voudrais, que la gloire de celles-ci, c'est-à-dire de leurs démonstrations, vous appartînt tout entière",

eine Bemerkung, welche Jacobi in seiner Antwort zu der Äußerung veranlaßt: „ma dernière lettre a été écrite un peu à la hâte; sans cela je n'aurais pas cru que l'on doit supposer connues les formules de multiplication pour la démonstration du théorème complémentaire. Aussi il avait été trouvé et communiqué à vous sans la connaissance de celles-ci."

Ohne noch die Antwort Jacobis abgewartet zu haben, schreibt ihm Legendre, in feiner und geistvoller Weise auf das früher gemachte Geständnis Jacobis von der ursprünglichen Induktion seiner Transformationssätze näher eingehend, am 16. Juni: „Je n'ai pu que toucher très-légèrement dans ma dernière lettre ce que j'avais à vous dire sur la communication pleine de franchise, que vous m'avez faite de la filiation des idées, qui vous ont conduit à vos belles découvertes sur les fonctions elliptiques, je vois que nous avons couru tous deux des dangers, vous en annonçant

des découvertes qui n'étaient pas encore revêtues du sceau d'une démonstration rigoureuse et moi en leur donnant publiquement et sans restriction mon approbation tout entière. Nous n'avons pas à nous répentir ni l'un ni l'autre de ce que nous avons fait. D'ailleurs nous avions chacun nos raisons de nous conduire ainsi; je ne dirai rien des vôtres, quant à moi je voyais très-clairement que des résultats tels que ceux que vous aviez obtenus, ne pouvaient être l'effet ni du hazard ni d'une induction trompeuse, mais bien d'une théorie profonde et appuyée sur la nature des choses . . . . ."

Inzwischen war außer dem zweiten Teil der über alle bisherigen Resultate weit hinausgehenden recherches noch eine vom 27. Mai datierte Note von Abel im Juni 1828 erschienen. „Vous y auriez vu", schreibt Jacobi einige Wochen später an Legendre, „que M. Abel a trouvé de son coté la théorie générale de la transformation, dans la publication de laquelle je l'ai prévenu de six mois. Le second mémoire, inséré dans le recueil de M. Schumacher No. 138, contient une déduction rigoureuse des théorèmes de transformation, dont le défaut s'était fait sentir dans mes annonces sur le même objet. Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux." Und einige Monate nachher fügt er hinzu: „. . . . que le mérite principal d'Abel dans la théorie de la transformation consiste dans sa démonstration, que nos formules embrassent toutes les substitutions algébriques possibles, ce qui donne un haut degré de perfection à cette théorie."

Alles dies treibt Jacobi zu immer größerer Eile und unaufhaltsamer Arbeit an, denn er fürchtet, daß Abel ihm überall zuvorkomme. Am 21. Juli sendet er eine neue Arbeit: „Suite des notices sur les fonctions elliptiques", an Crelle; hier führt Jacobi die Θ- und H-Funktionen, die späteren ϑ_0 und ϑ_1, als selbständige Transzendenten ein, welche erst den elliptischen Funktionen ihre Entstehung

geben sollen — wiederum gleichzeitig mit Abel, welcher genau dem von Jacobi in dieser Arbeit entwickelten Prinzipe gemäß die Eigenschaften dieser neuen Transzendenten gesondert von der Umkehrungsfunktion der elliptischen Integrale behandeln wollte, der aber, da er nicht mehr zur Ausarbeitung des zweiten Teiles seines „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques“ kam, die Priorität der Durchführung dieses Gedankens Jacobi überlassen mußte. Es folgen in dieser Note die schönen und fruchtbaren Sätze, nach welchen die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung sich durch ϑ-Funktionen ausdrücken lassen, in deren Argument das Integral erster Gattung linear eintritt, und es wird auf die Transformation der ϑ-Functionen hingewiesen, aus der die Transformationsformeln der elliptischen Funktionen unmittelbar entspringen: „Les resultats dont je viens de donner ici une exposition rapide, font partie de ceux qu'on trouvera dans la seconde partie de mon ouvrage sur les fonctions elliptiques. La première partie de cet ouvrage paraîtra incessament.“ Jacobi geht nun weiter zur Entwicklung der partiellen Differentialgleichung der ϑ-Funktionen als Funktion des Arguments und des ϑ-Moduls über; die Herstellung des eleganten Ausdruckes für den Multiplikator der Transformation $M = \frac{n(\varkappa - \varkappa^3)}{\lambda - \lambda^3}\frac{d\lambda}{d\varkappa}$ führt ihn auf die Definition der Multiplikatorgleichungen und auf jene merkwürdige Eigenschaft der Lösungen derselben, wonach man für einen primzahligen Transformationsgrad die Quadratwurzeln aus den $n+1$ Multiplikatoren als lineare Funktionen von $\frac{1}{2}(n+1)$ mit n. Einheitswurzeln multiplizierten Größen darstellen und somit die Hälfte der Werte von $\sqrt{M}$ linear mit Hilfe der andern Hälfte ausdrücken kann: „cela donne le théorème énoncé, un des plus importants dans la théorie algébrique de la transformation et de la division des fonctions elliptiques.“

Nach Veröffentlichung dieser kurzen, in ihrem Inhalte

so überreichen Arbeit beginnen sich die Wege, welche die beiden großen Mathematiker in ihren Untersuchungen eingeschlagen, immer mehr und mehr zu trennen, begründet sowohl in der Natur ihrer Anlagen und in den verschiedenartigen Ausgangspunkten ihrer Arbeiten, wohl aber auch veranlaßt durch das Streben, ihre Untersuchungen nicht gegenseitig zu kreuzen.

Am 9. September 1828 kündigt Jacobi brieflich Legendre das bevorstehende Erscheinen seines klassischen Werkes an: „Mes recherches seront rassemblées dans un petit ouvrage d'environ 200 pages in 4⁰ qui sera imprimé à part et dont l'impression vient d'être commencée. Il aura pour titre: Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum ... Cependant la fin de mon ouvrage ne doit pas être celle de mes recherches ...“ In diesem Briefe gibt er weiter Legendre einzelne Erläuterungen zu der eben veröffentlichten Arbeit, hebt in betreff der dort gegebenen Reduktionsformel des Integrales 3. Gattung mit Hilfe der ϑ-Funktionen eine charakteristische Eigenschaft ausdrücklich hervor: „d'ailleurs elle montre que les fonctions elliptiques de troisième espèce dans lesquelles entrent trois variables se ramènent à d'autres transcendantes qui n'en ont que deux, découverte qui vous intéressera beaucoup“, und macht ihn noch besonders auf die in seiner ersten Note gefundene Entwicklung von $\sqrt{\varkappa}$ als Quotienten von zwei nach quadratischen Exponenten von q und $q^{\frac{1}{4}}$ fortschreitenden Reihen aufmerksam: „Toutes les racines des équations modulaires se trouvent par là développées dans des séries d'une élégance et d'une convergence sans exemple dans l'analyse“; „je les regarde“, antwortet ihm Legendre, „comme un nouveau titre que vous avez acquis à l'estime des savants et il en est de même de vos nouvelles fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$.“

Inzwischen war das vom 12. August 1828 datierte erste Supplement des Legendreschen traité erschienen, nachdem

dieser durch seinen Briefwechsel mit Jacobi sich die Prinzipien der Transformationstheorie zu eigen gemacht und einen klaren Einblick in den weiteren Ausbau der Theorie der elliptischen Functionen gewonnen hatte. „Après m'être occupé pendant un grand nombre d'années de la théorie des fonctions elliptiques, dont l'immortel Euler avait posé les fondements, j'ai cru devoir rassembler les résultats de ce long travail dans un traité, qui a été rendu public au mois de janvier 1827. Jusque là les géomètres n'avaient pris presque aucune part à ce genre de recherches; mais à peine mon ouvrage avait-il vu le jour, à peine son titre pouvait-il être connu des savants étrangers, que j'appris avec autant d'étonnement que de satisfaction, que deux jeunes géomètres, M. M. Jacobi (C.-G.-J.) de Königsberg et Abel de Christiania avaient réussi, par leurs travaux particuliers, à perfectionner considérablement la théorie des fonctions elliptiques dans ses points les plus élevés. .... La science a pris dans leurs mains un tel essor, qu'il est à croire, que les résultats qu'ils ont déjà obtenus seront suivis d'un grand nombre d'autres non moins intéressants. ...“

Trotz der höchsten Bewunderung der Arbeiten Abels enthält das erste Supplement doch wesentlich nur eine Darstellung der Untersuchungen Jacobis; „votre manière d'écrire“, sagt er bei anderer Gelegenheit, „est plus clair pour moi que celle de M. Abel, qui en général ne me paraît pas suffisamment développée et laisse au lecteur beaucoup de difficultés à résoudre.“ Legendre setzt hierin die beiden ersten Transformationssätze von Jacobi klar und präzise auseinander, indem er das zweite Theorem direkt aus dem ersten durch eine Beweisart herleitet, die Jacobi selbst später aufgenommen, und entwickelt dann nach dessen Methoden die verschiedenen Moduinketten. „Lorsque deux fonctions de cette nature peuvent être exprimées l'une par l'autre, on peut supposer qu'elles appartiennent à la même échelle, et alors il existe entre leurs modules une équation très

simple, quoique sous forme transcendante, laquelle tient lieu d'une équation algébrique, qui est en général d'une recherche très difficile. Cette équation transcendante peut-être regardée comme l'un des théorèmes les plus beaux et les plus féconds de cette branche d'analyse."

Während sich nun Abel der Untersuchung der Integrale algebraischer Funktionen und der Frage der Reduktion derselben auf niedere Transzendenten zuwendet, sucht Jacobi die Eigenschaften der Umkehrungsfunktionen der elliptischen Integrale tiefer zu ergründen und wird dadurch zu Untersuchungen von sehr allgemeiner und rein funktionentheoretischer Natur geführt; „les fonctions elliptiques", sagt er in der letzten oben erwähnten Arbeit, „diffèrent essentiellement des transcendantes ordinaires. Elles ont une manière d'être pour ainsi dire absolue. Leur caractère principale est d'embrasser tout ce qu'il y a de périodique dans l'analyse. En effet, les fonctions trigonométriques ayant une période reelle, les exponentielle une période imaginaire, les fonctions elliptiques embrassent les deux cas .... D'ailleurs on démontre aisément, qu'une fonction analytique ne saurait avoir plus de deux périodes, l'une réelle et l'autre imaginaire ou l'une et l'autre imaginaires".

Mit der Ausarbeitung seiner Fundamenta beschäftigt, veröffentlichte er zunächst nur noch unter dem Titel „Suite des notices sur les fonctions elliptiques" eine vom 3. Oktober 1828 datierte Arbeit, in welcher er darauf hinweist, daß die früher von ihm gemachte wichtige Entdeckung von der Zurückführung der Integrale 3. Gattung auf die von nur zwei Größen abhängige Transzendente ϑ die Theorie der elliptischen Integrale auf den Eigenschaften dieser Fundamentaltranszendenten zu begründen gestatte; er leitet weiter durch Benutzung der linearen Transformationsformeln der ϑ-Funktionen Beziehungen zwischen den elliptischen Transzendenten mit verschiedenen Moduln her, und geht endlich noch auf die Koeffizientenbestimmung der allgemeinen

Transformations- und Multiplikationsformeln des elliptischen Integrals erster Gattung näher ein: „je suis parvenu à résoudre un problème, dont la difficulté avait éludé longtemps tous mes efforts, savoir de trouver l'expression générale et algébrique des formules de multiplication ..... Or, $z = \frac{U}{V}$ étant une substitution rationelle quelconque qui sert ou à la transformation ou à la multiplication des fonctions elliptiques de première espèce, je suis parvenu à sommer par parties le numérateur et le dénominateur de la substitution, à faire et à définir l'un et l'autre au moyen d'une équation à différences partielles entre x et $\varkappa$. Dans le cas de la multiplication on tire de cette équation les expressions générales de A', A'', A''', ... On trouve très facilement chaque terme $A^{(m)}$ par les deux termes $A^{(m-2)}$, $A^{(m-4)}$, qui le précèdent."

Am 15. Oktober übersendet Legendre Jacobi das erste Supplement seines traité zugleich mit einem Schreiben voll des Lobes und der Bewunderung der Jacobischen Entdeckungen, aber auch immer noch voll von Zweifeln und Unmut darüber, daß Gauss schon viele von diesen lange Zeit vor Jacobi gemacht zu haben behauptet. Mit diesem Briefe tritt nun für die letzten beiden Monate des Jahres 1828 eine Unterbrechung in der Korrespondenz mit Legendre ein, da Jacobi mit Hast an der Fertigstellung seiner Fundamenta arbeitete, und Legendre ein zweites Supplement zu seinem traité zu verfassen begonnen hatte, in welches er die weiteren Untersuchungen von Abel und Jacobi aufnehmen wollte, und dessen Bearbeitung ihm eine Veranlassung bot, auch mit Abel in Korrespondenz zu treten. Auf die Mitteilung Abels, daß er im Begriff sei, ein großes Mémoire in zwei Teilen über die Theorie der elliptischen Funktionen abzufassen, welche nunmehr unter einem ganz allgemeinen Gesichtspunkte betrachtet werden solle, antwortet Legendre am 25. Oktober: „mais ce qu'il

y a de sur, c'est que je n'ai aucune idée des moyens que vous avez pu employer pour vaincre de pareilles difficultés. Quelle tête que celle d'un jeune Norvégien .... Peut-être n'êtes vous pas à portée maintenant de publier un semblable ouvrage — wie Jacobi — qui contienne l'ensemble de vos découvertes; il nous intéresserait beaucoup, Monsieur ...", worauf ihm aber Abel am 25. November erwidern mußte: „Les circonstances ne me permettent point de publier un ouvrage de quelque étendue que j'ai composé depuis peu, car ici je ne trouverai personne qui fera l'imprimer à ses frais." So war Abel genötigt, den ersten Teil seiner bahnbrechenden Arbeit unter dem Titel „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques" Crelle zur Veröffentlichung im Journal zu übersenden.

Nun war auch die Zeit herangekommen, für die Crelle im Frühjahr Abel die Entscheidung seiner Angelegenheit in Berlin in Aussicht gestellt hatte. Am 28. Dezember 1828 schreibt Crelle an den Minister: „Ich habe zu meinem Vergnügen vernommen, daß Herr Abel völlig geneigt und bereit ist, als Privatdocent bei der hiesigen Universität sich in den diesseitigen Dienst zu begeben. Er hat gegen mich vertraulich geäußert, daß er zwar durchaus keine großen Ansprüche mache, jedoch, weil er ganz ohne Vermögen, und durch seine Studien selbst in einige Schulden gekommen sei, auch noch zum Theil für Geschwister zu sorgen habe (er ist einer der Söhne eines unbemittelten Pfarrers), wünschen müsse, im Anfange wenigstens nicht unter 500, und womöglich 600 Thaler jährlich, auch außerdem einiges Reisegeld, etwa im Betrage eines vierteljährlichen Gehaltes, zu erhalten. So ausgestattet würde er sehr gern seinen dortigen Aufenthalt, wo seine Subsistenz nur erst für einige Zeit, durch die Anstellung als Privatdocent bei der dortigen Universität und durch das Vicariat für Herrn Professor Hansteen während dessen Reise nach Sibirien, keineswegs aber für die Folge gesichert sei, alsbald verlassen und vor-

zugsweise gern hierher kommen, weil es ihm bei seinem früheren längeren Aufenthalte hieselbst und auf einer Reise, die er in den Jahren 1825, 26 und 27 durch Frankreich, Deutschland und Italien gemacht hat, nicht entgangen sei, daß jetzt von dem erlauchten Preuß. Gouvernement die Wissenschaften mehr und kräftiger beschützt und befördert werden als irgendwo. Die Gelegenheit und die Absicht, Herrn Abel für die diesseitigen Dienste zu gewinnen, ist also vorhanden, und die Wissenschaft wird Ew. Exc. durch die Heranziehung dieses ausgezeichneten Talentes einen neuen Gewinn verdanken. Ich habe nur noch den Wunsch hinzuzufügen, daß Ew. Exc. geruhen möchten, die Erwerbung des Herrn Abel möglichst bald in Ausführung bringen zu lassen, weil es sonst möglich wäre, daß man ihn, jetzt aufmerksam gemacht auf sein großes Talent, anderswo zu fixiren suchte. In der That soll, wie ich zufällig vernommen, von einem Plane die Rede sein, ihn für Copenhagen zu gewinnen, wodurch er also alsdann vielleicht dem diesseitigen Dienste entzogen werden könnte. Ich freue mich zugleich noch ein neues gewichtiges Zeugniß der ausgezeichneten Qualification des Herrn Abel vorlegen zu können. Herr Legendre in Paris nämlich hat sich in einem, durch die Arbeiten der Herrn Jacobi und Abel veranlaßten Schreiben an Herrn Alex. v. Humboldt auch über Herrn Abel auf eine Weise geäußert, die diesem ebenso sehr zum Ruhme gereicht, als dem ehrwürdigen Veteran, der das Schreiben verfaßte, zur Ehre . . . Das Schreiben ist beigelegt. Die Herren Dirichlet, Abel, Jacobi und Steiner, von denen der erste und die beiden letzten schon im Preußischen Staate sich befinden, bilden in der That eine Vereinigung von jungen Mathematikern, aus welcher dieser Wissenschaft die schönsten Hoffnungen aufblühen und vielleicht einst Geometer vom ersten Range hervorgehen können; denn so jung sie sind, verdankt ihnen schon die Wissenschaft wesentliche Erweiterungen . . . .“

In dem vom November 1828 datierten Briefe an Humboldt sagt Legendre: „Depuis que j'ai exprimé mon opinion sur les premiers travaux de M. Jacobi, qui étaient parvenus à ma connaissance, ses titres à mon estime et je puis dire, à mon admiration, se sont considérablement multipliés, soit par les morceaux qu'il a publiés dans le journal de M. Crelle et dans celui de M. Schumacher, soit par les communications qu'il m'a faites dans des lettres particulières. C'est un génie, fait pour les sciences, qui unit l'analyse la plus difficile avec une adresse inconcevable et qui en tire les résultats les plus beaux et les plus attendus. S'il montre une pareille sagacité dans des recherches d'un autre genre, il deviendra sans aucun doute un des savants les plus distingués de l'Europe, et il occupe déja parmi eux une place fort honorable. Mais ce que je dis de M. Jacobi ne dois je pas, pour être juste, le dire aussi de son digne émule Mr. Abel? ...... dans les sciences le concours de divers savants semble nécessaire, pour rendre les idées fécondes; la théorie de la perturbation aurait fait moins de progrès si elle n'avait été traitée presque en même temps par Lagrange et Laplace, et on peut dire, qu'ils se doivent mutuellement une partie de leurs succès .... Vous voudrez peut-être savoir, Monsieur, le quel de nos deux jeunes savans je préfère à l'autre. Ils sont tous deux aussi avancés de mon estime. M. Jacobi a publié le premier ses deux théorèmes généraux de transformation que je regarde comme une grande découverte analytique et que j'ai insérés dans un premier supplément de mon traité. M. Abel a déduit ces mêmes théorèmes des methodes, qu'il avait publiées dans le journal de M. Crelle, et la démonstration qu'il en a donnée dans le journal cité de M. Schumacher est singulièrement remarquable par la sagacité que l'auteur y déplie. M. Jacobi lui-même rend justice dans une lettre, qu'il m'a adressée ... L'esprit d'invention se montre également dans les deux jeunes savants.

Mr. Jacobi a publié le premier ses principaux résultats, mais M. Abel semble avoir plus de profondeur dans les vues générales, qui ont dirigé ses recherches. Ils sont dignes tous deux de la considération des savants et de leur appui bienveillant.“

Die tatsächliche Berufung Abels war jedoch nicht leicht zu bewerkstelligen und blieb zunächst im Ministerium Gegenstand längerer Verhandlungen.

Jacobi, dessen Zeit die Vorlesung über die Theorie der Kegelschnitte wenig in Anspruch nahm, war jetzt vollauf mit der Ausarbeitung seiner Fundamenta beschäftigt, und selbst sein wissenschaftlicher Verkehr mit Bessel erlitt dadurch eine kurze Unterbrechung; dieser schreibt am 2. Januar 1829 an Gauss: „Jacobi arbeitet immer an den elliptischen Transcendenten; so wie früher die Multiplication, hat er jetzt auch die Division derselben gefunden. Er kommt in große Verlegenheit, indem er etwas darüber drucken läßt, und der Stoff sich fortwährend vermehrt. Da Sie mir geschrieben haben, daß Sie vorläufig nichts bekannt machen werden, so bedaure ich doppelt, daß weder Abel noch Jacobi Interesse und Geschick zu haben scheinen, mit fortwährender Rücksicht auf astronomische oder andere Anwendungen zu arbeiten.“

Die Veröffentlichung der während der Ausarbeitung seiner Fundamenta sich ergebenden Resultate setzt Jacobi in einer vom 11. Januar 1829 datierten Arbeit: „Suite des notices sur les fonctions elliptiques“ weiter fort und zeigt, indem er die schon früher Legendre gegenüber gemachte Andeutung näher ausführt, daß, wenn $z = \frac{U}{V}$ eine beliebige rationale zur Transformation oder Multiplikation n. Grades dienliche Funktion ist, Zähler und Nenner, wenn $\alpha = \frac{1+\varkappa^2}{\varkappa}$, $x = \sqrt{\varkappa} \sin \operatorname{am} (u, \varkappa)$ gesetzt wird, der partiellen Differentialgleichung $n(n-1)x^2 z + (n-1)(\alpha x - 2x^3)\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - \alpha x^2 + x^4)\cdot$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2n(\alpha^2 - 4)\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ genügen. Wie er schon früher hervorgehoben, daß man aus der Transformation der ϑ-Funktionen unmittelbar die Transformationsformeln der elliptischen Funktionen herleiten kann, so bedient er sich hier eben dieses Prinzips zur Aufstellung der Transformationsformeln der Integrale 2. und 3. Gattung; „on peut aussi parvenir directement de la fonction $\theta(u)$ aux formules de transformation en partant de son développement en produit infini; de là, en suivant une marche inverse de celle qu'on vient de présenter, on tire sur-le-champ les formules rélatives à la transformation des fonctions elliptiques de la première et de la troisième espèce, et en différentiant, celles de la transformation des fonctions elliptiques de la seconde espèce.“ Indem er nun die schon erwähnte Beziehung für das Integral 3. Gattung aufstellt: $\Pi(u, a) = u\,Z(a) + \log\sqrt{\frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)}}$, betont er hier wiederum: „cette dernière formule fait voir que les fonctions elliptiques de la troisième espèce, qui dépendent de trois éléments, peuvent être réduites à d'autres transcendantes qui n'en ont que deux“, wogegen Legendre Abel gegenüber das Bedenken äußern zu müssen glaubte, daß durch Einführung eines imaginären Parameters wieder drei unabhängige Größen in das Integral 3. Gattung eingeführt würden. Nachdem er weiter das Theorem bewiesen: „étant supposés connus tous les modules dans lesquels on peut transformer un module donné $\varkappa$ à l'aide d'une transformation correspondante au nombre n, on peut exprimer par ces modules toutes les quantités de la forme $\sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2mK + 2m'iK'}{n}$, m, m' étant des nombres quelconques, sans qu'il soit nécessaire de résoudre une équation algébrique“, drückt er endlich noch $\sin \mathrm{am}\,(u, \varkappa)$ durch $\sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ und $\sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ durch $\sin \mathrm{am}\,(nu, \varkappa)$ aus und leitet mittels der algebraischen Auflösbarkeit der Divisionsgleichung die Divisionsformeln in einfachster Gestalt ab.

Auf diesen letzteren Punkt der algebraischen Auflösbarkeit der Divisions- und Transformationsgleichungen kommt er wenige Tage darauf in dem am 18. Januar 1829 an Legendre gerichteten Schreiben wieder zurück:

„Après que vous aviez résolu le premier l'équation du neuvième degré, de laquelle dépend la trisection des fonctions elliptiques, nous remarquâmes en même temps, Mr. Abel et moi, que l'on peut généralement réduire l'équation algébrique du degré n^2, de laquelle dépend la $n^{\text{ième}}$ section, à deux équations du $n^{\text{ième}}$ degré seulement. Ce résultat était une conséquence de la remarque que j'avais faite que l'on peut parvenir à la multiplication en appliquant à la fonction elliptique deux transformations l'une par l'autre. En lisant avec attention le premier Mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques, on reconnaît aisément qu'il a effectivement suivi la même route sans cependant soupçonner, lors du temps qu'il composa son Mémoire, que c'était le medium des transformations par lequel il passa. Soit $z = \sin \operatorname{am} nu$, $x = \sin \operatorname{am} u$, n étant un nombre impair quelconque, si l'on a

$$(1)\quad z = \frac{b' y + \cdots + b^{(n)} y^n}{b + \cdots + b^{(n-1)} y^{n-1}}, \qquad (2)\quad y = \frac{a' x + \cdots + a^{(n)} x^n}{a + \cdots + a^{(n-1)} x^{n-1}},$$

y étant le sinus amplitude de la fonction transformée, il faut, d'après ce que je viens de dire, pour avoir x en z, exprimer en premier lieu x en y, en résolvant algébriquement l'équation (2); puis, en résolvant encore l'équation (1), il faut exprimer par z toutes les fonctions de y qui se trouveront sous les radicaux. Or comme on a toujours plusieurs transformations qui répondent à un même nombre n, on trouvera de cette manière différentes formules algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section d'après les différentes transformations par lesquelles on est passé à la multiplication. On pouvait cependant soupçonner qu'il y avait une manière d'exprimer x en z plus simple et qui n'était qu'unique. J'ai fait connaître cette forme la plus simple sous laquelle on peut

présenter les expressions algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section dans une petite Addition faite au premier mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques, et laquelle se trouve dans le 3. vol. du Journal de M. Crelle. Elle est fondée sur une formule très remarquable et dont je veux vous parler en peu de mots ..." Nach Mitteilung der in seiner letzten Arbeit veröffentlichten Resultate fügt Jacobi hinzu: „A cause de l'extension inattendue qu'ont prise mes travaux, je partagerai mon ouvrage en deux parties, dont la première sera publiée dans trois mois environ; je vous en ferai hommage dès que son impression sera achevée. Dans des Notes et des Additions jointes à la première partie j'exposerai ce qui est particulier à Mr. Abel, en rapprochant les méthodes de cet Auteur de celles dont j'ai fait usage moi-même."

Legendre spricht in seiner Antwort vom 9. Februar 1829 seine Bewunderung über die Bewältigung des Divisionsproblems aus: „je n'aurais jamais imaginé qu'il fût possible de résoudre ainsi explicitement une équation du degré n^2 et de former d'une manière practicable les différents termes de la formule", und fordert Jacobi im Hinblick auf Abel nochmals dringend zur Herausgabe einer zusammenhängenden Darstellung aller seiner Arbeiten in der Theorie der Transzendenten auf: „il obtient ainsi sur vous une sorte d'avantage, parce que vous n'avez guère publié jusqu'à présent que des notices qui ne font pas connaître vos méthodes. C'est une raison pour que vous vous hâtiez de prendre possession de ce qui vous appartient en faisant paraître votre ouvrage le plus tôt qu'il vous sera possible."

Mitten in dieser durch aufreibende Arbeit schweren Zeit vollzog sich eine erfreuliche Änderung in der äußeren Lage Jacobis. Am 28. Februar 1829 berichtet der Minister an den König, daß sowohl der stellvertretende außerordentliche Regierungsbevollmächtigte als auch die philosophische Fakultät in Königsberg Jacobi der Beförderung zu einer ordentlichen Professur in allen Beziehungen für

würdig halten, und beantragt eine Gehaltszulage, um ihn dadurch wenigstens gegen drückende Nahrungssorgen sicherzustellen; durch Kabinettsorder vom 8. März 1829 wird Jacobi zum ordentlichen Professor für das Fach der Mathematik mit einer Gehaltszulage von 200 Thalern ernannt.

Die letzte Mitteilung Jacobis über Abels und seine eigne Methode der algebraischen Auflösung der Divisionsgleichung hatte Legendre zu einer irrtümlichen Auffassung veranlaßt, die Jacobi in einem sehr ausführlichen und hochinteressanten Schreiben vom 14. März 1829 berichtigt: „Vous supposez que j'ai trouvé des moyens à exprimer algébriquement les fonctions trigonométriques des amplitudes que vous designez par a_m, en ajoutant que sans cela ma formule contiendrait des coefficients que je ne pourrai déterminer. Mais, Monsieur, ce que vous désirez, est une chose tout à fait impossible dans le cas général, et qui ne s'exécute que pour des valeurs spéciales du module. Ma formule qui donne l'expression algébrique de sin am u au moyen de sin am $(n u)$ suppose connue la section de la fonction entière. C'est ainsi qu'on savait résoudre algébriquement depuis plus d'un siècle les équations qui se rapportent à la division d'un arc de cercle, toutefois en supposant connue celle de la circonférence entière, cette dernière n'étant donnée généralement que dans ces derniers temps par les travaux de M. Gauss ... Vous voyez donc, Monsieur, que M. Abel a prouvé ce théorème important, comme vous le nommez, dans son premier Mémoire sur les fonctions elliptiques, quoiqu'il n'y ait pas traité de la transformation, et qu'il ne paraît pas même avoir songé, du temps qu'il le composa, que ses formules et ses théorèmes trouveraient une pareille application. Quant à moi, je n'ai pas trouvé nécessaire de reproduire cette démonstration dans les écrits que j'ai publiés jusqu'ici sur cette matière, car il me reste trop à faire pour ne pas épargner mon temps le plus que possible.“ Auch der Nachweis von der Unmöglichkeit, die

Gleichungen für die geteilten Perioden algebraisch aufzulösen, ist nach Jacobi ganz das Verdienst Abels: „J'ai été convaincu, et M. Abel l'a confirmé, qu'il n'est pas possible de résoudre algébriquement ces équations du degré $n+1$; aussi, comme M. Abel sait établir des critères nécessaires et suffisants pour qu'une équation algébrique puisse être résolue, il pourra sans doute prouver cela avec toute la rigueur analytique. Quant aux cas spéciaux, comme M. Abel a promis en plusieurs lieux d'en traiter, je ne me suis pas encore occupé beaucoup de cet objet, sans doute très-intéressant ... Le module transformé ou, ce qui revient au même, le régulateur qui y répond étant supposé connu, il faut encore résoudre une équation du degré $\frac{n-1}{2}$ pour parvenir aux quantités $\sin^2 \operatorname{am} 2p\omega$, ou à la section de la fonction entière. Donc vous n'aviez eu qu'à résoudre une équation du second degré dans le cas de $n=5$. M. Abel a prouvé que la méthode de M. Gauss s'applique presque mot à mot à la resolution de ces équations, de sorte que ce ne sont que les équations aux modules qu'on ne sait pas résoudre algébriquement ...“ Vor allem aber sucht Jacobi Legendres Aufmerksamkeit auf seine Untersuchungen in betreff der Multiplikatorgleichungen hinzulenken: „Aussi j'ai découvert une propriété tout à fait singulière de ces équations, dont les racines sont les régulateurs ... c'est qu'on peut exprimer linéairement leurs racines carrées au moyen de la moitié de leur nombre, propriété qui m'est d'autant plus remarquable que je ne l'ai trouvée que par les développements en séries qui me sont propres, et que je ne vois pas comment on peut la prouver en quantités finies, ce qui pourtant doit être possible. Cette propriété servira sans doute à approfondire un jour la vraie nature de ces équations du dégré $n+1$“, und hebt die partielle Differentialgleichung hervor, mit Hilfe deren man die Transformationskoeffizienten durch die beiden Moduln aus-

drücken kann, „de sorte que la formation algébrique des substitutions à faire pour parvenir à une transformation quelconque est entièrement réduite à la récherche des équations aux modules, formule qui donne en même temps comme cas spécial les expressions algébriques et générales pour la multiplication par un nombre *n* quelconque indéfini, chose très difficile et dont vous avez dû remarquer les premiers exemples dans le 4⁰ cahier du vol. III dudit Recueil. Il sera de même, si l'on fait tout dépendre de l'équation, dont les racines donnent les valeurs de ce qui vous appelez le régulateur, et cela conviendra peut-être encore mieux, ces dernières semblant être plus simples." Endlich sieht er sich noch mit Bezug auf die Äußerung Legendres in betreff des merkwürdigen Zusammentreffens seiner Arbeiten mit denen Abels und die daran geknüpfte Aufforderung zur beschleunigten Veröffentlichung seines großen Werkes zu den Worten veranlaßt: „Je ne veux ni reproduire ni prévenir les travaux de M. Abel: presque tout ce que j'ai publié dans ces derniers temps sur les fonctions elliptiques contient des vues nouvelles; ce ne sont pas des amplifications de matières dont M. Abel a traité ou même promis de s'occuper."

Die Ausarbeitung der Fundamenta war bereits im Februar beendet, und der Druck näherte sich auch seinem Abschluß, als das inzwischen von Abel veröffentlichte Additionstheorem der hyperelliptischen Integrale Jacobis Aufmerksamkeit in hohem Grade fesselte und ihn schon in dem letzten Briefe an Legendre zu den Schlußworten angeregt hatte: „Quelle découverte de M. Abel que cette généralisation de l'intégral d'Euler! A-t-on jamais vu pareille chose! Mais comment s'est il fait que cette découverte, peut-être la plus importante de ce qu'a fait dans les mathématiques le siècle dans lequel nous vivons, étant communiquée à votre académie il y a deux ans, elle a pu échapper à l'attention de vous et de vos confrères?"

Aber es bedurfte nicht erst dieses Hinweises von Jacobi, um Legendre die Bedeutung jenes Theorems erkennen zu lassen; schon am 16. Januar 1829 hatte er an Abel geschrieben: „Mais le mémoire . . . me paraît surpasser tout ce que vous avez publié jusque à présent par la profondeur de l'analyse qui y règne, ainsi que par la beauté et la généralité des résultats", und Jacobi berichtet er auf dessen Anfrage, aus welchem Grunde die bereits im Jahre 1826 der Pariser Akademie eingereichte Arbeit Abels nicht veröffentlicht worden, am 8. April 1829, daß das Manuskript desselben unleserlich gewesen und dieser selbst sich nicht weiter um das Schicksal desselben bekümmert habe: „cependant j'ai demandé à M. Cauchy qu'il me remette le manuscrit, qui n'a jamais été entre mes mains, et je verrai ce qu'il y a à faire, pour réparer, s'il est possible, le peu d'attention, qu'il a donné à une production qui méritait sans doute un meilleur sort."

In diesem Briefe berührt aber Legendre noch eine andere Frage, welche zu einer weiteren interessanten Korrespondenz zwischen ihm und Jacobi Veranlassung gab. Es hatten sich ihm schon früher bei der Bearbeitung der Theorie der Integrale 3. Gattung für seinen traité vermöge des Hinzutretens einer dritten sie bestimmenden Größe, des Parameters, sowohl für die Aufstellung der Additionstheoreme derselben bezüglich des Arguments und des Parameters als auch für ihre numerische Berechnung große Schwierigkeiten entgegengestellt; er nimmt daher die ihm schon am 9. September 1828 von Jacobi mitgeteilte Entdeckung, der zufolge sich die Integrale 3. Gattung mit Hilfe der ϑ-Funktion, also einer Transzendenten mit nur zwei Variabeln ausdrücken lassen, mit großem Interesse auf, findet jedoch, wie er schon am 16. Januar 1829 Abel mitgeteilt hatte, Schwierigkeiten in der Einführung eines imaginären Parameters und wendet sich nun jetzt mit seinen Bedenken an Jacobi: „Mais les efforts que j'ai faits pour parvenir à ce résultat ont été

infructueux, quoique vous en ayez annoncé la possibilité. Je serais très-aise de m'être trompé, et je réparerais avec grand plaisir mon erreur si vous m'indiquiez le moyen de résoudre la difficulté et d'exprimer par deux variables seulement cette seconde division des fonctions de troisième espèce. Ce serait à mon avis la plus grande découverte qu'il est possible d'espérer dans la théorie des fonctions elliptiques, puisqu'elle rendrait l'usage de ces fonctions presqu'aussi facile, dans tous les cas, que celui des fonctions circulaires et logarithmiques."

Erst nach dem Erscheinen der Fundamenta kommt Jacobi auf diesen letzten Punkt in dem Briefe Legendres zurück und sucht in seiner Antwort diesen von der Notwendigkeit einer Einführung der imaginären Form der Variabeln und des Parameters zu überzeugen.

„Jacobi hat es später oft wiederholt", sagt Dirichlet, „daß die Einführung des Imaginären allein alle Rätsel der früheren Theorie gelöst habe. Wäre es nicht eine so alte Erfahrung, daß das Naheliegende sich fast immer zuletzt darbietet, so würde man es auffallend finden müssen, daß dieser Gedanke Euler entgangen ist, zu dessen frühesten und schönsten Leistungen es gehört, die Theorie der Kreisfunktionen, indem er diese als imaginäre Exponentialgrößen behandelt, in solchem Grade erweitert und vereinfacht zu haben, daß fast das ganze Gebiet der Analysis eine wesentliche Umgestaltung dadurch erfuhr."

Inzwischen war Legendre mit der Ausarbeitung seines zweiten Supplements zum traité beschäftigt; er faßt die im Laufe des letzten Jahres von Abel und Jacobi gemachten Entdeckungen zusammen, liefert eine eingehende Bearbeitung der verschiedenen analytischen Darstellungen der elliptischen Funktionen, der Summierung gewisser Reihen durch diese neuen Transzendenten, ferner der Einführung der ϑ-Funktionen und der Darstellung der elliptischen Integrale 2. und

3. Gattung mittels dieser Jacobischen Funktion. Einen großen Teil seiner Arbeit widmet er aber der Entwicklung des Additionstheorems für hyperelliptische Integrale, jenes fundamentalen, jetzt in allgemeinerer Form „das Abelsche Theorem“ genannten Satzes, welcher von Abel im Jahre 1828 in seiner berühmten Arbeit „Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonction transcendantes“ veröffentlicht war und von ihm in der aus Christiania vom 6. Januar 1829 datierten Arbeit „Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes“ auf Integrale aller algebraischen Funktionen ausgedehnt wurde. Die tiefere Einsicht in die wunderbaren Forschungen Abels steigerte auch Legendres persönliches Interesse für denselben. Er freut sich, ihm am 16. Januar 1829 mitteilen zu können: „j'ai reçu il y a quelque temps une lettre de Mr. Humboldt, dans laquelle il me marque que le ministre de l'instruction publique à Berlin a reçu du roi l'autorisation de former un séminaire pour l'étude des hautes mathématiques et de la physique, dans lequel vous serez appelé comme professeur avec M. Jacobi“, und nachdem kaum das 2. Supplement erschienen, dessen Vorrede vom 15. März datiert ist, wendet er sich an Crelle:

„J'ai appris par Mr. Dorow, que Mr. Jacobi se trouve placé convenablement dans l'université de Königsberg, ce qui me fait grand plaisir. Je voudrais qu'il en fait de même de M. Abel. J'avais, de concert avec trois de mes confrères, hasardé d'écrire au roi de Suède, pour l'engager d'appeler à Stockholm près de l'académie un savant si éminemment distingué. Je n'ai point eu encore de réponse, mais la bonne volonté nous avait témoigné Mr. l'ambassadeur... Mais d'après ce que m'a marqué Mr. de Humboldt il serait peut-être plus avantageux à Mr. Abel d'être appelé à Berlin pour entrer dans le séminaire, que l'on veut établir pour les hautes mathématiques et la physique. On ne pourrait

faire un meilleur choix et je désire bien vivement que ce projet se réalise ..."

Crelle, dem inzwischen das gewünschte Ausscheiden aus der Königl. Ober-Baudeputation bewilligt worden und der „in das Ressort des Unterrichtsministeriums für das mathematische Dienstfach übergegangen war", übersendet am 2. April dieses Schreiben Legendres dem Minister und dringt auf Beschleunigung des Rufes, weil Abel nach einem am 8. März erhaltenen Briefe sehr an Schwäche der Brust leide und ein Wechsel des Klimas wünschenswert sei. Zugleich wendet er sich am 8. April in freudig erregten Worten an Abel: „Nun, mein lieber theurer Freund, kann ich Ihnen gute Nachricht geben. Das Ministerium des Unterrichts hat beschlossen, Sie nach Berlin zu berufen und hier anzustellen. Ich höre es in diesem Augenblicke von demjenigen Herrn im Ministerio, in dessen Händen Ihre Sache ist. Es ist also daran kein Zweifel. Wie man Sie anstellen und wie viel man Ihnen geben wird, kann ich Ihnen noch nicht sagen, weil ich es selbst noch nicht weiß. Ich sprach jenen Herrn in einer großen Versammlung und nur im Fluge, daher erfuhr ich für den Augenblick noch nichts weiter. Sobald ich etwas Näheres höre, melde ich es Ihnen sogleich. Ich habe nur eilen wollen, Ihnen zuerst die Hauptsache zu melden; Sie können übrigens sicher sein, daß Sie in guten Händen sind. Über Ihre Zukunft können Sie jetzt ganz beruhigt sein. Sie sind der Unsrige und sind in Sicherheit. Ich habe mich gefreut, als wenn mir das Gewünschte selbst geschehen wäre. Es hat nicht wenig Mühe gekostet, aber es ist Gottlob! gelungen. Wem Sie vorzüglich verpflichtet sind, das werde ich Ihnen sagen, wenn ich Sie hier sehe. Sie können sich nur immer zur Reise vorbereiten, damit Sie sogleich abreisen, wenn Sie die officielle Aufforderung bekommen. Bis dahin aber, ich bitte wiederum sehr dringend, sagen Sie Niemandem von der gegenwärtigen Nachricht vor dem Ereignisse selbst. Die officielle Nach-

richt muß in sehr Kurzem in einigen Wochen nachkommen.“

Schon am 7. Mai mußte Crelle der preußischen Regierung berichten, „daß er vernommen, der Minister habe auf seine Eingabe vom 2. April beschlossen, Herrn Abel hierher berufen zu lassen, daß er aber leider eben die Nachricht von dessen Tode erhalten habe“, worauf der Minister in einem Schreiben vom 10. Mai Crelle auf dessen Ansuchen gestattete, in seinem Journal zu erwähnen, „daß er Abel nach Berlin zu berufen und ihm bei der Universität eine ehrenvolle Carrière zu eröffnen beabsichtigt habe“. Im Juni 1829 meldet Jacobi die Trauernachricht Legendre: „Peu de jours après l'envoi de ma dernière lettre, j'appris la triste nouvelle de la mort d'Abel. Notre Gouvernement l'avait appelé à Berlin, mais l'appel ne l'a pas trouvé parmi les vivants. L'espérance que j'avais conçue de le trouver à Berlin a été donc cruellement déçue, ... il s'en est allé, mais il a laissé un grand exemple ...“, und Gauss schreibt am 19. Mai an Schumacher: „Abels Tod, den ich in keiner Zeitung angezeigt gesehen habe, ist ein sehr großer Verlust für die Wissenschaft ... Humboldt, mit dem ich über ihn gesprochen habe, hatte den bestimmten Wunsch, alles zu thun, um ihn nach Berlin zu ziehen.“

Im April 1829, nach dem am 6. dieses Monats erfolgten Tode Abels, erschien die schon am 18. November 1827 von Jacobi in Aussicht gestellte Bearbeitung der Theorie der elliptischen Funktionen, betitelt „Fundamenta nova functionum Ellipticarum“, dessen kurzes vom Februar 1829 datiertes Prooemium lautete:

„Ante biennium fere, cum theoriam functionum ellipticarum accuratius examinare placuit, incidi in quaestiones quasdam gravissimas, quae et theoriae illi novam faciem creare et universam artem analyticam insigniter promovere videbantur. Quibus ad exitum felicem et propter difficultatem rei vix exspectatum perductis, prima earum momenta

breviter et sine demonstratione, mox cum vehementius illa desiderari et invento novo vix fides tribui videretur, addita demonstratione, cum geometris communicavi. Urgebar simul, ut systema completum quaestionum a me susceptarum in publicum ederem. Cui desiderio ut ex parte saltem satisfacerem, fundamenta, quibus quaestiones meae superstructae sunt, in publicum edere constitui. Quae fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum jam indulgentiae geometrarum commendamus."

Das für die moderne Analysis grundlegende Werk, von dessen Fortsetzung sich nur einzelne, zum Teil noch von Jacobi selbst veröffentlichte Bruchstücke vorgefunden haben, beginnt mit der Entwicklung der allgemeinen rationalen Transformation auf dem in seinen ersten Arbeiten angedeuteten Wege; es werden, nachdem das allgemeine elliptische Differential erster Gattung durch eine Transformation zweiten Grades auf die Legendresche Normalform reduziert worden, die Eigenschaften der Funktionen U und V in der rationalen Transformation $y = \frac{U}{V}$ gerader und ungerader Ordnung entwickelt, und als Beispiele die Transformationen 3. und 5. Grades sowie die zugehörigen Modulargleichungen hergeleitet. Nachdem noch die Multiplikation des elliptischen Integrales auf zwei nacheinander ausgeführte Transformationen reduziert worden, führt Jacobi die Umkehrungsfunktion des Integrales erster Gattung ein und erschließt mit Hilfe des Eulerschen Additionstheorems und der komplementären Transformation den Charakter der doppelten Periodizität dieser Funktionen, deren Nullwerte, ihre Unendlichen und ihre Veränderungen bei Vermehrung um halbe Perioden. Mit Hilfe dieser Umkehrungsfunktion werden nun die expliziten Transformationsausdrücke, sowie die Werte für den transformierten Integralmodul und den Multiplikator gefunden, und aus der Entwicklung der speziellen Transformationsformeln für die geteilten Perioden die Multiplikations-

formeln hergeleitet. Nun unterwirft Jacobi die früher aufgestellten Modulargleichungen für die Transformation 3. und 5. Grades einer näheren Betrachtung und zeigt, daß dieselben unverändert bleiben, wenn beliebige, aber dieselben Transformationen auf den primären und abgeleiteten Modul ausgeübt werden. Die von Legendre gefundene Differentialgleichung 2. Ordnung für die Perioden der elliptischen Funktionen führt ihn zu einem eleganten Ausdrucke für den Multiplikator der Transformation und zugleich zu jener merkwürdigen Differentialgleichung 3. Ordnung, der alle transformierten Moduln genügen.

Die elliptische Umkehrungsfunktion wurde in die Ausdrücke für die algebraische Transformation der Integrale eingeführt, und um deren analytische Darstellung zu finden, geht er von der Transformation n^{ten} Grades aus und gelangt, indem er n unendlich werden läßt, zur Darstellung der elliptischen Funktionen $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$ in Form von Quotienten von unendlichen Produkten und Partialbrüchen und daraus wieder zu den Ausdrücken für den Integralmodul und die Perioden als Funktionen der von ihm eingeführten Größe q. Es folgt eine zweite Darstellung der elliptischen Funktionen durch Fouriersche Reihen, mit Hilfe deren die Summen einer großen Anzahl von unendlichen, nach Ausdrücken in q fortschreitenden Reihen hergeleitet werden, welche sich durch den Integralmodul und die Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrales ausdrücken. Ebenso werden die n^{ten} Potenzen der elliptischen Funktionen und ihre reziproken Werte in sinus- und cosinus-Reihen auf doppelte Weise entwickelt, wobei interessante und später in der Theorie der allgemeinen doppelperiodischen Funktionen verwertete Methoden benutzt werden, und sodann mit Einführung der $Z(u)$-Funktion diese Entwicklungen für die Darstellung der Integrale 2. Gattung in Form von Fourierschen Reihen verwendet. Die Darstellung der Integrale 3. Gattung leitet Jacobi mit dem Satze von der Zurück-

führung derselben auf ein Integral 1. und 2. Gattung und auf eine nur von zwei Elementen abhängige Transzendente ein, und stützt hierauf den Satz von der Vertauschung der Amplitude und des Parameters; die neue Jacobische Transzendente $\Theta(u)$ wird durch eine Exponentialfunktion definiert, deren Exponent das über die $Z(u)$-Funktion genommene Integral ist. Das Additionstheorem der Integrale 3. Gattung für die Amplitude und den Parameter wird mit Hilfe der Additionstheoreme der Θ-Funktion in verschiedenen Formen aufgestellt, und mit Hilfe bestimmter Beziehungen für die lineare Transformation dieser Transzendenten auf Grund der von Legendre in seinem traité ausgeführten Untersuchungen die Reduktion eines beliebigen Integrales 3. Gattung auf solche derselben Art gegeben, für welche die Amplitude reell und der Parameter reell zwischen 0 und -1 liegt. Überall spielt die Θ-Funktion die Rolle der eigentlichen Fundamentalfunktion in der Theorie der elliptischen Transzendenten.

„Auffallenderweise“, sagt Dirichlet in seiner Gedächtnisrede, „hat eine so wichtige Funktion noch keinen andern Namen als den der Transzendenten Θ, nach der zufälligen Bezeichnung, mit der sie zuerst bei Jacobi erscheint, und die Mathematiker würden nur eine Pflicht der Dankbarkeit erfüllen, wenn sie sich vereinigten, ihr Jacobis Namen beizulegen, um das Andenken des Mannes zu ehren, zu dessen schönsten Entdeckungen es gehört, die innere Natur und hohe Bedeutung dieser Transzendenten zuerst erkannt zu haben.“

Nach Einführung der Θ-Funktion, welche den Nenner der $\sin\mathrm{am}$ bildet, wird auch der Zähler derselben als selbständige Transzendente H der Theorie zugrunde gelegt, und die $\cos\mathrm{am}$ und $\Delta\mathrm{am}$ drücken sich alsdann ebenfalls als Quotienten dieser Transzendenten aus; wesentlich ist dabei der durch Veränderung des Argumentes um halbe Perioden sich ergebende Zusammenhang zwischen diesen

Funktionen, durch den die ganze Theorie auf eine Fundamentaltranszendente zurückgeführt wird. Für die durch unendliche Produkte definierten beiden Transzendenten werden elegante Entwicklungen nach den sinus und cosinus der Vielfachen des Argumentes durch Benutzung der Beziehungen zwischen jenen Funktionen bei Vermehrung des Argumentes um ganze und halbe Perioden der elliptischen Funktionen hergeleitet, und aus diesen Entwicklungsformen die berühmten Reihen für die Perioden, nach Potenzen von q fortschreitend, deren Exponenten die Quadrate der ganzen Zahlen sind, entwickelt. Die verschiedenen analytischen Formen der elliptischen Funktionen geben eine Reihe interessanter Identitäten zwischen unendlichen Produkten und unendlichen Reihen, welche nach Potenzen von q fortschreiten, und mit der Benutzung dieser Beziehungen zum Beweise des Satzes, daß jede Zahl sich als eine Summe von 4 Quadraten darstellen lasse, schließt das große, an Inhalt überreiche Werk.

So steht nun der 24jährige junge Mann unbestritten nächst Gauss als der erste deutsche Mathematiker da — aber körperlich und geistig angegriffen von dem gewaltigen unaufhörlichen Schaffen. Noch eine Arbeit sendet er im April an Crelle, „De functionibus ellipticis commentatio prima“ betitelt, die mit den Worten beginnt: „Prima haec commentatio seriem incipit commentationum, quae ut continuatio Fundamentorum spectari potest“, und welche, sowie die späteren Fortsetzungen, offenbar, zu einem Ganzen vereint, den zweiten Teil der Fundamenta bilden sollten. Jacobi stellt in dieser Arbeit die Transformationsformeln der Integrale 2. und 3. Gattung in Verbindung mit den Transformationsausdrücken der ϑ - Functionen her, entwickelt die totale Differentialgleichung, welcher Zähler und Nenner der rationalen Transformationen genügen, „quod sane est theorema memorabile, satis reconditum, numeratorem et denominatorem substitutionis U, V singulos definiri posse

per aequationem differentialem tertii ordinis . . . Integrale completum aequationum differentialium tertii ordinis, quibus functiones U, V definiuntur, in promptu esse non videtur", und untersucht schließlich noch die mit einer quadratischen Exponentialgröße multiplizierte Θ-Funktion in bezug auf ihre Perioden und die Zusammensetzung dieser Funktionen zu den elliptischen Transzendenten.

Nun war aber auch seine Kraft erschöpft; er reist nach Absendung dieser Arbeit zu seinen Eltern nach Potsdam, um dort kurze Zeit auszuruhen, fühlt sich jedoch so angegriffen, daß er am 18. Mai zugleich mit der Übersendung seiner Fundamenta das Ministerium noch für diesen Monat um Urlaub bittet, „eine Bitte zu der ich mich durch Familienverhältnisse und eine mir nötig gewordene Erholung veranlaßt sehe". In dieser Zeit wurde die erste persönliche Bekanntschaft zwischen Jacobi und Dirichlet angeknüpft; „auf einer Reise, die sie zusammen nach Halle und von dort aus in Gesellschaft von W. Weber nach Thüringen unternahmen", berichtet Kummer, „lernten sie sich näher kennen, und da Jacobi die Zeit seiner Ferien öfter in Berlin verlebte, so hatten sie auch später Gelegenheit zu einem intimeren, wissenschaftlichen und freundschaftlichen Verkehr".

Das Ministerium gab Jacobi bereitwilligst einen Urlaub für das ganze Sommersemester 1829 und forderte zugleich Crelle zur Begutachtung der Fundamenta auf, welcher aber, durch amtliche Geschäfte verhindert, erst am 24. September diesem Auftrage nachkommen konnte: „. . . bis in den letztverflossenen Jahren die beiden jungen und hoffnungsvollen Geometer Abel und Jacobi, von welchen der erstere zum unersetzlichen Schaden der Wissenschaft leider viel zu früh verstarb, diese Theorie jeder auf seinem Wege, und ohne von einander und ihren Arbeiten zu wissen, auf eine bewunderungswürdige und überraschende Weise erweiterten und vervollkommneten . . . Erweiterungen von Sätzen, zu

welchen Euler und Legendre nicht gelangen konnten, setzen nun unstreitig schon einen außerordentlichen Scharfsinn und wirkliches Genie voraus . . . Die Schrift steht unbezweifelt dem Tiefsten und Schwierigsten, was die neuere Mathematik besitzt, zur Seite . . . Es finden sich schon Anzeichen, daß sie bedeutenden Einfluß auf die gesamte, noch so dunkle Theorie der Zahlen haben wird, und es ist leicht möglich, daß sie vielleicht auch über die bisherige, fast beschämend enge Begrenzung der Theorie der algebraischen Gleichungen hinaus einiges Licht verbreiten wird. Sie ist als eines der merkwürdigsten litterarischen Erzeugnisse anzusehen, welche die neuere mathematische Litteratur aufzuweisen hat . . .“

Zunächst blieb Jacobi noch einige Monate bei seinen Verwandten und Freunden in Potsdam und Berlin, um sich körperlich zu erholen, wieder einmal an Literatur und Kunst zu erfrischen und die einige Zeit vernachlässigte Korrespondenz von neuem zu pflegen.

„L'impression de mon ouvrage,“ schreibt er am 23. Mai 1829 an Legendre von Potsdam aus, „étant achevée, je me suis empressé de vous le faire parvenir, et je vous prie de l'accueillir avec cette bonté dont vous m'avez donné des preuves si éclatantes. Cependant je crains qu'il ne soit beaucoup au-dessous de la bonne opinion que vous avez voulu concevoir de mes travaux, et je crains cela d'autant plus, puisqu'il ne contient que les fondements de mes recherches et qu'il me faut encore une longue série de travaux pour établir aux yeux des Géomètres leur ensemble.“ Zugleich bezeichnet er die in dem letzten Schreiben von Legendre geforderte Unterscheidung der Integrale 3. Gattung als eine nicht in der analytischen Natur dieser Funktionen begründete: „En ce qui regarde les intégrales elliptiques de la troisième espèce à paramètre circulaire, vous avez complètement raison; elles ne jouissent pas d'une réduction analogue à celle de l'autre espèce logarithmique.

Si j'ai annoncé une pareille chose, comme vous le dites dans votre lettre, cela n'a pu être que dans le sens général et analytique, où l'on ne distingue pas entre les valeurs réelles et imaginaires et qu'on fait abstraction de l'évaluation numérique. Sous ce point de vue, une même formule embrasse tous les cas, de sorte qu'on n'a pas besoin de distinguer entre les espèces, ce qui devient nécessaire aussitôt qu'on veut appliquer les formules qui s'y rapportent au calcul numérique ou qu'on ne veut considérer que des quantités réelles. Toutefois cette sorte d'inconvénient, qui tient à la nature intime de l'objet, et nullement à un défaut de notre part, me paraît ajouter du mérite a votre division des intégrales elliptiques de la troisième espèce en deux classes, auxquelles se ramènent tous les autres cas.“ Und in betreff seiner letzten schon nach dem Erscheinen der Fundamenta veröffentlichten Arbeit hebt er hervor: „Mais le but principal de ce premier mémoire est de préparer tout ce qui est nécessaire pour que je puisse établir dans les mémoires suivants, avec toute la rigueur nécessaire et en partant des premiers éléments, cette théorie des transformations irrationnelles ou inverses et de la section des fonctions elliptiques, qui me paraît être le comble de toutes mes recherches sur cette matière.“

Aber Legendre bedauert es in der Antwort vom 4. Juni 1829, daß jene Verschiedenheit der Integrale 3. Gattung wirklich in der Natur der Sache liegen sollte: „mais, comme vous dites, cela tient à la nature des choses et nous ne pouvons rien y changer. Vous vous en consolez plus aisément que moi, vous et M. Abel qui êtes tous deux éminemment spéculatifs, mais moi qui ai toujours eu pour but d'introduire dans le calcul de nouveaux éléments . . . En fermant cette lettre je viens d'apprendre avec une profonde douleur que votre digne émule M. Abel est mort à Christiania . . .“

Inzwischen hatte Legendre die Fundamenta erhalten,

sogleich auf das genaueste durchstudiert, und dankt Jacobi am 16. Juli 1829 voll Bewunderung für das große Werk, fügt aber hinzu: „mais comme d'autres personnes pourraient vous représenter qu'en cela vous avez fait une chose qui doit m'être désagréable, je ne vois pas pourquoi je vous cacherais ce que je pense de cette proposition. Je vous dirai donc franchement que je n'approuve pas votre idée, et que je ne vois pas de quelle utilité elle peut-être pour vous et pour la science. La plus simple des fonctions elliptiques savoir l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}}$ jouit de tant et de si belles propriétés; considérée seule, elle est liée par de si beaux rapports avec les deux autres fonctions dites de la seconde et de la troisième espèce que l'ensemble de ces trois fonctions forme un système complet auquel on pourrait donner un autre nom que celui de fonctions elliptiques, mais dont l'existence est indépendante de toute autre fonction. La nomenclature méthodique que j'ai proposée, dès 1793, dans mon mémoire sur les transcendantes elliptiques, a été adoptée généralement, vous l'avez trouvée établie; quelles sont donc vos raisons pour vous écarter de l'usage général? Vous faites schisme avec M. Abel et avec moi, vous faites schisme avec vous-même, puisque, après avoir appelé fonctions elliptiques les sinus, cosinus et autres fonctions trigonométriques de l'amplitude, vous êtes encore obligé d'appeler fonctions de troisième espèce celles que je désigne sous le même nom . . . Je vous laisse à expliquer toutes ces choses. Du reste, je vous fait part confidentiellement de ces observations, dont vous ferez tel usage que vous voudrez, et auxquelles je ne donnerai jamais aucune publicité. Il me suffira de vous avoir témoigné ma surprise sur l'inconvenance et la bizarrerie de votre idée; elle n'altérera en rien les sentiments d'estime et d'affection que j'ai conçus pour vous et dont je vous renouvelle l'assurance."

Jacobi, bereits auf seiner längst geplanten Reise nach

Paris begriffen, schreibt ihm am 19. August 1829 aus Frankfurt: „Il me fallait absolument une dénomination pour les fonctions sin am, cos am, etc., dont les propriétés répondent parfaitement à celles des fonctions sin, cos, dites circulaires. D'un autre côté, l'application importante qu'on fait de la théorie des fonctions elliptiques au calcul intégral rendait nécessaires les distinctions et les dénominations que vous avez introduites dans l'analyse, et qui ont été accueillies pour tous les géomètres. J'ai donc trouvé convenable d'appeler les intégrales auxquelles vous donnez le nom des fonctions elliptiques de la première, seconde, troisième espèce intégrales elliptiques de la première, seconde, troisième espèce et d'étendre ou d'attribuer de préférence la dénomination de fonctions elliptiques aux sin am, cos am, Δ am, analogiquement comme on nomme fonctions circulaires les sinus, cosinus etc. Si cela vous déplaît, toute autre dénomination me sera agréable. Dans tous les cas, je crois que nous deviendrons aisément d'accord sur cet objet.“

Trotz dieser gewichtigen Gründe scheint sich aber Legendre selbst nach der persönlichen Bekanntschaft, die er wenige Wochen später mit Jacobi in Paris machte, bis zu seinem Tode nicht mehr mit der Wahl der Jacobischen Benennungen befreundet zu haben — sein letzter Brief an denselben vom 30. Juni 1832 sagt: „J'aurais un double plaisir si ces nouveaux résultats étaient obtenues par le secours de nos fonctions elliptiques, qui vous appartiennent autant qu'à moi, quoique vous ne vouliez pas exprimer la même chose par le même nom.“

Vom Ende August bis zur Mitte des Oktober hielt sich Jacobi in Paris auf, in vollem Genuß von Natur und Kunst, aber auch in beständigem wissenschaftlichen Verkehr mit Legendre, Fourier, Poisson und anderen hervorragenden Mathematikern und Physikern, die ihn später zum Teil noch überlebt haben. Leider befand sich Legendre damals in

einem körperlichen Zustande, der ihm einen regeren geselligen Verkehr mit Jacobi unmöglich machte, und er entschuldigte sich wiederholt bei ihm in liebenswürdigen Zeilen, daß er ihn wegen Krankeit nicht so aufnehmen könne, wie er es wünschte; bezüglich des Befindens Legendres schreibt ihm auch Mlle. Sophie Germain gelegentlich einer Dinereinladung: „. . . il n'a pas été en mon pouvoir, de faire accepter la même invitation à Monsieur Fourier, la santé de Monsieur le Gendre ne lui permet pas non plus de diner hors de chez lui, mais il m'a promis de venir passer la soirée. J'avais à regretter de ne pouvoir tenir complétement l'engagement d'offrir à Monsieur Jacobi une réunion digne de lui . . ."

Von seiner Reise wieder nach Königsberg zurückgekehrt, wo er insofern etwas veränderte Verhältnisse antraf, als Dove inzwischen im September nach Berlin versetzt und Neumann an Stelle des im März verstorbenen Professor Hagen zum Ordinarius ernannt worden war, hielt Jacobi zum ersten Male neben der Vorlesung über die Theorie der Oberflächen 2. Ordnung eine öffentliche Vorlesung über die Anfangsgründe der Theorie der elliptischen Transzendenten, von der eine Ausarbeitung von Sanio sich in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin befindet.

Gerade diese Vorlesung über elliptische Funktionen, die erste an einer Universität und gerade von Jacobi unmittelbar nach dem Erscheinen der Fundamenta gehalten, ist von großem geschichtlichen Interesse. Nachdem er die von Fagnano, Euler, Landen und Lagrange über elliptische Integrale erhaltenen Resultate skizziert und den von Legendre gemachten Fortschritt gekennzeichnet, hebt er hervor, daß noch die Beantwortung zweier Hauptfragen offen geblieben, wie nämlich die Multiplikation dieser Transzendenten zu veranstalten, und ob die Substitution von Landen die einzig mögliche sei. Er betont in seiner knappen Einleitung, daß Abel die algebraische Auflösbarkeit der Divisions-

gleichungen nachgewiesen und für die Lemniskate das Teilungsproblem vollständig gelöst habe, während er selbst den Satz von der Existenz unendlich vieler Transformationen aufgestellt und die Multiplikation aus zwei Transformationen zusammengesetzt habe. Als wichtigstes Prinzip hebt er aber das der doppelten Periodizität hervor; indem er bemerkt, daß die trigonometrische sinus-Funktion alle Eigenschaften der ganzen, die sin am alle Eigenschaften der gebrochenen Funktionen besitzt, bespricht er die einfache und doppelte Periodizität, beweist, daß Funktionen mit zwei reellen Perioden nicht existieren und spricht schon hier den Satz aus, daß eine Funktion nie drei selbständige Perioden besitzen kann. „Man könnte die Behandlung der elliptischen Funktionen füglich die Theorie der doppelt periodischen Funktionen nennen, denn der erste Namen erscheint ganz unpassend, wenn man nicht die Geschichte der Erfindung der Theorie kennt.“ Die beiden Perioden der elliptischen Funktionen leitet er aus der Entwicklung von $(1 - \varkappa^2 \sin {}^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ nach der Fourierschen cosinus-Reihe und aus der Beziehung $\sin \operatorname{am}(iu, \varkappa) = i \operatorname{tg} \operatorname{am}(u, \varkappa')$ ab. Er legt auf die Einführung der Fundamental-Transzendenten Θ besonderen Wert: „diese neuen Funktionen stehen höher, weil man aus ihnen die Eigenschaften der elliptischen Transzendenten ableiten kann, aber nicht umgekehrt“, zeigt ihre Wichtigkeit für die Theorie der elliptischen Integrale 2. und 3. Gattung, und geht zur Entwicklung der Θ in unendliche Doppelprodukte und in Reihen über, die einem ganz neuen Gesetze folgen, indem die Exponenten arithmetische Reihen der 2. Ordnung bilden, deren allgemeines Glied durch $e^{-(an+b)^2}$ dargestellt ist; „von hier aus ist ein Übergang zur höheren Arithmetik oder der Theorie der Zahlen gegeben, denn so aufgefaßt ergeben sich die Eigenschaften der elliptischen Transzendenten als Eigenschaften der Zahlen, insofern sie sich aus Quadratzahlen zusammensetzen lassen.“ Die Einleitung zu dieser Vorlesung schließt mit den Worten: „Man könnte

von diesen Reihen, welche immer konvergieren, als Definitionen ausgehen und von diesen rückwärts alle übrigen Sätze ableiten, denn Reihen, die immer konvergieren, sind die besten Definitionen der Transzendenten; die Art vom Integral auszugehen, hat viel weniger Anschaulichkeit, wenn man die Grenzen imaginär nimmt.“

Die eigentliche Vorlesung selbst beginnt mit der Entwicklung des Abelschen Theorems für hyperelliptische Integrale und der Ableitung des Eulerschen Additionstheorems, und behandelt als Anwendung desselben die Aufgabe, die Relation zwischen den Radien zweier Kreise und der Distanz ihrer Mittelpunkte zu finden, wenn diese einem Vieleck ein- und umgeschrieben sind. Er schließt daran die Addition und Multiplikation der elliptischen Umkehrungsfunktionen, geht weiter ausführlich auf das Divisionsproblem ein und hebt auch hier wieder, wie schon wiederholt in seinen Briefen an Legendre, hervor, daß, indem Abel, um die Multiplikation, er selbst, um verschiedene Transformationen zu erklären, die imaginären Größen einführten, sich das wichtige Theorem $\sin \mathrm{am}\,(iu, \varkappa) = i \operatorname{tg} \mathrm{am}\,(u, \varkappa')$ ergab, welches für $\varkappa = 0$ in eine bekannte Beziehung übergeht, welche zwischen den Kreisfunktionen und den Exponentialgrößen besteht. Aus dem Multiplikationstheorem wird die Entwicklung des Zählers und Nenners der elliptischen Funktionen in unendliche Doppelprodukte und Doppelreihen hergeleitet, und die Ausdrücke durch q für den Integralmodul und die Perioden entwickelt. Eine genauere Behandlung der Transformationstheorie des elliptischen Integrales 1. Gattung nach der in den Fundamenten angezeigten Methode, und eine kurze Besprechung der Integrale 2. und 3. Gattung beschließen die Vorlesung.

Der ständige Verkehr mit Bessel veranlaßte jetzt Jacobi, sich auch wieder allmählich Problemen anderer Natur zuzuwenden; die Besprechung von Fragen, welche die Theorie der algebraischen Gleichungen betrafen und Bessel besonders interessierten, waren die Veranlassung, daß er sich

mit den Arbeiten von Sturm beschäftigte, bezüglich welcher er am 9. November 1829 Bessel ein kurzes Exposé schickte: „Dieses in der Kürze der mir von Sturm mitgetheilte Beweis. Ich bemerke noch, daß die Betrachtung der Reste der Division ihm eigenthümlich ist. Fourier betrachtet nur die höheren Differentiale. Aber der Geist der Fourierschen Betrachtung ist derselbe.“ So wird er auch durch Integraluntersuchungen von Bessel veranlaßt, sich mit interessanten Entwicklungsformen von Funktionen mehrerer Variabeln zu beschäftigen, die noch im Jahre 1829 unter dem Titel „Exercitatio algebraica circa discerptionem singularem fractionum quae plures variabiles involvunt“ erschienen. Jacobi geht in dieser Arbeit von der Identität aus:

$$\frac{ab' - a'b}{(ax + by - t)(b'y + a'x - t')} = L + L_1 + L_2,$$

worin

$$L = \frac{ab' - a'b}{(ab' - a'b)x - b't + bt'} \cdot \frac{ab' - a'b}{(ab' - a'b)y - at' + a't},$$

$$L_1 = -\frac{ab' - a'b}{(ab' - a'b)x - b't + bt'} \cdot \frac{b}{x + by - t},$$

$$L_2 = -\frac{ab' - a'b}{(ab' - a'b)y - at' + a't} \cdot \frac{a'}{b'y + a'x - t'},$$

und zeigt, daß, wenn man die beiden Seiten der Gleichung nach fallenden Potenzen von a und b' entwickelt, die Größen L, L_1, L_2 die drei Teile liefern, in denen entweder beide Potenzen von x und y negativ, oder die von x negativ, die von y positiv, oder die von x positiv, die von y negativ sind, woraus sich, da die Koeffizienten der x- und y-Potenzen in L, L_1, L_2 endliche Werte haben, während die des gegebenen Ausdruckes auf der linken Seite unendliche Reihen sind, Summationen oder Transformationen von unendlichen Reihen ergeben. Eine einfache Umformung liefert den Satz, daß

$$\left[\frac{1}{(ax + by)^{m+1}} \cdot \frac{1}{(b'y + a'x)^{n+1}}\right]_{x^{-\mu} y^{-\nu}}$$
$$= \frac{(\mu - 1)!(\nu - 1)!}{m!n!} \frac{1}{(ab' - a'b)^{m+n+1}} \left[(b'x - a'y)^m (ay - bx)^n\right]_{x^{\mu - 1} y^{\nu - 1}}$$

ist, und ähnliche Theoreme für mehr Variable. Um nun Anwendungen dieser Sätze auf die Theorie der bestimmten Integrale zu machen, folgert Jacobi, daß, wenn man den Koeffizienten von $\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda$ in dem Ausdrucke

$$\left[\left(a + b\frac{y}{x}\right)\left(b' + a'\frac{x}{y}\right)\right]^{-n-1}$$

mit P_λ, den Koeffizienten von $\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda$ in dem Ausdrucke

$$\left[\left(b' - a'\frac{y}{x}\right)\left(a - b\frac{x}{y}\right)\right]^n$$

mit Q_λ bezeichnet,

$$P_\lambda = \frac{(n+\lambda)!\,(n-\lambda)!}{n!\,n!\,(ab' - a'b)^{2n+1}}\, Q_\lambda$$

ist, und hieraus ergibt sich für $\frac{y}{x} = e^{i\varphi}$, $a = b' = 1$, $b = a' = -\alpha$ die Entwicklung der Funktionen $(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{-n-1}$ und $(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^n$ nach der Fourierschen cosinus-Reihe mit den Koeffizienten P_λ und Q_λ, und daraus die von Euler gefundene Beziehung

$$\int_0^\pi \frac{\cos\lambda\varphi\, d\varphi}{(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+\lambda)!\,(n-\lambda)!}{n!\,n!}\int_0^\pi \frac{\cos\lambda\varphi\, d\varphi\,(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^n}{(1-\alpha^2)^{2n+1}}.$$

Gleichfalls einer Anregung von Bessel verdankt auch die in derselben Zeit verfaßte, „De resolutione aequationum per series infinitas" betitelte Arbeit ihre Entstehung. „Theoriam resolutionis aequationum per series infinitas principiis novis superstruam, quae maxime in eo versantur, ut indagetur serei eruendae functio generatrix sive functio, in cujus evolutione certa quadam ratione instituta inveniamus seriem, quae radicem exprimat ut certi cujusdam termini coefficientem." Jacobi übertrug die Untersuchung von Lagrange, welcher als generatrix für Funktionen einer

Variabeln, aus deren Entwicklung die Reihen für die Auflösungen der Gleichung $f(x) = 0$ hergeleitet werden, die Form $\frac{f'(x)}{f(x)}$ gefunden, nach einer Methode, die Ähnlichkeit hat mit der Residuenmethode von Cauchy, auf beliebig viele Funktionen mit mehr Variabeln, und entwickelt zunächst einen grundlegenden Hilfssatz, welcher für zwei Funktionen mit zwei Variabeln, für die er als generatrix $\frac{f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)}{f \cdot \varphi}$ findet, aussagt, daß, wenn die Potenzen der Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ nach fallenden Potenzen der Glieder $ax^{\mu}y^{\nu}$, $bx^{\mu'}y^{\nu'}$ entwickelt werden, in dem Ausdrucke $f^m\varphi^n\{f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)\}$ der Koeffizient des Gliedes $\frac{1}{xy}$ gleich Null wird, wenn nicht zu gleicher Zeit $m = -1$, $n = -1$ ist, in welchem Falle der Ausdruck $\frac{1}{xy}$ den Koeffizienten $\mu\nu' - \mu'\nu$ hat; den Beweis führt er durch Logarithmierung der Funktionen und Entwicklung nach fallenden Potenzen der Variabeln und dehnt den Satz auf n Funktionen von n Variabeln aus. Aus der Anwendung dieses Lemmas auf die Umkehrung der Reihen und die Auflösung der Gleichungen durch unendliche Reihen folgt, wie schon Lagrange für die Gleichung $\alpha - x + yf(x) = 0$ die Entwicklung $\psi(x) = \psi(\alpha) + y\psi'(\alpha)f(\alpha) + \frac{y^2}{2!}\frac{d[\psi'(\alpha)f(\alpha)^2]}{d\alpha} + \cdots$ gefunden, daß für eine Gleichung $f(x, y) = 0$ die von x abhängigen Koeffizienten der Entwicklung einer Funktion $\psi(x, y) = P + P'y + P''y^2 + \cdots$ wegen der Beziehung $\psi(x, y) = \psi(0, y) - \left[\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} \log f(x, y)\right]_{x^{-1}}$ durch $P^{(n)} = A^{(n)} - [T^{(n)}]_{x^{-1}}$ gegeben sind, wenn man mit $A^{(n)}$ und $T^{(n)}$ die Koeffizienten von y^n in der Entwicklung der Ausdrücke $\psi(0, y)$, $\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}\log f(x, y)$ bezeichnet. Jacobi dehnt nun mit Hilfe der Sätze und Entwicklungen in seiner früheren Abhandlung „Exercitatio algebraica etc.“ dieses Theorem auf zwei und drei Gleichungen aus und findet, daß, wenn zwei Glei-

chungen zwischen zwei Variabeln $\tau = a'x + a_1 y + a''x^2 + a_1'xy + a_2y^2 + \cdots$, $v = b'x + b_1y + b''x^2 + b_1'xy + b_2y^2 + \cdots$, zunächst, indem man $b_1 a_n^{(m)} - a_1 b_n^{(m)} = \alpha_n^{(m)}$, $a'b_n^{(m)} - b'a_n^{(m)} = \beta_n^{(m)}$, $a'b_1 - a_1 b' = \varDelta$, $b_1 \tau - a_1 v = X$, $a'v - b'\tau = Y$ setzt, in die einfachere Form $X = \varDelta \cdot x + \alpha''x^2 + \alpha_1'xy + \alpha_2 y^2 + \cdots$ $Y = \varDelta \cdot y + \beta''x^2 + \beta_1'xy + \beta_2y^2 + \cdots$ transformiert werden, die Frage, wie sich eine Funktion von x, y in die entsprechende von X, Y umgestaltet, dahin zu beantworten ist, daß, wenn $\psi(x, y) = \Sigma C_n^{(m)} X^m Y^n$ gesetzt wird, die Koeffizienten der Entwicklung durch den Ausdruck

$$C_q^{(p)} = \left[\psi(x, y) \frac{\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}}{X^{p+1}\, Y^{q+1}} \right]_{x^{-1} y^{-1}}$$

bestimmt sind.

Die hervorragenden Mathematiker Frankreichs suchten sich nun sogleich nach dem Erscheinen der Fundamenta mit der Theorie der neuen Transzendenten bekannt zu machen. Am 21. Dezember 1829 gab Poisson in der Académie des Sciences einen „Rapport sur l'ouvrage de M. Jacobi intitulé: fundamenta etc.“, in dem er nach Erwähnung der Arbeiten von Fagnano und Legendre eine in Form und Inhalt ausgezeichnete Übersicht von dem großen Werke entwarf. „. . . . L'étude que je viens de faire de l'ouvrage de M. Jacobi n'a fait que confirmer l'idée que j'avais déjà du mérite de ses découvertes en analyse et de la haute capacité, qu'elles supposent.“ Jacobi war jedoch mit diesem Berichte, von dem er erst einige Monate später Kenntnis erhielt, nicht ganz zufrieden, weil er mehr die Entdeckung der Θ-Funktion hervorgehoben zu sehen wünschte; er schreibt am 19. Juni 1830 an Bessel: „Poissons Rapport, den ich Ihnen zuzuschicken die Ehre hatte, enthält gegen Ende einiges Neue, die Übersicht und Einsicht in den Zusammenhang des großen Ganzen konnte man bei der fragmentarischen Bekanntmachung der weiteren Hauptmomente als Notizen u. s. w. von ihm nicht erwarten.

Auf die neuen Transcendenten Θ, H hat er zu wenig Werth gelegt; Gauss hatte auch darauf alles basirt, und Cauchy zeigte sogleich sich als Mathematiker von Fach, indem sein erstes Wort darüber war, daß das die Hauptsache sei. Jedenfalls ist es viel, daß er sich so schnell so weit hineingearbeitet hat.“ In seiner Antwort vom 19. Juni meint jedoch Bessel: „Sie scheinen mit Poissons Rapport nicht ganz zufrieden zu sein. Mir ist er äußerst klar erschienen ..... Daß er die Reihen nicht würdigt, habe ich für eine Übereinstimmung mit Legendres Meinung, der Sie einmal daran erinnerte, daß die elliptischen Functionen ihre Merkwürdigkeit durch ihre endlichen Relationen erhielten, angesehen.“

Der Ruhm des 25jährigen Königsberger Mathematikers verbreitete sich immer weiter, und wissenschaftliche Ehrungen wurden ihm in reichem Maß zuteil; im Dezember 1829 war er bereits zum korrespondierenden Mitglied der Berliner Akademie gewählt worden, und schon am 8. Februar 1830 ernannte ihn auf Betreiben Legendres und Poissons die französische Akademie zum correspondant de la section de géometrie; am 24. Juli erhielt er von Arago, dem sécrétaire perpétuel de l'Académie, die Mitteilung: „.... de vous annoncer, que l'académie royal des sciences dans sa séance publique du 26. courrant décernera sollénement son grand prix de mathématiques. Ce prix de la valeur de 3000 frcs. a été partagé entre vous, Monsieur, et la famille de feu Mr. Abel de Christiania“; noch in demselben Jahre wurde er korrespondierendes Mitglied der Akademie zu Petersburg, und es beeilte sich auch die preußische Regierung, ihm am 1. Februar 1830 „in Rücksicht auf Ihre bisherige verdienstvolle Wirksamkeit und Ihre beifallswerthen litterarischen Leistungen“ eine Gehaltszulage von 200 Talern zu bewilligen.

Eine Frucht seiner letzten Wintervorlesungen waren zwei kleinere Noten, welche im Jahre 1830 erschienen; die erste, „Problèmes d'analyse“, betitelt, stellt die in seinen

Übungen behandelten Aufgaben, aus $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ den allgemeinen Ausdruck für $\frac{d^n y}{dx^n}$ zu entwickeln, und ferner wenn $r, r', r'', \cdots r^{(n)}$ irrationale Zahlen bedeuten, welche auf beliebig viel Dezimalstellen gegeben sind, für die Auffindung der unbekannten ganzen Zahlen in der Gleichung $Ar + A'r' + \cdots + A^{(n)}r^{(n)} = 0$ eine allgemeine und direkte Methode zu liefern, die zweite, „Theorème de géométrie“, par un anonyme, wovon sich das Manuskript in seinem Nachlasse vorgefunden, behandelt kurz die Bewegung des Scheitels eines Winkels von gegebener Größe, der beständig eine vorgelegte Kurve berührt.

Nachdem der Briefwechsel mit Legendre durch die Pariser Reise eine kurze Unterbrechung erfahren, nahm Jacobi denselben am 2. Juli 1830 wieder auf, um Legendre den Dank für die Übersendung der 3. Ausgabe seiner théorie des nombres abzustatten und zugleich eine Bemerkung Fouriers allgemein-wissenschaftlicher Natur zu rektifizieren: „... Mais M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce dernier nous fait des reproches, à Abel et à moi, de ne pas nous être occupés de préférence du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion, que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde ...“ Neben einigen Andeutungen, welche eine Richtigstellung mehrerer zahlentheoretischer Behauptungen von Legendre zum Gegenstand haben, kommt Jacobi in diesem Briefe wieder auf das Abelsche Theorem, „ein besonders wirksames Hülfsmittel zur Erweiterung der Grenzen der Analysis“ zurück: „En ce qui regarde mes propres occupations, j'ai entrepris un bon nombre de recherches sur différentes matières et que

je voudrais avoir finies avant de retourner aux fonctions elliptiques et aux transcendantes d'un ordre supérieur qui sont de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{a + a_1 x + \cdots + a_n x^n}}$. Je crois entrevoir à présent que toutes ces transcendantes jouissent des propriétés admirables et inattendues, auxquelles on peut être conduit par le théorème d'Abel qui établit une relation entre plusieurs de ces transcendantes qui répondent à différentes valeurs de x."

In der Antwort vom 1. Oktober 1830 erkennt Legendre zunächst die Berichtigung jener von ihm in seiner théorie des nombres veröffentlichten zahlentheoretischen Sätze bereitwillig an und fährt fort: „j'ai vu avec plaisir dans la lettre, que vous avez écrite à l'académie, que vous vous occupez à perfectionner la théorie des perturbations, et que vous avez l'espoir d'y employer utilement la théorie des fonctions elliptiques. C'est un objet très digne de vos recherches et qui a été fort négligé par nos devanciers; j'avais eu quelques idées là-dessus, mais sans rien approfondir; j'en ai fait mention dans mes exercices et dans mon traité des fonctions elliptiques, espérant qu'un jour les géomètres s'en occuperaient sérieusement, et une pareille entreprise ne saurait être mieux placée qu'entre vos mains ... Vous auriez pu, Monsieur, me faire un pareil reproche, car je n'ai pu, par la même cause, vous faire l'accueil que j'aurais voulu vous faire pendant votre voyage à Paris. Je me suis acquitté de votre commission auprès de ma femme et de Mlle. Germain; elles vous remercient de votre bon souvenir, et vous souhaitent toute espèce de bonheur. Mlle. Germain était malade, quand vous l'avez vue, son état a malheureusement fort empiré depuis."

Außer mit den von Legendre hier erwähnten Störungsuntersuchungen beschäftigte sich Jacobi im Sommer 1830, in welchem er nur eine öffentliche Vorlesung über die allgemeine Theorie der Oberflächen und Kurven hielt, mit der Fortführung seiner im vorigen Jahre erschienenen Unter-

suchungen über elliptische Funktionen, die noch im Jahre 1830 unter dem Titel „De Functionibus ellipticis commentatio altera" im Crelleschen Journal erschien. „Proponemus in sequentibus formulas quasdam elementares circa summas functionum ellipticarum, quarum argumenta seriem arithmeticam constituunt"; wenn die Summe $F(u) + F(u + a) + F(u + 2a) + \cdots + F(u + (n-1)a)$ mit $\Sigma^{(n)} F(u)$ bezeichnet wird, so ergeben sich leicht für $\sin \operatorname{am} \frac{na}{2} = 0$ Beziehungen von der Form

$$\sum^{(n)} \{\cos \operatorname{am} u \Delta \operatorname{am}(u + pa) + \cos \operatorname{am}(u + pa) \Delta \operatorname{am}(u)\} = 0$$

und analoge, woraus, wenn $\omega = \frac{mK + m'iK'}{n}$ gesetzt wird, die Transformationsformeln der Fundamenta in:

$$\frac{\lambda}{\varkappa M} \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$$

$$= \sin \operatorname{am} u + \sin \operatorname{am}(u + 4\omega) + \cdots + \sin \operatorname{am}(u + 4(n-1)\omega)$$

übergehen, und ähnliche für $\cos \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ und $\Delta \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$, wie er sie schon in seiner ersten Vorlesung über elliptische Funktionen entwickelt hat.

Im Winter 1830/31 konnte Jacobi, da er nur publice über Kegelschnitte, privatim über höhere Arithmetik las und die letztere Vorlesung sich nur auf die Elemente der Zahlenlehre erstrecken sollte, die große öffentliche für das nächste Sommersemester in Aussicht genommene achtstündige Vorlesung über elliptische Transzendenten vorbereiten, und war bereits in umfassenden, darauf bezüglichen Untersuchungen begriffen, um dem Aufbau der Theorie der elliptischen Funktionen eine völlig neue Gestalt zu geben, als der Beginn des Jahres 1831 eine entscheidende Wendung in seinem Leben herbeiführte.

„Liebe Marie! Es ist eine besondere Angelegenheit, die mich treibt Ihnen zu schreiben, und ich mag Ihnen ohne weitere Vorbereitung die Sache einfältiglich eröffnen", so beginnt der erste Brief Jacobis an seine zukünftige Braut, die

Tochter des Kommerzienrat Schwinck in Königsberg, welche eben im Begriff war nach Frankfurt a. O. zu dem Regierungspräsidenten v. Wißmann zu eilen, um dessen schwer erkrankter Frau, ihrer älteren und von ihr verehrten Schwester, ein ganzes Jahr hindurch die liebevollste Pflege zu widmen. „Wenn nämlich, seitdem ich das erste Mal das Glück hatte, Sie zu sehen, mir es klar wurde, daß sich mir hier ein Wesen zeige von einer Bedeutung, wie ich sie früher niemals angetroffen, niemals wieder anzutreffen hoffen dürfe, wenn in entlegenen Zwischenräumen die Augenblicke, in welchen sich mir jenes Glück wiederholte, mir immer die bedeutendsten meines Lebens wurden, so mußte die stille Gewalt, welche eine Erscheinung wie diese, wie die Ihre, unwiderstehlich auf den ausübt, den Sie einmal ergriffen, endlich mein ganzes Sein und meine Gedanken auf diesen einen Punkt richten und ihn zum Mittelpunkt meines ganzen künftigen Lebens machen. Von früh auf mit den ernstesten Arbeiten beschäftigt, in ihnen den Kreis meines Daseins erschöpft glaubend, von ihnen volle Befriedigung alles dessen erhaltend, was jugendliche Ruhmbegierde nur träumen konnte, mußte ich mir selbst befremdlich vorkommen, als ein scheinbar reiches Dasein mir mit einem Male leer, und Ruhm und Ehre und Wissenschaft garnicht mehr wesentlich schienen und gering gegen einen freundlichen Blick von Ihrem Auge, wenn mir dieser würde. Und so war mir die gewöhnliche Ruhe und Heiterkeit unter der Hand entwendet, und ich mochte doch die Unruhe und Angst um alles nicht missen. Bei dieser schlimmen Lage der Dinge sehen Sie nun wohl, Sie wunderbares Mädchen, daß nur Sie mir Heilung und Heil gewähren können, die Sie mir die Ruhe genommen haben, und daß Sie, die Sie mein altes Dasein zerstört haben, mir ein neues gründen müssen. Und so frage ich Sie denn herzlich, aufrichtig und wohlmeinend, und so als wenn ich Ihnen in's Auge sähe, ob Sie der treuen Neigung, welche mein Herz Ihnen bietet, nicht zürnen und

ob Sie mir erlauben, bei Ihren Aeltern um Ihre Hand zu werben ...",

und bald darauf darf er ihr schreiben: „Ihr Brief hat mich sehr glücklich gemacht, nicht grade bloß seines Inhaltes wegen, sondern weil es etwas von Ihnen ist, und was von Ihnen ist, kann mir nur frommen. Ihrer Andeutung, mit einer Erwiederung zu warten, bis Sie von Frankfurt Antwort erhalten, kann ich nicht nachkommen; es wäre Verrath an mir und Ihnen gewesen. Ich habe nie gezweifelt, kann garnicht mehr zweifeln, habe mich nicht übereilt. Ich habe immer den Grundsatz gehabt, einen solchen Schritt nie zu thun, wenn ich ihn nicht thun mußte, so lange ich es noch vermeiden, noch lassen kann. Er ist geschehen mit solcher Nothwendigkeit, bedingt durch die innerste Art Ihres Seins und des meinen, wie etwa die ewigen Gesetze der Natur und des Geistes erfolgen mögen: hier war keine willkürliche Entschließung erst zu fassen und mithin keine Übereilung. Und so geschah es mir wohl oft in entscheidenden Augenblicken meines Lebens, wie es gewiß dem ungetrübten Geiste immer geschieht, daß ihm eine nothwendige That klar vor der Seele steht, selbst wenn er sich Gründe des Verstandes dagegen, so gut wie jeder andere, an den Fingern abzählen kann ... Ich hätte es nicht ausgehalten, mit der gewöhnlichen Rede neben Ihnen herzugehen und mit der Leidenschaft im Herzen; ich hätte diese Unwahrheit nicht ausgehalten, die meiner und Ihrer mir unwürdig dünkt. Giebt es hier etwas verworrenes, was ich nicht lösen kann, zu wem sollte ich meine Zuflucht nehmen als zu Ihrem Verstande, Ihrer Güte, Ihrer Reinheit; ich gebe mich Ihnen ganz, machen Sie mit mir, was Sie wollen" ...

Am 10. Mai 1831 schreibt er seiner Braut nach Frankfurt: „Ich fühle nur Sie, ich denke nur Sie, ich lebe nur durch Sie, Sie sind mir die ganze Welt; ich schenke ihr alles, Ruhm und Ehre und Reichthum und Ansehen und Glück, wenn ich nur Sie habe ...".

Trotz der großen und schwierigen Sommervorlesung waren seine Gedanken doch ganz von dem bräutlichen Glück in Anspruch genommen; „Heiterkeit und Laune“, schreibt er am 6. Juli 1831 seiner Schwester, „sind ihre Grundstimmung, die ich ihr gewiß nicht zu verderben hoffe. Der Vater meiner Braut ist einer der interessantesten Menschen, wegen seines ausgezeichneten Verstandes vielfach bekannt und berühmt; er hat Geschäfte in die Millionen gemacht, jetzt ist er durch Speculationen gänzlich verarmt. Marie hat die glänzenden Zeiten, die schon den Keim des Unglücks in sich trugen, garnicht mehr mit Bewußtsein erlebt, was sie selbst für ein Glück hält ... die Mutter soll früher ausgezeichnet schön und geistreich, vorzüglich musikalisch gewesen sein ... es ist sehr interessant mit dem Vater zu reden, die großartigen Verhältnisse erzeugten großartige Ansichten, Kant nannte ihn immer einen ungeschliffenen Juvel, da er unterrichtet eigentlich nicht ist ...“,
und seinem Bruder Moritz ruft er jubelnd zu:

„Das Leben der Götter ist Mathematik, sagt Novalis mit Recht, denn mein Leben jetzt ist das Leben der Götter. Du aber bist, was Du bist, aber bleibe nicht, was Du bleibst. Mache daß Du bald erkennen mögest, wie ich seit 8 Tagen, daß das Absolute kein Jenseits ist. Und somit ist der Inbegriff des höchsten Wunsches, den ich zu Deinem Geburtstage Dir hegen kann, Dir offenbart ... Mit meinen Arbeiten aber steht es so, daß ich viele Jahre nur zu schreiben brauchte, indem die seltensten Resultate gesammelt sind, bei vielem, was schon fleißig ausgearbeitet ist, nur die letzte Hand fehlt, aber ich konnte bisher nie die Freudigkeit finden, die zum Vollenden nöthig ist. Bin ich jetzt nun freudig wie je, zu jeder Unternehmung und Arbeit, so ist Hoffnung für manches.“

Es war nur zu natürlich, daß die große achtstündige Vorlesung über die elliptischen Transzendenten, welche ungleich reichhaltiger und umfassender geplant war als die

erste von ihm in Königsberg gehaltene, und von der ebenfalls eine Nachschrift von Sanio vorliegt, durch die seelischen Aufregungen, welche Jacobi in dieser Zeit beherrschten, eine unverkennbare Einbuße erlitt; er behielt ganz gegen seine ursprüngliche Absicht genau den in seiner früheren Vorlesung genommenen Gang bei mit geringer Abänderung in der Reihenfolge der Untersuchung der elliptischen Integrale der drei Gattungen, und es trat im wesentlichen nur die Besprechung des arithmetisch-geometrischen Mittels nach der Gaussschen Darstellung und die Entwicklung des Abelschen Theorems für die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung neu hinzu. „Hier zeigt sich schon ein großer Unterschied zwischen diesen und den vorigen Transzendenten, denn man kann die Summe mehrerer Integrale nicht wie bisher auf eins reduzieren, sondern nur bis auf 2, deren Argumente Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind. Dieser Umstand verändert ganz den Charakter der Transzendenten, so daß auf gewöhnliche Art keine Folgerungen aus denselben gezogen werden können.“ Die Einführung der θ-Funktion erfolgt nur an einer Stelle und auch dort mehr andeutungsweise.

Nur eine kurze, wahrscheinlich aus der Vorlesung hervorgegangene Arbeit wurde noch im Sommer 1831 von ihm fertiggestellt, betitelt „Note sur une nouvelle application de l'analyse des fonctions elliptiques à l'algèbre.“

„Dans une des notes sur les fonctions elliptiques j'ai avancé que les fonctions elliptiques doivent entrer dans toutes les parties de l'analyse mathématique et contribuer essentiellement à leurs progrès.“ Es handelt sich hier um die Entwicklung einer Quadratwurzel aus einem Polynome 4. Grades in einen Kettenbruch, und zwar ergibt sich für

$$R = z(z-1)\left(z - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(z - \frac{1}{\Delta^2\alpha}\right) = z^4 - az^3 + bz^2 - cz$$

der Kettenbruch

$$\sqrt{R}=z^2-\tfrac{1}{2}az+$$

$$i_1+\cfrac{1}{M_1 z+m_1+\cfrac{1}{M_2 z+m_2+\cdots+\cfrac{1}{M_{n-1}z+m_{n-1}+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{R}+z^2-\frac{1}{2}az+i_n}{q_n(r_n z-1)}}}}},$$

worin, wenn $\alpha=\operatorname{am} u$, $\alpha_n=\operatorname{am} nu$ gesetzt sind,

$$i_n=\frac{1}{2\cos^2\alpha\,\Delta^2\alpha}\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n}}\right),\quad r_n=1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n+1}}$$

und für ungerade n:

$$q_n=\frac{1}{4\cos^4\alpha\,\Delta^4\alpha}\left\{\frac{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_6}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n}}\right)}{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_4}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_8}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n-2}}\right)}\right\}^2$$

ist, und ähnlich, wenn n gerade. „Lorsque R surpasse le quatrième degré, la fraction continue dans laquelle on convertit $\sqrt{R}$ dépend des formules de multiplication des transcendantes plus élevées que les transcendantes elliptiques.“

Aus eben dieser Zeit liegen zwei aus seinen nachgelassenen Papieren veröffentlichte kurze Aufzeichnungen vor, die wahrscheinlich für den in Aussicht genommenen zweiten Band der Fundamenta bestimmt waren und an sich ein großes historisches Interesse haben. Die erste, betitelt „De divisione integralium ellipticarum in n partes aequales“, von Borchardt 1891 herausgegeben, führt ähnlich wie in den früheren an Legendre gerichteten Mitteilungen aus, daß Abel zuerst die Teilung des elliptischen Integrales in n Teile von der Auflösung einer algebraischen Gleichung $n^{2\text{ten}}$ Grades abhängig gemacht und gezeigt hat, daß diese Gleichungen allgemein auf 2 vom n^{ten} Grade zurückgeführt werden können, die algebraisch auflösbar sind. „Quo egregio invento maxime ille de hac theoria meritus est vastumque altissimarum quaestionum campum aperuit.“ Als Jacobi in den „Astronomischen Nachrichten“ die algebraische Auflösung der Teilungsgleichung 9^{ten} Grades veröffentlichte, war jedoch

die Arbeit von Abel noch nicht erschienen; er führt nun in dieser Aufzeichnung allgemein, um zu dem schon früher veröffentlichten Resultate zu gelangen, das Problem nicht auf 2 Gleichungen n^{ten} Grades zurück, sondern löst die Teilungsgleichung $n^{2\,\text{ten}}$ Grades direkt auf, wobei in diesen algebraischen Auflösungen gewisse konstante Größen vorkommen, welche von der Teilung des vollständigen Integrales in n gleiche Teile abhängen und welche, wie Abel nachher gezeigt hat, die Lösungen einer allgemein nicht, aber für gewisse spezielle Werte des Moduls wohl algebraisch auflösbaren Gleichung $n+1^{\text{ten}}$ Grades sind. „Grave quidem videri possit incommodum, quod pro modulo certe indefiniti valoris ad aequationem irresolubilem deferamus; accuratius autem inspicienti inde vel magnum commodum analysi algebraicae nasci posse elucebit. Inventum enim est genus aequationum algebraicarum, quarum radices nullo modo per extractionem radicum exhibere licet, quae tamen per divisionem integralium ellipticorum resolvi possunt", und er schließt mit den Worten: „Eodem tempore quo Cl. Abel haec et alia praeclare et eleganter invenit, ipse theoriam generalem transformationis functionum ellipticarum condidi, et a principio duplicis periodi, ad quod et ipse deveneram, et a principio novo profectus, quod in Fundamentis principium transformationis vocavi."

In der zweiten von Mertens ebenfalls 1891 aus dem Nachlasse Jacobis veröffentlichten Arbeit, die mit der ersten in engster Verbindung steht, „De multiplicatione functionum ellipticarum per quantitatem imaginariam pro certo quodam modulorum systemate" will er die Fälle untersuchen, in welchen ein Modul bei einer Transformation in seinen komplementären übergeht, und er folgert aus dem Ausdrucke für den Multiplikator durch $\varkappa$ und λ, wenn $\lambda^2 = 1 - \varkappa^2$ gesetzt wird oder auch unmittelbar aus der Identität der komplementären und supplementären Transformation den

Wert $M = \frac{1}{\sqrt{n}}$, wonach man also für diese Moduln die elliptischen Funktionen mit dem Argument $\sqrt{n} \cdot u$ und dem Modul $\varkappa'$ durch die in u und $\varkappa$ rational ausdrücken kann; ist dann $\varkappa$ der kleinere der Moduln $\varkappa$ und $\varkappa'$, so ist $\frac{K'}{K} = \sqrt{n}$, und für diese transzendente Gleichung läßt sich der Modul $\varkappa$ algebraisch aus der Modulargleichung finden, wenn man $\lambda = \varkappa'$ setzt. Diese Moduln haben die besondere Eigenschaft, daß, wenn $p = a^2 + nb^2$, worin p eine Primzahl, a eine ungerade, b eine gerade Zahl ist, aus der Zahl der imaginären Transformationen p^{ter} Ordnung zwei in eine Multiplikation mit einer imaginären Größe übergehen, für welche der Multiplikator $M = \frac{1}{a \pm ib\sqrt{n}}$ ist, so daß sich die elliptischen Funktionen mit dem Argumente pu aus zwei Multiplikationen mit den Argumenten $(a + ib\sqrt{n})\,u$ und $(a - ib\sqrt{n})u$ zusammensetzen. „Abel pro certis quibusdam modulis demonstraturum se promittere voluit, sectionem functionum ellipticarum totam algebraice confici posse. Id quod de omnibus, de quibus diximus, valebit modulis, quos in complementa licet transformare.“

Am 11. September 1831 fand die Hochzeit Jacobis statt, die der Cholera wegen nur im engsten Familienkreise gefeiert wurde, und nun erst gewinnt er die völlige Konzentration in seiner Arbeit wieder; „depuis les huit mois de mon mariage“, schreibt er an Legendre, „j'ai repris mes occupations ordinaires avec un zèle redoublé et j'espère que les années suivantes me dédommageront en quelque sorte du peu de fruit que m'ont porté les trois précédentes“, und schon vier Wochen später muß seine Frau seinen Eltern eine Beschreibung ihres jungen ehelichen Lebens geben, „da er selbst völlig außer Stande ist, sich von seinen Arbeiten loszureißen“.

Im Wintersemester 1831/32, in welchem er über auserlesene Kapitel des höheren Kalküls und über die Theorie

der Oberflächen 2. Ordnung las, suchte er zunächst seine Habilitationsschrift zum Zwecke des Eintritts als Ordinarius in die philosophische Fakultät, welcher im nächsten Sommer stattfinden sollte, fertigzustellen, und verfaßte zu diesem Zwecke eine größere Abhandlung für das Crellesche Journal, um nach deren Erscheinen einen Teil derselben zur Habilitationsschrift benutzen zu können. Mit den in dieser niedergelegten Untersuchungen hängt auch eine an Bessel gerichtete und durch eine von diesem gestellte Aufgabe veranlaßte Mitteilung vom 7. Oktober zusammen, welche Jacobi in die Form kleidete, einer Gleichung $0 = a + a' \cos^2\psi + a'' \sin^2\psi \cos^2\varphi + a''' \sin^2\psi \sin^2\varphi + 2b' \cos\psi + 2b'' \sin\psi \cos\varphi + 2b''' \sin\psi \sin\varphi$ dadurch zu genügen, daß man für $\cos\psi$, $\sin\psi\cos\varphi$, $\sin\psi\sin\varphi$ passende Funktionen einer Variabeln setzt. Auf Grund der in seiner früheren Arbeit über Doppelintegrale entwickelten Transformationsformel kann die Gleichung durch Substitutionen, welche die bezeichneten Größen linear gebrochen, durch $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ ausdrücken, in die Form $0 = G + G' \cos^2\eta + G'' \sin^2\eta \cos^2\vartheta + G''' \sin^2\eta \sin^2\vartheta$ übergeführt werden, worin G, G', G'', G''' Wurzeln einer biquadratischen Gleichung sind, und die 16 Substitutionskoeffizienten nach Auffindung dieser Wurzeln durch Ausziehung von Quadratwurzeln gewonnen werden; die letzterhaltene Gleichung läßt sich dann durch lineare ganze Funktionen einer Variabel t für $\cos^2\eta$, $\sin^2\eta\cos^2\vartheta$, $\sin^2\eta\sin^2\vartheta$ befriedigen.

Die oben bezeichnete, vom 8. Dezember 1831 datierte und im folgenden Jahre erschienene große Arbeit trägt den Titel „De transformatione integralis duplicis indefiniti

$$\int \frac{d\varphi\, d\psi}{\ldots + B\cos\varphi + C\sin\varphi + (A' + B'\cos\varphi + C'\sin\varphi)\cos\psi + (A'' + B''\cos\varphi + C''\sin\varphi)\sin\psi}$$

in formam simpliciorem $\int \frac{d\eta\, d\vartheta}{G - G'\cos\eta\cos\vartheta - G''\sin\eta\sin\vartheta}$“, und enthält eine Ausdehnung des Eulerschen Fundamentaltheorems für elliptische Integrale auf Doppelintegrale dieser

Form. „Das gleiche kann", sagt er an anderer Stelle, „in aller Allgemeinheit mit dem Abelschen Theorem geschehen; es bedarf hierzu nur des auch für andere Untersuchungen merkwürdigen Satzes der Algebra, daß, wenn f und F ganze rationale Functionen von x und y sind, und man in dem Ausdrucke $\frac{1}{f'(x)F'(y)-f'(y)F'(x)}$ für x und y alle Systeme von Werten setzt, für welche zugleich $f=0$, $F=0$, die Summe der so erhaltenen Werthe dieses Ausdruckes verschwindet"; noch mehrere Jahre später bat ihn Rosenhain vergeblich um die Ausführung der hier angedeuteten Untersuchung zum Zwecke der Umkehrung des hyperelliptischen Differentialgleichungssystems.

Nachdem Jacobi in dieser Arbeit den Zusammenhang des Problems, das Integral

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{a+b\cos\varphi+c\sin\varphi+d\cos^2\varphi+e\cos\varphi\sin\varphi+f\sin^2\varphi}}$$

in

$$\frac{1}{M}\int \frac{d\eta}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\eta}}$$

durch die Substitution $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{m+n\operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta}{1+p\operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta}$ zu transformieren, mit der algebraischen Forderung festgestellt, durch die Substitutionen $x=\alpha s+\alpha' s'+\alpha'' s''$, $y=\beta s+\beta' s'+\beta'' s''$, $z=\gamma s+\gamma' s'+\gamma'' s''$, für welche $x^2+y^2+z^2=s^2+s'^2+s''^2$ ist, den Ausdruck $ax^2+bxy+cxz+dy^2+eyz+fz^2$ in den einfacheren $G^2s^2+G'^2s'^2+G''^2s''^2$ zu transformieren, also mit dem Hauptachsenproblem der Ellipsoide, stellt er sich zunächst die Aufgabe, für die analogen linearen Beziehungen zwischen x, y, z, s, s', s''; w, w', w'', t, u, v und die entsprechenden quadratischen Bedingungsgleichungen den Ausdruck $(Ax+By+Cz)w+(A'x+B'y+C'z)w' + (A''x+B''y+C''z)w''$ in den einfacheren $Gst+G's'u + G''s''v$ überzuführen; er zeigt, daß sich die Größen G^2, G'^2, G''^2 als die Lösungen einer kubischen Gleichung ergeben, deren Koeffizienten rational und ganz aus den $A, B, C, A', \ldots$

zusammengesetzt sind, und daß die Quadrate der Substitutionskoeffizienten rational durch G^2, G'^2, G''^2 ausgedrückt werden können. Mit Hilfe dieser Transformationsformeln leitet er nun die in dem Briefe an Bessel ausgesprochene und in dem Titel dieser Arbeit bezeichnete Umformung der Doppelintegrale vermöge linear gebrochener Substitutionen von $\cos\varphi$, $\sin\varphi$; $\cos\psi$, $\sin\psi$ in $\cos\eta$, $\sin\eta$; $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$ her und stellt ähnliche Transformationen für mehrfache Integrale auf. Wie sich nun aus der ersten oben bezeichneten algebraischen Umformung leicht für einfache Integrale das Theorem ergibt, daß die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)^2+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)^2-(A+B\cos\varphi+C\sin\varphi)^2}}$$
$$+\frac{d\psi}{\sqrt{(B+B'\cos\psi+B''\sin\psi)^2+(C+C'\cos\psi+C''\sin\psi)^2-(A+A'\cos\psi+A''\sin\psi)^2}}=0$$

ein Integral von der Form $A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi=0$ besitzt, oder im speziellen Falle die Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{\sqrt{G'^2\cos^2\eta+G''^2\sin^2\eta-G^2}}+\frac{d\vartheta}{\sqrt{G'^2\cos^2\vartheta+G''^2\sin^2\vartheta-G^2}}=0$$

das Integral $G-G'\cos\eta\cos\vartheta-G''\sin\eta\sin\vartheta=0$, so werden für Doppelintegrale die Gleichungen $a+a'\cos\varphi\cos\eta+a''\sin\varphi\cos\psi\sin\eta\cos\vartheta+a'''\sin\varphi\sin\psi\sin\eta\sin\vartheta=0$ und $b+b'\cos\varphi\cos\eta+b''\sin\varphi\cos\psi\sin\eta\cos\vartheta+b'''\sin\varphi\cdot\sin\psi\sin\eta\sin\vartheta=0$ die Relation nach sich ziehen:

$$\int\frac{\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi}{R}=\int\frac{\sin\eta\,d\eta\,d\vartheta}{S},$$

wenn $R^2=(a''b'''-a'''b'')^2\sin^4\varphi\cos^2\psi\sin^2\psi+(a'''b'-a'b''')^2\cdot\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin^2\psi+(a'b''-a''b')^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos^2\psi-(ab'-a'b)^2\cdot\cos^2\varphi-(ab''-a''b)^2\sin^2\varphi\cos^2\psi-(ab'''-a'''b)^2\sin^2\varphi\sin^2\psi$ und S^2 denselben Ausdruck bedeutet, worin η statt φ, ϑ statt ψ gesetzt wird.

In den Osterferien 1832 reiste Jacobi zu seinem kranken Vater nach Potsdam, der schon acht Tage nach seiner Ankunft

im Alter von 59 Jahren starb. Noch während seines Aufenthaltes daselbst erhielt Jacobi das 3. Supplement zum traité aus Königsberg nachgeschickt und zugleich von Crelle die Aufforderung, eine Übersicht des Werkes zu verfassen, „da wohl", wie dieser später schrieb, „schwerlich Jemand den Inhalt der Legendre'schen neuen Arbeit besser zu würdigen und zu erkennen vermocht haben dürfte als Jacobi, der Zeitgenosse und Geistesverwandte Abel's, der ebenfalls noch in jugendlichen Jahren mit gleichem Erfolge und gleicher Kraft ihm würdig zur Seite ging — auch ihm verdankt die Theorie der elliptischen Functionen ihre neuere Vervollkommnung, und er erreichte darin, unbekannt mit den gleichzeitigen Arbeiten Abel's, das gleiche Ziel —". Jacobi kam noch von Potsdam aus am 22. April in der klassisch gewordenen Anzeige von „Légendre théorie des fonctions elliptiques troisième supplément" diesem Ansuchen nach.

Nach Besprechung der ersten Paragraphen, welche die Transformation und Multiplikation der elliptischen Transzendenten zum Gegenstand haben, fährt Jacobi fort: „Legendre giebt den Transcendenten $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$, wenn X den vierten Grad übersteigt, den Namen der hyperelliptischen (ultra-elliptiques). Wir würden sie die Abel'schen Transcendenten nennen, da Abel zuerst sie in die Analysis eingeführt und durch ein umfassendes Theorem ihre große Bedeutung nachgewiesen hat. Diesem Theoreme selbst dürfte wohl vorzugsweise, als dem schönsten Monumente dieses außerordentlichen Geistes, der Name des Abel'schen Theorems zukommen. Denn gern stimmen wir dem Verfasser bei, daß es das ganze Gepräge seiner Gedankentiefe trägt. Wir halten es, wie es in einfacher Gestalt ohne Apparat von Calcul den tiefsten und umfassendsten mathematischen Gedanken ausspricht, für die größte mathematische Entdeckung unserer Zeit, obgleich erst eine künftige, vielleicht

späte, große Arbeit ihre ganze Bedeutung aufweisen kann.“ Bezüglich der numerischen Berechnung jener hyperelliptischen Integrale bemerkt Jacobi, daß dieselben immer mit derselben Leichtigkeit wie die Integration rationaler Funktionen geleistet werden kann, und zwar nach einer Methode, die in der Theorie der himmlischen Störungen eine wichtige Anwendung findet. Die von Abel kurz vor seinem Tode im 4. Bande des Journals gegebene Erweiterung seines Theorems auf alle Integrale algebraischer, auch inexpliziter Funktionen, ist nach Jacobis Ansicht noch einer Reproduktion bedürftig, „was, da der Hauptideengang sich erkennen läßt, nicht schwer fällt. ... So hat Legendre noch in seinem 80. Lebensjahre, die Aufgabe der Zukunft vorfühlend, mit der Durchforschung des Abel'schen Theorems sein großes Werk über die elliptischen Functionen beschlossen.“

In einer Nachschrift dehnt er noch ein von Legendre gegebenes merkwürdiges Theorem auf das allgemeinere hyperelliptische Integral mit den Moduln $\varkappa$, λ, $\varkappa\lambda$ aus, welches sich auf die Summe zweier elliptischen Integrale der ersten Gattung zurückführen läßt; „man sieht, daß allgemein die Summe und die Differenz zweier elliptischen Integrale erster Gattung mit derselben Amplitude und beliebigen Moduln die Eigenschaften der ersten Klasse der Abel'schen Transcendenten genießen müssen, in welchen die Function unter dem Quadratwurzelzeichen bis auf den 5^{ten} oder 6^{ten} Grad steigt; diese Bemerkung ist für die Theorie der elliptischen Transcendenten von Wichtigkeit und kann andererseits bei der Behandlung jener Klasse der Abel'schen Transcendenten mannigfachen Nutzen gewähren.“

Jacobi kehrte kurz vor Beginn des Sommersemesters, für welches er eine öffentliche Vorlesung über Oberflächen 2. Ordnung und eine private über die allgemeine Theorie der Kurven und Flächen angekündigt hatte, nach Königsberg zurück, und in dieser Zeit gelang es ihm bereits —

nach den mannigfachsten Versuchen, auf Grundlage des Abelschen Theorems für hyperelliptische Integrale eine Theorie analoger Transzendenten zu konstruieren, wie es Abel und ihm für die elliptischen Transzendenten gelungen war — eine Basis für diese Theorie zu gewinnen, deren Grundzüge er erst ein Jahr später veröffentlichte. Schon wenige Tage nach seiner Ankunft in Königsberg, am 14. Mai 1832, sandte er zunächst eine Notiz an Crelle, „De theoremate Abeliano observatio“ betitelt, in welcher er das von Abel ausgesprochene Additionstheorem dahin verallgemeinert, daß, wenn A, B, C, S, U, V ganze Funktionen von x bedeuten, und $B^2 - AC = \varphi(x)$, $\int\limits_0^x \frac{S\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} = \Pi(x)$ gesetzt wird, die Summe $\Sigma \pm \Pi(x)$, ausgedehnt über alle Lösungen der Gleichung $AU^2 + 2BUV + CV^2 = 0$, gleich ist $c + r - L$, worin c eine von den Koeffizienten von U und V unabhängige Konstante, und die Größen r und L durch die Ausdrücke

$$r = \left[\frac{S}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \log \frac{AU + BV + V\sqrt{\varphi(x)}}{AU + BV - V\sqrt{\varphi(x)}}\right]_{\frac{1}{x}}$$

und

$$L = \left(\frac{S}{\sqrt{\varphi(x)}} \log \frac{AU + BV + V\sqrt{\varphi(x)}}{AU + BV - V\sqrt{\varphi(x)}}\right)_{x=\alpha}$$

bestimmt sind.

Nach Absendung dieser Arbeit zeigt er am 27. Mai Legendre den Tod seines Vaters an: „je lui devais la reconnaissance la plus haute; ce furent ses assistances libérales, qui m'ont mis en état de me vouer entièrement aux sciences“, und teilt ihm zugleich mit, daß nächstens im 8. Bande des Crelleschen Journals eine Rezension seines 3. Supplementes von ihm erscheinen wird: „j'ai cherché à relever les mérites impérissables du géomètre, qui outre les découvertes nombreuses et importantes dont il a enrichi la science, est parvenu à fonder deux disciplines grandes et étendues par les travaux glorieux de sa vie, lesquelles formeront désor-

mais l'α et l'ω de toute étendue mathematique. J'ai profité en même temps de cette occasion pour parler d'Abel et de son grand théorème, que vous avez encore le mérite d'avoir approfondi le premier, montrant en même temps à la postérité que son développement est la grande tâche qui lui reste à remplir ... Quant à moi, je donne des leçons régulières sur ces belles théories, les fonctions elliptiques et la science de nombres, et je vois avec plaisir les élèves de notre Université s'emparer avec empressement de ces matières ...", worauf ihm am 30. Juni Legendre in seinem letzten schönen Briefe — er starb am 10. Januar 1833 — antwortete: „je verrais avec beaucoup de plaisir, mon cher disciple (car vous me permettrez de vous donner ce nom à raison de mon ancienneté, sauf à vous à user du même droit un jour envers qu'il appartiendra) que vous ouvrissiez dans cette théorie (des perturbations) une nouvelle porte qui nous conduisit à des résultats plus précis et plus exacts que tout ce qui a été fait jusqu'ici ... C'est en effet une grande époque dans la vie que celle où l'on a le malheur de perdre son père, c'en est une autre non moins importante, mais plus agréable, que celle où l'on se décide à entrer en ménage. Et pour ne parler que de cette dernière, je vous félicite bien sincérement d'avoir rencontré une jeune épouse que, d'après une expérience déjà longue, vous jugez devoir faire pour toujours votre bonheur. Vous étiez dans l'âge convenable pour vous marier; un homme destiné à passer beaucoup de temps dans les travaux du cabinet, a besoin d'une compagne qui s'occupe de tout le détail du ménage et qui affranchisse son mari de tous ces petits soins minutieux dont un homme n'est guère capable. Je me suis marié beaucoup plus tard que vous et à la suite d'une révolution sanglante qui avait détruit ma petite fortune; nous avons eu de grands embarras et des moments bien difficiles à passer, mais ma femme m'a aidé puissament à restaurer progressivement mes affaires et à me donner cette tranquillité d'esprit nécessaire pour me

livrer à mes travaux accoutumés et pour composer de nouvaux ouvrages qui ont ajouté de plus en plus à ma réputation, de manière à me procurer bientôt une existence honorable et une petite fortune dont les débris, après de nouvelles révolutions qui m'ont causé de grandes pertes, suffisent encore pour pouvoir aux besoins de ma vieillesse, et suffiront pour pouvoir à ceux de ma femme bienaimée quand je n'y serai plus ... Je vais bientôt entrer dans ma 81[e] année et, à cet âge, il faut s'appliquer forcément l'adage salve senectutem."

Am 7. Juli 1832 disputierte Jacobi, nachdem das Ministerium seine am 25. Mai ausgesprochene Bitte gewährt hatte, ihn von einer der beiden Disputationen pro loco extraordinario et ordinario zu entbinden, da sich niemand zur Übernahme der Opposition bereit erklärt habe. Die zum Zwecke des Eintritts in die philosophische Fakultät der Universität gedruckte Abhandlung war betitelt: „Commentatio de transformatione integralis duplicis indefiniti

$$\int \frac{d\varphi\, d\psi}{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi}$$

in formam simpliciorem $\int \frac{d\eta\, d\vartheta}{G - G'\cos\eta\cos\vartheta - G''\sin\eta\sin\vartheta}$, quam auctoritate A. Ordinis philosophorum pro loco in eo rite obtinendo d. VII. Julii 1832 H. h. a. c. publice defendet Carolus Gustavus Jacobus Jacobi Ph. Dr. Math. P. P. O. Academiarum Parisiensis, Berolinensis, Petropolitanae sodalis, assumpto ad respondendum socio Herrmanno Henrico Haedenkamp, Halensi, opponentibus Julio Eduardo Czwalina, Tolkensi, Augusto Rudolpho Luchterhand, Mariaeinsulano Regiomonti", und bildete den ersten Teil der bereits im Crelleschen Journal veröffentlichten Arbeit über die Transformation der Doppelintegrale. Die Verteidigung der ihr vorgedruckten Thesen: 1. Mathesis est scientia eorum, quae per se clara sunt, 2. Principium methodi geometricae et analyticae idem est, 3. Per theoriam functionum illustrissimi

Lagrange analysis infinite parvi non refutatur sed demonstratur, leitete Jacobi mit einer interessanten Rede ein, welche sich im Nachlasse seines Freundes Neumann vorgefunden: „Prorector magnifice, decane spectabilis, professores doctoresque clarissimi atque doctissimi, commilitones ornatissimi, auditores omnium ordinum honoratissimi.

Ex quo primum ad artem analyticam accuratius cognoscendam animum appuli atque exemplaria mathematicorum assidua manu evolvi, magnum illud admiratus sum et stupendum opus mentis humanae, quod mathesis nomine usurpamus. Nam si id jam celebramus atque posteritati commendamus, quoties Rex aut Imperator aedificii alicujus prae ceteris decori fundamento vel unum infixerit lapidem — habemus jam aedem amplam paene ad astra usque exstructam, cujus singulos lapides alios post alios per tantam saeculorum seriem struxerunt regia illa et imperatoria ingenia, quibus gloriatur genus humanum et saeculum, quod illustraverunt. Eo magis miratus sum errorem singularem, in quem video incidere viros non sane contemnendos aut rerum mathematicarum expertes, qui quasi caeci judicent de coloribus, sed viros eximios, ipsos adeo mathematicos praestantissimos, errorem dico, huic tantae disciplinae suum deesse sibi insitum principium progressionis; fieri scilicet rerum mathematicarum progressum, quoties hoc vel illud problema de mundo naturali petitum seu quaestio physica mathematicorum labores provocat. Tristis sane et deplorabilis sors disciplinae, sancto illo nomine indignae, quae e libera facta esses serva, e filia numinis divini, mentis humanae gloriam manifestante, ipsa mentis expers, ipsa nescia quid tibi velis, non proprio ac superbo volatu altum petens, sed dominae jussu alienae huc illuc dirigens gressus incertos ac titubantes. Permittatis velim, Auditores omnium ordinum honoratissimi pro humanitate vestra, quam imploro in re delicata et variis difficultatibus obnoxia, ut paucis erroris istius fontem detegam.

Et mundus naturalis et homo sibi conscius a Deo O. M. creati sunt; eaedem leges aeternae mentis humanae, eaedem naturae; quae est conditio, sine qua non intelligibilis esset mundus, sine qua nulla daretur rerum naturae cognitio. Missum hic faciamus ideas logicas quatenus expressas habet natura, quam hoc respectu habito considerant philosophi recentiores (ut verbo usitato utar et nimis usitato) tanquam logicam petrefactam. Consideremus naturam quatenus leges exprimat mathematicas. Non solis sensibus externis per tantam phaenomenorum varietatem et quasi tumultum dignosci potuit lex moderatrix, cui prorsus illa aut proxime obtemperant, nisi ipse accesseris ad contemplationen naturae ea fide et persuasione, ut mentis conceptiones tuas in ea expressas invenias. Leges naturae insitae mathematicae percipi non potuerunt, nisi jam proprio motu mentis humanae e legibus ei insitis exstructa esset mathesis. Corpora coelestia in sectionibus proxime conicis solem ambire non intellectum esset, nisi aeternum sectionum conicarum schema observabatur Graecorum ingenio. Quod Keplerus detexit stellae Martis moderari maeandros, idem jam Apollonii subtilitas mente conceperat, et praemeditata erat. Quantum in explicanda arte proficit mens humana, tantum natura etiam suam ei explicat sibi insitam mathesin.

Crescunt disciplinae lente tardeque, per varios errores sero pervenitur ad veritatem, omnia praeparata esse debent diuturno et assiduo labore ad introitum veritatis novae; jam illa, certo temporis momento, divina quadam necessitate coacta emergit; praeparatis omnibus causa levissima accidens, quamvis remota quaestio physica eam elicere valet. Num hanc ob rem quaestioni physicae debemus incrementa, quae veritate nova in lucem proiata disciplina capit? Cur hodie applicas calculum? Num hoc die primum proponitur a natura problema? — Sedet Sphinx illa inde a creatione mundi, sedebit in sempiternum, proponit aenigmata generi mortalium; at suo tantum tempore venit Oedipus ab Apolline missus.

Errorem, in quem diximus magnos etiam incidisse geometras, in eo videmus consistere, quod non probe distinctum sit inter causas veras et causas accidentes; sive ut viri medici aiunt, inter causas proximas et causas remotas. Novimus, Eulerum olim e passu Virgiliano describente fluctuantes proras, puppes littore stantes, occasionem cepisse Hydraulicae condendi analyticae fundamenta. Exstat de Neutono lepida fabula, pomum super nares dormitantis incidens dedisse viro occasionem detegendi gravitatem universalem. Num pomo humi cadenti inest principium illud progressus, num carminibus Virgilianis? Inest ingeniis Neutonorum Eulerorum; inest ingeniis, quae magnos illos viros antecedebant, inest toti historiae artis.

Est causa vera progressus mathesis necessaria ejus explicatio, quae fit secundum leges menti humanae insitas aeternas. Causa accidens esse potest quaestio physica, pomum cadens, passus Virgilianus. Qui de causis illis fortuitis natam putant mathesin similes mihi videntur iis, qui Epicureorum sententia ex atomis per vacuum volitantibus construunt mundum. Contra quos disserens Keplerus narrat se fessum a scribendo animoque intus pulverulento ab atomorum istorum considerationibus vocatum esse ad coenam, apposuisse uxorem acetarium. Quam se interrogasse, num si toto aëre confertae volitarent patinae stanneae, folia lactucae, micae salis, guttae aquae, aceti, olei, ovorum decusses, idque ab aeterno duret, num futurum sit tandem aliquando, ut fortuito tale coeat acetarium; respondisse bellam suam: sed non hoc decore, neque hoc ordine. Neque, cum Kepleriana uxore dico, de phaenomenorum tumultu ac confusione nasci potuit divina illa mathesis structura, omnibus numeris absolutissima, non hoc decore neque hoc ordine.

Geometras Francogallos plerosque, qui prodiere e schola illustris comitis de la Place, his temporibus in errorem illum incidisse, dolemus. Qui dum unicam e quaestionibus physicis mathesis salutem petunt, relinquunt veram illam ac

naturalem disciplinae viam, quam ingressi olim Eulerus et de la Grange, artem analyticam ad id evexerunt, quo nunc gaudet, fastigium. Quo non tantum mathesis pura, sed ipsae quoque ejus ad quaestiones physicas applicationes haud parum detrimenti capiunt. Semper enim arbitratus sum, ista maxime negligentia factum esse, ut magnum illud et inclytum problema de motu corporum coelestium per attractiones mutuas ex orbita elliptica exturbatorum, careat adhuc solutione, quae motibus systematis nostri solaris explicandis satisfaciat. Simulque persuasum habeo, omni studio ac labore excultis et theoria functionum ellipticarum et theoria integralium duplicium, quas ut problemata praecipua nostro tempore in rebus mathematicis proposita specto, fore, ut problematis illius paene desperati solutio vel sua sponte emergat. Theoriam functionum ellipticarum ante hos quatuor annos novis superstruxi fundamentis, itaque novum quasi calculi instrumentum cum Geometris communicavi. Fortasse etiam haec quam publico jam examini subjicio, de integralibus duplicibus commentatiuncula non omnino indigna videbitur hac solemnitate, qua coetui adscribar venerando eruditorum, qui artium plus ultra promovendarum sancto et augusto officio vitam et vigilias consecraverunt.

Jam ad arma vos provoco, juvenes ornatissimi, Czwalina et Luchterhand; surgite et tela contra nos nostraque dirigite, quas evitare studebo et, si fors fert, remittere. Quo in certamine te oro rogoque. Respondens dilectissime, ut fidelis mihi sis armiger, nam fortes ac strenui sunt adversarii. Quos et tu jam ad certamen provoca, ut nostrum pugnandi ardorem cognoscant . . .“

In humoristischer Weise schildert er am 9. August vom Stranddorf Rauschen aus seinem Bruder Moritz den Verlauf der Disputation: „Acht Tage vor meiner Abreise hierher, am 7. Juli, habe ich hier disputirt, wozu ich die Einleitung meiner letzten größeren Abhandlung im Crelle

nahm, von welcher Einleitung von $1^1/_2$ Bogen mir derselbe die nöthige Anzahl Exemplare hatte abziehen lassen; ich selbst ließ dann hier Titel und theses vordrucken, von welchen die vielbesprochenste war: mathesis est scientia eorum, quae per se clara sunt. Man hat hier zwei Opponenten aus den Studenten, einen aus den Professoren und einen respondenten, der vor einem auf einem kleinen Catheder steht und den ersten Anlauf abzuhalten hat. Die Disputation dauerte von $11^1/_2$—$3^1/_2$ Uhr, was mich einigermaßen ermüdete, obgleich ich glücklicherweise den Tag mich des besten Wohlseins und trefflicher Laune zu erfreuen hatte. Ein geistreicher und bedeutender Arzt, mein specieller Freund, Professor Sachs, opponirte extra ordinem gegen den Titel de transformatione integralis duplicis indefiniti, ein indefinitum könne nicht transformirt werden, da es keine Form habe . . . Das Ganze eröffnete ich mit einer fulminanten lateinischen Rede, die mit großem Pathos das Wesen der reinen Mathematik verherrlichte . . . desto froher bin ich, daß mir das Ministerium auf mein Ersuchen eine zweite Disputation geschenkt hatte, denn sonst hätte ich die ganze Geschichte zwei Tage hinter einander halten und aushalten müssen, für die außerordentliche und ordentliche Professur, wie dies immer geschieht. Nach der Disputation war bei mir ein ungeheurer Schmaus von 21 Personen . . . Dein Brief mit der Beschreibung der pittoresken Scene hat mich sehr entzückt, zumal da Crelle von Abel's Arbeiten wenig oder nichts hat lesen können; doch hat er allerdings durch einen glücklichen Instinct ungeheures Verdienst durch die Publication seiner Entdeckungen, sowie er ihn wohl auch pecuniär unterstützt hat. An Legendre hatte ich gleich nach meiner Ankunft hier geschrieben und mich für die Überschickung eines 3. Supplements bedankt, womit er den 3. Band seiner elliptischen Functionen beschließt, der die durch Abel's und meine Arbeiten nöthig gewordenen Ergänzungen enthält. Von diesem 3. Supplement, das mir

schon in Berlin Crelle mitgetheilt, hatte ich in Potsdam eine deutsche Anzeige gemacht, nicht ohne Tiraden, die am Ende des 8. Bandes im Journal steht. Ich habe auch seitdem schon eine sehr liebenswürdige Antwort vom alten Legendre erhalten, die mir zeigte, daß mein Schweigen von $1^1/_2$ Jahren ihn nicht, wie ich fürchtete, gekränkt hat; zugleich schickte er mir wieder eine kleine Schrift über die Parallelentheorie."

Jacobi als ordentlicher Professor an der Universität zu Königsberg vom Juli 1832—Michaelis 1844.

Unmittelbar nach seiner Disputation sandte er am 12. Juli seine so berühmt gewordene Arbeit „Considerationes generales de transcendentibus Abelianis“ an Crelle, in der für die Theorie der Abelschen Funktionen die Grundlage im Abelschen Theorem geschaffen und die Wege für deren spätere Entwicklung vorgezeichnet wurden. „Theoremati antecedenti ut monumento pulcherrimo ingenii admirabilis morte praematura obrepti theorematis Abeliani nomen imponere placet. Ipsas etiam transcendentes $\Pi(x)$ casibus, quibus X ultra ordinem quartum ascendit, transcendentes Abelianas vocare lubet, ut quas ante illum nemo consideraverat. Cl. Abel commentationem de proprietatibus singularibus integralium functionum algebraicarum jam a. 1826 Academiae Parisiensi exhibuit, quam Illustris Academia commentationibus eruditonem alienorum inserendam decrevit. Quarum tamen publicatio cum in dies proferatur, valde optandum esset, ut Illustri Academiae inter ipsas ejus commentationes eam exhibere placeat, vel si forte usus vetat, ut parti certe historicae commentationum inseratur. Quamquam pietatis quodammodo foret, honorem et insuetum tribuere memoriae juvenis eximii, cui ipsos honores Academicos praeclusit fatum irrevocabile. Quod, dum Parisiis agebam, a Cl. Fourier precibus meis concessum, utinam, mortuo viro excellentissimo, illustris ejus successor ratum facere velit.

Schon vor längerer Zeit hatte Jacobi gefunden und in seinen Vorlesungen es ausgesprochen, daß die Umkehrungsfunktion eines hyperelliptischen Integrals eine unendlich kleine Periode besitzen würde und sie gesprächsweise deshalb keine „vernünftige Funktion“ genannt. Lange hatte er vergeblich über ein naturgemäßes Prinzip zur Umkehrung der Integrale algebraischer Funktionen nachgesonnen, bis ihm schon im vorigen Sommer „in hac quasi desperatione“ das Abelsche Theorem den richtigen Weg wies. „Jam rogo, et quaenam sint casu generaliori functiones illae, quarum inversae sunt transcendentes Abelianae, et quomodo de hisce exhibitum audiat theorema Abelianum.“ Um die wahre Natur des Abelschen Theorems und seine Bedeutung für die Frage der Umkehrung deutlich hervortreten zu lassen, spricht er es für hyperelliptische Integrale in der Form aus, daß, wenn X ein Polynom 5. oder 6. Grades bedeutet, und man $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \varphi(x)$, $\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \varphi_1(x)$ setzt, a und b so aus x, y, z algebraisch zusammengesetzt werden können, daß $\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi_1(x) + \varphi_1(y) + \varphi_1(z) = \varphi_1(a) + \varphi_1(b)$ ist; setzt man nun $\varphi(x) + \varphi(y) = u$, $\varphi_1(x) + \varphi_1(y) = v$, $x = \lambda(u, v)$, $y = \lambda_1(u, v)$, so folgt, daß $\lambda(u + u', v + v')$, $\lambda_1(u + u', v + v')$ sich algebraisch durch $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, $\lambda(u', v')$, $\lambda_1(u', v')$ ausdrücken lassen, und ebenso leicht ergibt sich, daß für hyperelliptische Differentiale die beiden linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen drei Variabeln $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 0$, $\frac{x\,dx}{\sqrt{X}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{Y}} + \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}} = 0$ zwei vollständige algebraische Integrale haben. Ganz ähnlich lauten die entsprechenden Theoreme für hyperelliptische Integrale beliebiger Ordnung.

Aber auch frühere zahlentheoretische Untersuchungen hatte er nun wieder aufgenommen, und ohne noch Be-

weise für die gewonnenen Resultate liefern zu können, sandte er schon einen Tag später, am 13. Juli, eine Arbeit nach Berlin, welche betitelt war: „Observatio arithmetica de numero classium divisorum quadraticorum formae $y^2 + Az^2$, designante A numerum primum formae $4n + 3$". Auf Grund der Gaussschen Sätze über die Pellsche Gleichung und der von diesem entwickelten Theorie der reduzierten Formen führt Jacobi mit Hilfe eines Satzes, den er früher aus der Kreisteilung hergeleitet, die Frage nach den Divisoren der in der Form $y^2 + Az^2$ enthaltenen Zahlen auf die Bestimmung der Klassenanzahl für negative Determinanten zurück und spricht ohne weitere Begründung für eine Primzahl A von der Form $4n + 3$ das Gesetz aus, daß die zu derselben gehörige Klassenzahl N, wenn P die Summe der in den kleinsten positiven Zahlen ausgedrückten quadratischen Reste von A, Q die Summe der Nichtreste ist, durch die Formel bestimmt ist $2N - 1 = \frac{Q - P}{A}$, und entwickelt daraus die Lösung eines von Dirichlet vorgelegten Problems in der Form $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{A-1}{2} \equiv (-1)^N \bmod A$.

„Schon oben", sagt Dirichlet, „ist von Jacobis Untersuchungen über die Kreisteilung und die Anwendungen derselben auf die höhere Mathematik, als zu seinen frühesten Arbeiten gehörend, die Rede gewesen. Bei diesen Untersuchungen, denen er die Form zugrunde legte, welche die zuerst von Gauss gegebene Auflösung der zweigliedrigen Gleichungen später durch Lagrange erhalten hatte, traf er in einigen Resultaten mit dem großen Mathematiker Cauchy zusammen, der zu derselben Zeit mit ähnlichen Forschungen beschäftigt war und dieses Umstandes erwähnte, als er während Jacobis ersten Aufenthaltes in Paris seine Arbeiten im Auszuge veröffentlichte. Aus einem schönen, aus der Kreisteilung abgeleiteten Satze, auf den auch Cauchy gekommen war, und nach welchem alle Primzahlen, die bei der Division durch eine gegebene Primzahl oder das Vier-

fache derselben die Einheit zum Reste lassen, auf eine bestimmte Potenz erhoben, deren Exponent bloß von der letzteren Primzahl abhängt, durch die sogenannte quadratische Hauptform dargestellt werden, welche die negativ genommene gegebene Primzahl zur Determinante hat, schöpfte Jacobi die Vermutung, daß jener Exponent mit der Anzahl der voneinander verschiedenen quadratischen Formen übereinstimmen müsse, welche der erwähnten Determinante entsprechen. Da sich diese Vermutung in allen numerischen Beispielen bestätigte, so trug er kein Bedenken, diese Bemerkung in einer kurzen Notiz zu veröffentlichen. Ich glaube den bisher unbekannt gebliebenen Ursprung dieses Resultates nach Jacobis mündlicher Mitteilung als ein merkwürdiges Beispiel scharfsinniger Induktion hier erwähnen zu müssen, obgleich der strenge Beweis desselben nicht auf die Kreisteilung gegründet werden zu können, sondern wesentlich verschiedene, der Integralrechnung und der Reihenlehre entnommene Prinzipien zu erfordern scheint, die erst später in die Wissenschaft eingeführt worden sind",

und über dieselbe kurze Note Jacobis spricht sich später Kummer in seiner Gedächtnisrede auf Dirichlet in den Worten aus:

„Eine der bedeutendsten und glänzendsten Entdeckungen Dirichlets ist die Bestimmung der Klassenanzahl der quadratischen Formen für eine jede gegebene Determinante. Obgleich der Ruhm dieser großen Entdeckung Dirichlet allein gehört, insofern er sie vollständig aus seinem eignen Geiste geschöpft hat, so kann doch ein gewisser Anteil, welchen Jacobi und Gauss daran haben, nicht unerwähnt gelassen werden. Jacobi hatte aus der Vergleichung gewisser Sätze der Kreisteilung und der Zusammensetzung der quadratischen Formen die Klassenanzahl für diejenigen Formen, deren Determinante eine negative Primzahl ist, schon einige Jahre früher mehr erraten als erschlossen, und da eine Reihe berechneter Zahlenbeispiele seine Vermutung

bestätigten, so hatte er sie auch veröffentlicht. Gauss aber war, wie die von ihm hinterlassenen Papiere gezeigt haben, schon seit längerer Zeit im Besitze des vollständigen Ausdrucks der Klassenanzahl für negative Determinanten.“

Die Herbstferien verbrachte Jacobi in angestrengtester Arbeit in der Nähe von Königsberg, und war, zum Teil durch Bessel veranlaßt, bemüht, die Anwendbarkeit und Bedeutung seiner elliptischen Transzendenten für die Geometrie und Mechanik durch die Behandlung spezieller Probleme nachzuweisen. Sogleich mit Beginn des Wintersemesters, für welches er die Fortsetzung der allgemeinen Theorie der Oberflächen und eine Vorlesung über elliptische Transzendenten angekündigt, schickte er am 1. November 1832 die „De transformatione et determinatione integralium duplicium commentatio tertia“ betitelte Arbeit an Crelle. Es handelt sich in dieser Arbeit vorzüglich um Anwendungen der Transformationen:

$$\cos\eta = \frac{m\cos\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + p^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}},$$

$$\sin\eta\cos\vartheta = \frac{n\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + p^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}},$$

$$\sin\eta\sin\vartheta = \frac{p\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + p^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}},$$

nachdem zunächst gezeigt worden, daß, wenn $m\cos\varphi$, $n\sin\varphi\cos\psi$, $p\sin\varphi\sin\psi$ durch beliebige Funktionen u, v, w der Variabeln φ und ψ ersetzt werden, für die entsprechenden Substitutionen das Element der Kugelfläche die Form annimmt $dS = \sin\eta\, d\eta\, d\vartheta = \frac{d\varphi\, d\psi}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}$ mal der aus u, v, w und deren partielle Differentialquotienten nach φ und ψ gebildeten Determinante.

Wenn U eine paare rationale Funktion von $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ bedeutet, so führt die obige Sub-

stitution das Doppelintegral

$$\iint \frac{U \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + p^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}}$$

in

$$\frac{1}{m\,n\,p}\iint \frac{U \sin\eta\, d\eta\, d\vartheta}{\frac{\cos^2\eta}{m^2} + \frac{\sin^2\eta\cos^2\vartheta}{n^2} + \frac{\sin^2\eta\sin^2\vartheta}{p^2}}$$

mit rationalem Argument und dem gleichen Charakter von U in $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ über, woraus leicht folgt, daß, wenn R außer den Quadraten von $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ auch noch die Produkte je zweier enthält und U eine beliebige ganze Funktion derselben bedeutet, das über die ganze Kugel ausgedehnte Doppelintegral $\iint \frac{U\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{R^{\frac{2n+1}{2}}}$ entweder algebraisch oder durch elliptische Integrale ausdrückbar ist, und Beziehungen hergeleitet werden können, welche bekannten Cauchyschen Relationen für die Reduktion von Doppelintegralen auf einfache ihre Entstehung geben. Eine interessante Anwendung bildet die Bestimmung der Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoids $m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2 = 1$ durch elliptische Integrale 1. und 2. Gattung in der Form

$$S = 2\pi\left(\frac{\sin^2 w\, E(w) + \cos^2 w\, F(w)}{n\,p\sin w} + \frac{1}{m^2}\right),$$

wenn $\cos w = \frac{p}{m}$, $\Delta(w) = \frac{n}{m}$, $\varkappa^2 = \frac{m^2 - n^2}{m^2 - p^2}$ ist, welche bereits Legendre, aber nur durch Benutzung von damals sehr verborgenen Eigenschaften der elliptischen Integrale 3. Gattung gefunden hatte. Jacobi folgert ferner leicht aus den von ihm aufgestellten Transformationsformeln die von Legendre entdeckte Relation zwischen den Periodizitätsmoduln der elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung und leitet aus der curvatura integra eines von 4 Krümmungslinien des dreiachsigen Ellipsoids eingeschlossenen Rechtecks die Reduktion der Rektifikation der Krümmungslinien auf Abelsche Trans-

zendenten her. Es wird endlich noch das Problem behandelt, die Koeffizienten der linearen Substitutionen $u = g\,x + h\,y + i\,z$, $v = g'\,x + h'\,y + i'\,z$, $w = g''\,x + h''\,y + i''\,z$ und die Größen m, n, p zu finden, welche die beiden Ausdrücke $A = a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + 2d\,y\,z + 2e\,z\,x + 2f\,x\,y$, $A' = a'\,x^2 + b'\,y^2 + c'\,z^2 + 2d'\,y\,z + 2e'\,z\,x + 2f'\,x\,y$ in die einfacheren Formen $A = u^2 + v^2 + w^2$, $A' = \frac{u^2}{m^2} + \frac{v^2}{n^2} + \frac{w^2}{p^2}$ transformieren, was, wie aus den Substitutionen $\sqrt{a} \cdot x = x'$,

$$\sqrt{b} \cdot y = y', \quad \sqrt{c} \cdot z = z', \quad \frac{d}{\sqrt{b\,c}} = \cos\lambda, \quad \frac{e}{\sqrt{c\,a}} = \cos\mu,$$

$\frac{f}{\sqrt{a\,b}} = \cos\nu$ ersichtlich ist, mit dem geometrischen Probleme zusammenfällt, die Hauptachsen eines Ellipsoids zu finden, dessen Gleichung $A' = 1$ ist, wenn x', y', z' die schiefen Koordinaten bedeuten, welche unter sich die Winkel λ, μ, ν bilden. Mit Hilfe der so gewonnenen Transformationsformeln werden wiederum Reduktionen von Doppelintegralen aufeinander, und für bestimmte Grenzen auf einfache Integrale ausgeführt, und das wichtige Theorem hergeleitet, daß, wenn $U = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi\cos^2\psi + c\sin^2\varphi\sin^2\psi + 2d\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\psi + 2e\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi + 2f\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi$ und ein analoger Ausdruck U', dessen Koeffizienten mit $a', b', \ldots$ bezeichnet werden, vorgelegt sind, und $(a + a'x)(b + b'x)(c + c'x) - (a + a'x)(d + d'x)^2 - (b + b'x)(e + e'x)^2 - (c + c'x)(f + f'x)^2 + 2(d + d'x)(e + e'x)(f + f'x) = \mathrm{X}$ gesetzt wird,

$$\int\!\!\int \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{U'\sqrt{U}} = 2\pi \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}$$

ist, wenn das Doppelintegral von $\varphi = 0, \psi = 0$ bis $\varphi = \pi$, $\psi = 2\pi$ ausgedehnt wird.

Den Anwendungen von der Transformation der elliptischen Integrale auf Geometrie folgten immer wichtigere und schwierigere auf Mechanik und Astronomie; am 28. Dezember 1832 schreibt er seinem Bruder: „ich arbeite jetzt

an einer großen Abhandlung über die Anziehung der Ellipsoide, worüber ich selbst nach den Arbeiten von Newton, Maclaurin, d'Alembert, Lagrange, Legendre, Laplace, Ivory, Gauss, die darüber gehandelt, viel interessantes gefunden habe. Doch macht mir die Ausarbeitung eine ungeheure Mühe, denn es ist schwer, alles auf das beste zu machen, nachdem es gemacht ist, und erstes verlangt man ..."; er machte jedoch zunächst seine umfangreichen Untersuchungen über diesen Gegenstand nicht druckfertig und teilte nur die wesentlichsten Resultate derselben seinen Freunden Bessel, Dirichlet und Steiner mit. „Eine große Abhandlung", sagt Dirichlet, „welche die Attraktion der Ellipsoide zum Gegenstande hat, obgleich seit langer Zeit beinah vollendet, ist bisher ungedruckt geblieben und nur durch einige gelegentliche Notizen bekannt geworden. Als er sich mit dem erwähnten Problem beschäftigte, kam er auch auf den schönen, von Poisson um dieselbe Zeit gefundenen Satz, nach welchem die Anziehung, welche eine unendlich dünne, von zwei konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden ellipsoidischen Flächen begrenzte Schale auf einen Punkt im äußern Raume ausübt, ohne Integralzeichen dargestellt werden kann. Jacobi hat dieses Umstandes nie öffentlich Erwähnung getan, obgleich er sich dabei auf das Zeugnis mehrerer Mathematiker hätte berufen können, denen er den Satz mitgeteilt hatte, ehe die erste Anzeige der Poissonschen Abhandlung erschienen war."

Neben der intensivsten produktiven Thätigkeit gestaltete sich Jacobis Wirksamkeit als Lehrer und Leiter des mathematischen Seminars immer erfolgreicher; im September 1832 wurde sein frühester und von ihm sehr geliebter Schüler, Richelot, welcher seit 1825 unter der Führung Jacobis studiert und 1831 sich habilitiert hatte, zum außerordentlichen Professor ernannt. „Mit meiner akademischen Wirksamkeit", schreibt Jacobi seinem Bruder, „habe ich Grund sehr zufrieden zu sein; so habe ich neulich mit einer eignen

Abhandlung 3 meiner Schüler an Crelle geschickt und mehrere sehr ausgezeichnete sind noch zurück."

Aber auch in der Fakultät stand er bei seinen Kollegen in hohem Ansehen, und sein Einfluß in derselben wurde immer größer; er freute sich, daß der durch seine Initiative von Bessel, Neumann und ihm gestellte Antrag, Jacob Steiner, damals Lehrer an der Gewerbeschule zu Berlin, die Doktorwürde honoris causa zu erteilen, trotz mancher Bedenken von der Fakultät einstimmig angenommen und so seinem alten Freunde eine wissenschaftliche Ehrung zuteil wurde, auf die derselbe, wie er wußte, einen großen Wert legte. „Durch Deinen Dr.", schreibt ihm Steiner am 14. Juli 1833, „hast Du Dich unter den Einwohnern Berlins sehr populär gemacht; alle blicken über mich hinweg hinaus nach dem, der solches an mir gethan, des Erkundigens war kein Ende; daher schreibe ein Drittel meines Dankes auf Deine eigne Rechnung. Oder besteht die Größe und das Glück eines Menschen (titre de gloire) nicht in der Seelen- (oder Körper-) Zahl Anderer, welches veranlaßt an ihn zu denken? Der Prof. ist aber keine Folge des Dr., wie Du leicht glauben könntest, sondern beide wurden mir fast gleichzeitig verkündet. Der arme Jacob hat jetzt Mühe, sich und diese beiden mit seinen 700 Thalern anständig oder standesgemäß zu erhalten."

Am Schluß des Wintersemesters 1832/33, in welchem ihm die Freude zuteil geworden, Mitglied der Royal Society in London und Ehrenmitglied der Académie des Sciences in Petersburg zu werden, sandte er noch am 27. März eine kurze Note an Crelle, betitelt „Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn Prof. Scherk über die Integration der Gleichung $\frac{d^n y}{dx^n} = (\alpha + \beta x) y$", in welcher das von Scherk gefundene allgemeine Integral auf die Form gebracht wird:

$$y = \int_0^\infty dt\, e^{-\frac{t^{n+1}}{n+1}} \left[C e^{tx} + C_1 \varrho e^{\varrho t x} + C_2 \varrho^2 e^{\varrho^2 t x} + \cdots + C_n \varrho^n e^{\varrho^n t x} \right],$$

worin ϱ eine $n+1^{te}$ primitive Einheitswurzel und $C, C_1, .. C_n$ beliebige Konstanten bedeuten, welche der Bedingung $C + C_1 + \cdots + C_n = 0$ unterliegen, und nun widmete er die Osterferien fast ganz der Vorbereitung zu einer öffentlichen Vorlesung über Variationsrechnung, die er nebst einer privaten über die Theorie der Oberflächen 2. Ordnung für das Sommersemester 1833 angekündigt hatte.

Von der letzteren besitzen wir unter dem Titel „Analytische Geometrie des Raumes" eine Nachschrift von Hesse, welche sich auf der Staatsbibliothek in München befindet: Nach Entwicklung einiger Fundamentalsätze der analytischen Geometrie und der Transformationsformeln der Koordinaten, welche sich Hesse wahrscheinlich zum besseren Verständnis des folgenden auf den ersten Blättern seines Kollegienheftes notiert hatte, findet sich darin zunächst wieder eine Aufzeichnung der von Jacobi gegebenen Einleitung, in welcher der Unterschied zwischen der synthetischen und analytischen Geometrie hervorgehoben, zugleich aber die Notwendigkeit der Verbindung beider Methoden für die weitere Entwicklung der Geometrie betont wird. „Von größtem Nutzen ist die analytische Geometrie, um Sätze der reinen Geometrie zu beweisen, während sie sich weniger dazu eignet, Sätze zu finden." Die Vorlesung behält zuerst einen ganz elementaren Charakter, entwickelt die analytischen Beziehungen der geraden Linie und der Ebene, und erläutert die einzelnen Sätze an einfachen Aufgaben der analytischen Geometrie des Raumes; vielfach finden sich schon hier Randbemerkungen des 22 jährigen Hesse, welche ein wenig komplizierte Betrachtungen durch einfache und elegante Deduktionen ersetzen. Sehr ausführlich geht Jacobi auf die Transformation räumlicher Koordinatensysteme aufeinander ein und auf die Eulersche Darstellung der Koeffizienten der Transformationsformeln durch drei Größen; erst in der Mitte des Sommersemesters beginnt er die Theorie der Oberflächen 2. Ordnung zu entwickeln, indem er die all-

gemeine Flächengleichung 2. Grades nach sehr einfachen, jetzt allgemein bekannten Methoden diskutiert, und behandelt die Eigenschaften der einzelnen Klassen der Oberflächen 2. Ordnung. Die ganze Vorlesung hat einen durchaus elementaren Charakter und war offenbar nur für Anfänger bestimmt, zeichnet sich aber — wenigstens in der vorliegenden Ausarbeitung von Hesse — durch Knappheit der Darstellung und Eleganz der Rechnung aus.

Erst in den Herbstferien kam er wieder dazu, einiges von dem, was ihn beschäftigte, druckfertig zu machen; nachdem er am 23. August die kurze Note niedergeschrieben: „Demonstratio formulae

$$\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw = \frac{\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx\int_0^\infty e^{-x}x^{b-1}dx}{\int_0^\infty e^{-x}x^{a+b-1}dx} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\text{“},$$

in welcher er den jetzt üblichen Beweis dieser Relation mit Hilfe des Doppelintegrales gab, sandte er noch an demselben Tage die umfangreiche Arbeit „De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicium“ an das Crellesche Journal.

Cauchy hatte gezeigt, daß man eine homogene Funktion zweiten Grades in $x_1, x_2 \cdots x_n$ durch lineare Transformationen $y_m = \alpha_1^{(m)}x_1 + \alpha_2^{(m)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(m)}x_n$, für welche $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$, in eine homogene Funktion 2. Grades in $y_1, \cdots y_n$ verwandeln kann, welche nur die Quadrate der Variabeln enthält, und zwar stellten sich die n Koeffizienten der transformierten Funktion $G_1y_1^2 + G_2y_2^2 + \cdots + G_ny_n^2$ als die Lösungen einer Gleichung n. Grades mit n reellen Wurzeln dar, während die Quadrate und Produkte der Substitutionskoeffizienten $\alpha_1^{(m)}$,

$\alpha_2^{(m)}, \cdots \alpha_n^{(m)}$ rational durch die eine Größe G_m ausdrückbar sind. Jacobi findet nun, daß, wenn in der vorgelegten homogenen Funktion der Koeffizient von $x_\varkappa x_\lambda$ mit p bezeichnet wird, die Substitutionskoeffizienten der Gleichung genügen $\alpha_\varkappa^{(m)} \alpha_\lambda^{(m)} = \frac{\partial G_m}{\partial p}$. Er verallgemeinert aber dieses Problem noch dahin, daß er auch die Summe der Quadrate durch eine beliebige homogene Funktion 2. Grades ersetzt und zwei homogene Funktionen 2. Grades durch dieselben Substitutionen $x_m = \beta'_m y_1 + \beta''_m y_2 + \cdots + \beta_m^{(n)} y_n$ in zwei andere transformiert, welche beide nur die Quadrate der Variabeln enthalten und also die Form haben sollen $G_1 y_1^2 + G_2 y_2^2 + \cdots + G_n y_n^2$ und $H_1 y_1^2 + H_2 y_2^2 + \cdots + H_n y_n^2$; es ergeben sich dann $\frac{G_1}{H_1}, \frac{G_2}{H_2}, \cdots \frac{G_n}{H_n}$ als die Wurzeln einer Gleichung n. Grades, und die entsprechenden Koeffizientenbeziehungen lauten

$$\beta_\varkappa^{(\lambda)} \beta_{\varkappa'}^{(\lambda)} = \frac{H_\lambda \partial G_\lambda - G_\lambda \partial H_\lambda}{H_\lambda \partial p} = \frac{G_\lambda \partial H_\lambda - H_\lambda \partial G_\lambda}{G_\lambda \partial q},$$

wenn in der einen der Koeffizient von $x_\varkappa\, x_{\varkappa'}$ mit p, in der andern mit q bezeichnet wird. Nach Spezialisierung dieser Sätze für bestimmte homogene Funktionen geht Jacobi zur Anwendung derselben auf die Transformation vielfacher Integrale über und findet, daß, wenn zwischen $n-1$ Variabeln $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_{n-1}$ und $n-1$ anderen $v_1, v_2, \cdots v_{n-1}$, deren Quadratsummen der Einheit gleich sind, die früher charakterisierten linear gebrochene Beziehungen mit gemeinsamen Nenner bestehen, für eine beliebig gegebene Funktion 2. Grades W von $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_{n-1}$ das Integral

$$\int^{(n-2)} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{n-2}}{\xi_{n-1} W^{\frac{n-2}{2}}}$$

in

$$\int^{(n-2)} \frac{dv_1\, dv_2 \ldots dv_{n-2}}{v_{n-1}\left[G - G_1 v_1^2 - G_2 v_2^2 - \cdots - G_{n-1} v_{n-1}^2\right]^{\frac{n-2}{2}}}$$

übergeht. Den Beweis dieses Satzes stützt er auf 6 wichtige Theoreme seiner späteren Theorie der Funktionaldeterminanten, nach welchen für eine beliebige Abhängigkeit der ξ von den v unter der Annahme der Beziehung $F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}) = 0$ die Differentialrelation

$$\frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{n-2}}{\frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}}} = \left(\sum \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial v_{n-1}}\right) \frac{d v_1\, d v_2 \ldots d v_{n-2}}{\frac{\partial F}{\partial v_{n-1}}},$$

und für den Fall von zwei Gleichungen $F(\xi_1, \ldots \xi_n) = 0$, $\Phi(\xi_1, \ldots \xi_n) = 0$ die Beziehung

$$\frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{n-2}}{\frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_n} - \frac{\partial F}{\partial \xi_n} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{n-1}}}$$

$$= \left(\sum \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \cdots \frac{\partial \xi_n}{\partial v_n}\right) \frac{d v_1\, d v_2 \ldots d v_{n-2}}{\frac{\partial F}{\partial v_{n-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial v_n} - \frac{\partial F}{\partial v_n} \frac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}}}$$

besteht, und sich ferner unter der Annahme jener linearen Transformationen für die der Einheit gleiche Quadratsumme der Variabeln $\frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}}{\xi_n} = \frac{dv_1 \ldots dv_{n-1}}{v_n}$ ergibt; ähnliche drei Sätze folgen durch Substitution neuer Variabeln. Eine Reihe von Anwendungen dieser Transformationssätze der vielfachen Integrale zeigt auch ihre Bedeutung für die Auswertung derselben und liefert u. a. unter der Annahme $x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_n^2 = 1$ die Beziehung

$$\int^{(n-1)} \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{x_n \left(\frac{x_1^2}{m_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{m_n^2}\right)}$$

$$= \frac{n-2}{2} S \cdot \int_0^\infty \frac{m_1 m_2 \ldots m_n\, dx}{\sqrt{(x + m_1^2)(x + m_2^2) \ldots (x + m_n^2)}},$$

worin $S = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{2.3\ldots(n-2)}$ für gerade n, $S = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{3.4\ldots(n-2)}$ für ungerade n, und das Integral über alle reellen Werte von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ auszudehnen ist.

Die Arbeiten und Vorlesungen Jacobis erstrecken sich nunmehr über immer zahlreichere Gebiete der Mathematik und dehnen sich allmählich auf den ganzen Bereich derselben und deren Anwendung auf Geometrie, Mechanik und Astronomie aus. Für den Winter 1833/34 hatte er zum erstenmal eine große Vorlesung über die Theorie der Zahlen angekündigt, es wurden ferner zahlreiche, zuerst freilich nur von wenigen Mitgliedern besuchte, seminaristische Übungen angestellt, und Jacobi außerdem durch Amtsgeschäfte als Mitglied der wissenschaftlichen Prüfungskommission vielfach in Anspruch genommen, nachdem auf seinen ausdrücklichen Wunsch, mit Bessel in diesem Amte abzuwechseln, das Ministerium ihm diese Frage zur eignen Regelung mit diesem überlassen hatte.

Abgesehen von gelegentlichen Bemerkungen, zu denen ihm seine Vorlesungen Anlaß gaben, und von Ausführungen und Ergänzungen seiner früheren Untersuchungen wendet er sich jetzt immer mehr seinen bahnbrechenden Arbeiten über Mechanik und die Theorie der Differentialgleichungen zu. „Hamiltons Formeln", schreibt er im Januar 1834 an Bessel, „sind natürlich ganz richtig; nur sein Beweis ist nicht ganz vollständig, wie mir scheint, was mich ihn für unrichtig nehmen ließ. Doch vervollständigt er sich leicht. Da das Ganze nur eine Seite einnimmt, worauf es ankommt, sehen Sie es vielleicht einmal an. In demselben Bande hat Ivory bewiesen, wie er sagt, daß ein Ellipsoid mit 3 ungleichen Axen nicht im Gleichgewicht sein kann. Es wird ihn also das Gegenteil interessieren."

Eine Frucht seiner Vorlesung über Zahlentheorie ist die am 14. Februar 1834 an Crelle gesandte kurze Note „De

compositione numerorum e quattuor quadratis", in welcher er zunächst aus den Formeln der Fundamenta leicht den Satz herleitet, daß, wenn n eine ungerade positive Zahl ist, die Anzahl der Lösungen der Gleichung $4n = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$, worin w, x, y, z ungerade positive Zahlen sind, der Summe der Faktoren von n gleich ist. Jacobi liefert aber hier auch einen rein arithmetischen Beweis dieses Satzes, indem er sich auf den Hilfssatz stützt, daß, wenn alle in einer ungeraden Zahl n enthaltenen Primzahlen von der Form $4m + 1$ sind, die Zahl der Lösungen der Gleichung $2n = y^2 + z^2$ gleich ist der Anzahl der Faktoren von n; indem er nun zunächst hieraus den Satz ableitet, daß für eine beliebige unpaare Zahl p die Anzahl der Lösungen der Gleichung $2p = y^2 + z^2$ dieselbe ist als der Überschuß der Anzahl der Faktoren von p von der Form $4m + 1$ über die Anzahl der Faktoren von der Form $4m + 3$, folgert er unmittelbar das aufgestellte Theorem. „Eine andere höchst ergiebige Quelle für die Arithmetik", sagt Dirichlet, „hat Jacobi in der Theorie der elliptischen Funktionen entdeckt, aus welcher er schöne Sätze über die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in 2, 4, 6 und 8 Quadrate, sowie andere über solche Zahlen abgeleitet hat, welche gleichzeitig in mehreren quadratischen Formen enthalten sind. Diese wichtigen Bereicherungen der Wissenschaft sind eine Frucht der oben erwähnten Einführung der Jacobischen Funktion in die Theorie der elliptischen Transzendenten."

Noch von demselben Tage, dem 14. Februar, ist die fundamentale Arbeit datiert: „De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur." Die schon vor längerer Zeit zum Zwecke der Ausdehnung der Transzendentenlehre in seinen Vorlesungen und Briefen ausgesprochenen Sätze werden hier näher begründet; er beweist, daß die Perioden einer doppeltperiodischen Funktion ein komplexes Verhältnis haben müssen, und daß es dreifach periodische Funktionen

einer Variabel überhaupt nicht gibt. Nachdem er sodann für hyperelliptische Integrale erster Ordnung die Relationen für die zwischen den Lösungen des Polynoms genommenen Integrale erster Gattung untersucht, legt er den in seiner Arbeit vom 12. Juli 1832 gemachten Ansatz zugrunde:

$$\int_a^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}} = u,$$

$$\int_a^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{X}} = u';$$

„considerari debent x, y ut radices aequationis quadraticae $Ux^2 - U'x + U'' = 0$, in quibus U, U', U'' sunt functiones ipsarum u, u'." Es kulminiert diese wunderbare Arbeit in dem Theorem: „Posito $X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)$, statuatur

$$2\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{X}} = i_1\sqrt{-1},\ 2\int_0^1 = i_2,\ 2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} = i_3\sqrt{-1},\ 2\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} = i_4,$$

$$2\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{X}} = i_1'\sqrt{-1},\ 2\int_0^1 = i_2',\ 2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} = i_3'\sqrt{-1},\ 2\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} = i_4';$$

considerentur x, y ut functiones ipsarum u, u', $x = \lambda(u, u')$, $y = \lambda'(u, u')$, datae per aequationes (supra designatas)..., erit

$$\lambda(u + m i_1 + m' i_2 + m'' i_3 + m''' i_4,$$
$$u' + m i_1' + m' i_2' + m'' i_3' + m''' i_4') = \lambda(u, u')$$
$$\lambda'(u + m i_1 + m' i_2 + m'' i_3 + m''' i_4,$$
$$u' + m i_1' + m' i_2' + m'' i_3' + m''' i_4') = \lambda'(u, u'),$$

quicunque sint m, m', m'', m''' numeri integri positivi aut negativi ..... E theoremate Abeliano constat, positis $x = \lambda(u, u')$, $y = \lambda'(u, u')$, functiones $x_n = \lambda(nu, nu')$, $y_n = \lambda'(nu, nu')$ datas esse ut radices aequationis quadraticae

$U_n x^2 - U_n' x + U_n'' = 0$, in qua U_n, U_n', U_n'' sunt functiones ipsarum x, y, $\sqrt{X}$, $\sqrt{Y}$ rationales, si Y ipsius y eadem functio atque X ipsius x. Unde etiam patet, vice versa x, y e x_n, y_n per resolutionem aequationum algebraicarum obtineri. Quarum ordinem e theoremate fundamentali jam conjicis fore n^4. Quod pro $n = 2$ e theoremate Abeliano facile probas; atque idem adeo theorema facile suggerit resolutionem aequationis 16ti gradus, quae in bisectione requiritur, per solas extractiones radicum quadraticarum. Quod alia occasione persequemur."

Aus dieser Zeit stammt auch die aus seinen hinterlassenen Papieren von Richelot mitgeteilte Aufzeichnung „Über die Substitution $(ax^2 + 2bx + c)y^2 + 2(a'x^2 + 2b'x + c')y + a''x^2 + 2b''x + c'' = 0$ und über die Reduktion der Abelschen Integrale erster Ordnung in die Normalform", für welche der zweite Teil des Titels von dem Herausgeber hinzugefügt worden ist. Durch Differentiation dieser Substitution folgt unmittelbar, wenn $X = (a'x^2 + 2b'x + c')^2 - (ax^2 + 2bx + c)(a''x^2 + 2b''x + c'')$ und $Y = (by^2 + 2b'y + b'')^2 - (ay^2 + 2a'y + a'')(cy^2 + 2c'y + c'')$ gesetzt wird, $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, und Jacobi untersucht nun mit Hilfe eben dieser Substitution die Transformation der Abelschen Integrale erster Ordnung und deren Zurückführung auf die Normalform; er findet, daß die Substitution

$$x = \frac{y-1}{\mu(y+1)}, \quad y^2 = \frac{4(t^2 - t^4)}{(m+n)^2 - 4mnt^2} = \frac{4(t'^2 - t'^4)}{(m+n)^2 - 4mnt'^2},$$

wenn $X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)$, $F(t) = (t^2 - \alpha^2)(\beta^2 - t^2)(\beta'^2 - t^2)(\alpha'^2 - t^2)$ gesetzt wird, die Transformationsgleichung liefert:

$$\int \frac{(f+gx)dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{(f' \mp g't^2)dt}{\sqrt{F(t)}} + \int \frac{(f' \mp g't'^2)dt'}{\sqrt{F(t')}},$$

worin sich f' und g' linear durch f und g bestimmen, und welche das Analogon darstellt für die Landensche Transformation der elliptischen Integrale auf die Normalform.

Die im Sommersemester 1833 gehaltene Vorlesung über die Oberflächen 2. Ordnung sowie geometrische seminaristische Übungen gaben ihm vielfach Anlaß, mit Steiner über Fragen geometrischer Natur in Korrespondenz zu treten, und es kam einer dieser Briefe Jacobis aus dem Sommer 1834 zur Veröffentlichung. Von den in diesem und in früheren Schreiben an Steiner ausgesprochenen und zum Teil in seinen Vorlesungen gegebenen Sätzen fanden sich die Beweise in seinen nachgelassenen Papieren vor und wurden unter dem Titel „Geometrische Theoreme" im Jahre 1871 von Hermes veröffentlicht. Als unmittelbare Folge des Theorems von Ivory, daß die Verbindungslinie beliebiger zwei in konfokalen Ellipsen oder Ellipsoiden liegender Punkte gleich der Verbindungslinie der beiden ihnen in denselben Ellipsen oder Ellipsoiden konjugierten Punkte ist, leitet er u. a. den Satz her, daß, wenn man über zwei festen Basen gg' und ff' mit denselben Schenkeln $Qg = Pf$, $Qg' = Pf'$ Dreiecke beschreibt und die Spitze Q des einen Dreiecks eine beliebig gegebene gerade Linie durchlaufen läßt, die Spitze P des anderen Dreiecks einen Kegelschnitt beschreibt, und weiter das interessante Theorem, daß, wenn zwei den beliebig gegebenen Dreiecken ABC und $A'B'C'$ umgeschriebene Kegelschnitte gleiche Exzentrizität haben, und in ihnen A und A', B und B', C und C' konjugierte Punkte sind, ihre Mittelpunkte O und O' sich als die Schwerpunkte von A, B, C und von A', B', C' darstellen, wenn man in diesen drei Punkten resp. die Gewichte $u(v+w-u)$, $v(w+u-v)$, $w(u+v-w)$ anbringt, worin $u = BC^2 - B'C'^2$, $v = CA^2 - C'A'^2$, $w = AB^2 - A'B'^2$ ist, und es wird zugleich die Differenz der Quadrate der halben großen oder der halben kleinen Achsen der Kegelschnitte gleich

$$\frac{uvw}{2(vw + wu + uv) - u^2 - v^2 - w^2}$$

gefunden — Folgerungen aus diesen Sätzen werden zu Kriterien für die Kegelschnitte verwendet. Jacobi geht sodann

zur Ausdehnung aller dieser Theoreme auf die Flächen 2. Grades über und findet wiederum mit Hilfe des Ivoryschen Satzes, daß, wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$, und in der Ebene ABC ein beliebiger Punkt Q gegeben sind, und man konstruiert über der Basis $A'B'C'$ mit den Kanten $A'P = AQ$, $B'P = BQ$, $C'P = CQ$ eine Pyramide, der Punkt P, wenn der Punkt Q sich in der Ebene des Dreiecks ABC fortbewegt, eine Fläche 2. Ordnung beschreibt, deren eine Hauptebene die Ebene der Basis $A'B'C'$ ist, und deren eine Fokalkurve dem Dreiecke $A'B'C'$ umgeschrieben ist; die Art der Fläche 2. Ordnung wird sodann bestimmt durch die Beziehung der Seiten der beiden Dreiecke zueinander. Aus dem Satze, daß, wenn ein Ellipsoid und ein einfaches Hyberboloid konfokal sind und man aus irgendeinem Punkte des Hyperboloids einen Berührungskegel an das Ellipsoid legt, die durch denselben Punkt gehenden zwei Strahlen des Hyperboloids die Brennlinien dieses Kegels sind, leitet er eine Reihe weiterer, zum Teil schon früher von Steiner aufgestellter Sätze wieder lediglich aus dem Ivoryschen Theorem her und schließt seinen Brief mit der interessanten Bemerkung, die später vielfach in anderer Form zum Vorschein kam, daß nämlich aus dem Ivoryschen Satze hervorgehe, daß die Kurve von doppelter Krümmung, in welcher zwei Flächen 2. Grades einander schneiden, auch räumliche Brennpunkte haben kann, und daß es also z. B. für jede Krümmungskurve des Ellipsoids zwei bestimmte feste Punkte gibt, die leicht zu konstruieren sind, von der Beschaffenheit, daß die Summe ihrer Distanzen von jedem Punkte der Kurve konstant ist, worauf sich eine leichte organische Erzeugung der Krümmungskurve gründen läßt.

Aus eben dieser Zeit stammt noch die, wahrscheinlich im Anschluß an eine im Seminar gestellte Aufgabe, gemachte Aufzeichnung, welche aus seinen hinterlassenen Papieren Hermes viel später unter dem Titel „Regel zur Bestimmung

des Inhaltes der Sternpolygone“ publizierte; wenn die Seiten eines Vielecks sich schneiden, so entsteht ein Sternpolygon, und da hierin mehrere geschlossene Räume vorkommen, so hört die gewöhnliche Entwicklung für den Inhalt ebener Figuren für solche Vielecke auf. Jacobi nennt nun den Inhalt des Sternpolygons den algebraischen Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_3 - y_2 x_3 + \cdots + x_n y_1 - y_n x_1)$$

und fragt, da dieser Ausdruck nicht mehr der Summe der einzelnen durch das Polygon gebildeten Räume gleich ist, nach der geometrischen Bedeutung desselben; er ist imstande, eine geometrische Regel anzugeben, nach welcher der Inhalt des Sternpolygons jedesmal gefunden werden kann, vorausgesetzt, daß niemals durch einen Punkt mehr als zwei Seiten gehen.

Die im Sommer gehaltene Vorlesung über die analytische Theorie der Wahrscheinlichkeit rief zwei kleinere Arbeiten hervor, von denen die erstere, datiert vom 2. Juni, den Titel hat: „De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae“ und sich mit der Bestimmung des Restes einer unendlichen semikonvergenten Reihe durch bestimmte Integrale beschäftigt. Die von Maclaurin aufgestellte Beziehung, nach welcher, wenn $x - a$ ein Multiplum von h,

$$f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(x)$$

$$= \int_0^x dx \left\{ \frac{f(x)}{h} + \frac{1}{2} f'(x) + \alpha_1 f''(x) h - \alpha_2 f''''(x) h^3 + \cdots + (-1)^{m+1} \alpha_m f^{(2m)}(x) h^{2m-} \right\}$$

ist, worin die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ durch die Entwicklung bestimmt sind $\frac{1}{2} + \frac{1}{e^h - 1} = \frac{1}{h} + \alpha_1 h - \alpha_2 h^3 + \alpha_3 h^5 - \cdots,$ berichtigt Jacobi dahin, daß der Summe auf der linken Seite der Posten

$$\int_0^h \left\{ \frac{(h-t)^{2m+2}}{h(2m+2)!} - \frac{1}{2} \frac{(h-t)^{2m+1}}{(2m+1)!} + \alpha_1 \frac{(h-t)^{2m} h}{(2m)!} - \alpha_2 \frac{(h-t)^{2m-2} h^3}{(2m+2)!} \right.$$

$$\left. + \cdots + (-1)^{m+1} \alpha_m \frac{(h-t)^2 h^{2m-1}}{2!} \right\} \sum_a^x f^{(2m+2)}(x-t)\, dt$$

hinzugefügt werden muß, der auch noch in anderer Gestalt dargestellt werden kann. Als wesentlichstes Theorem folgert er hieraus, daß, so oft der Ausdruck $\sum_a^x f^{(2m+2)}(x-t)$ für alle positiven Werte von t zwischen 0 und h weder unendlich wird, noch sein Zeichen ändert, der Überschuß der bis zum $m+2^{\text{ten}}$ Gliede fortgeführten Summationsreihe über den Wert der vorgelegten Summe

$$\int_0^x dx \left\{ \frac{f(x)}{h} + \frac{1}{2} f'(x) + \alpha_1 f''(x) h - \cdots + (-1)^{m+1} \alpha_m f^{(2m)}(x) h^{2m-1} \right\} - \sum_a^x f(x)$$

dasselbe Zeichen haben wird wie $\sum_a^x f^{(2m+2)}(x-t)$, wenn m ungerade, das entgegengesetzte, wenn m gerade ist.

Am 30. Juni sendet er ferner eine zweite, die Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffende, kurze Note: „De fractione continua, in quam integrale $\int_x^\infty e^{-x^2} dx$ evolvere licet“ an Crelle. Um die von Laplace mittels divergenter Reihen gefundene Entwicklung

$$\int_x^\infty e^{-x^2} dx = \frac{e^{-x^2}}{2x} \cdot \cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+3q\cdots}}}$$

worin $q = \frac{1}{2x^2}$, auf strengem Wege zu ermitteln, setzt Jacobi $v = e^{x^2} \int_x^\infty e^{-x^2} dx$ und leitet für $v_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n v}{dx^n}$ die Rekursionsformel $(n+1) v_{n+1} = 2x v_n + 2 v_{n-1}$ her, aus welcher sich, wenn $(-1)^n 2 x^{n+1} v_n = y_{n+1}$ gesetzt wird, die unmittelbar ersichtliche Beziehung $\frac{1}{y_1} = 1 + \cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cdots}}$ ergibt.

Noch immer trat von seinen Untersuchungen über die Theorie der Differentialgleichungen und die Prinzipien der Mechanik, in die er sich schon seit längerer Zeit vertieft hatte, nichts in die Öffentlichkeit; eine höchst wichtige und interessante, die Hydrostatik betreffende Arbeit, welche er in Potsdam, wo er während der letzten Hälfte der Herbstferien bei seiner kranken Mutter weilte, am 4. Oktober abschloß, hatte zunächst nur eine Anwendung elliptischer Integrale zum Gegenstand. In der in den Annalen von Poggendorff erschienenen Arbeit „Über die Figur des Gleichgewichts“ wird die Frage erörtert, welche Figur eine flüssige homogene Masse, deren Teilchen zueinander nach dem Newtonschen Gesetze gravitieren, und welche sich um eine feste Achse gleichförmig dreht, annehmen müsse, um im Gleichgewicht zu bleiben, und eine Mitteilung über eben diesen Gegenstand sandte Jacobi außerdem am 20. Oktober an die Pariser Akademie.

„Mit den eben besprochenen Untersuchungen“, sagt Dirichlet, „hängt eine andere Arbeit Jacobis zusammen, die wegen ihres überraschenden Resultats hier nicht unerwähnt bleiben darf. Maclaurin hat bekanntlich zuerst gezeigt, daß eine homogene flüssige Masse mit Beibehaltung ihrer äußeren Gestalt sich gleichförmig um eine feste Achse drehen kann, wenn diese Gestalt die eines Rotationsellipsoids ist, und dieses schöne Resultat ist später von d'Alembert und Laplace durch den Nachweis vervollständigt worden, daß jedem Werte der Winkelgeschwindigkeit, wenn dieser unter einer gewissen Grenze liegt, zwei und nur zwei solche Ellipsoide entsprechen. Lagrange scheint zuerst an die Möglichkeit gedacht zu haben, daß auch ein ungleichachsiges Ellipsoid den Bedingungen der Permanenz genügen kann; wenigstens geht dieser große Mathematiker in seiner analytischen Mechanik bei Behandlung dieser Frage von Formeln aus, welche für ein beliebiges Ellipsoid gelten. Indem er aber so zu zwei zu erfüllenden Gleichungen gelangt, in welchen

die beiden Aequatorialachsen auf eine symmetrische Weise enthalten sind, zieht er aus dieser Symmetrie den Schluß, daß jene Achsen gleich sein müssen, während doch nur daraus folgt, daß sie gleich sein können, wo dann beide Gleichungen in eine und mit der von Maclaurin zuerst aufgestellten und von d'Alembert und Laplace diskutierten zusammenfallen. Der Verfasser eines bekannten Lehrbuchs, der in der Darstellung dieses Gegenstandes Lagrange gefolgt ist und den eben erwähnten übereilten Schluß mit dem Worte notwendig begleitet, erregte zuerst Jacobis Verdacht, welcher bei genauerer Betrachtung jener zwei Gleichuungen zu seiner und gewiß aller Mathematiker großen Überraschung bald fand, daß auch ein ungleichachsiges Ellipsoid den Bedingungen des Gleichgewichts genügen kann."

Jacobi hebt zunächst in seiner Arbeit die historisch interessante Tatsache hervor, daß Laplace bei der Behandlung der Attraktion der Ellipsoide bemerkt, er könne beweisen, daß diese Integrale im allgemeinen sich nicht endlich, d. h. durch Kreisbogen und Logarithmen ausdrücken lassen, und erkennt in den bahnbrechenden Untersuchungen von Legendre über die Theorie der elliptischen Integrale und der Kugelfunktionen das einzige Mittel, um die Untersuchung über die Gleichgewichtsfiguren erschöpfend durchzuführen. „Legendre, dessen Ruhm mit den Fortschritten der Mathematik zunimmt, hatte durch Einführung jener merkwürdigen Ausdrücke, durch welche wir heute in den Anwendungen die Funktionen zweier Variabeln darstellen, die allgemeinsten Untersuchungen über diesen Gegenstand möglich gemacht. Er zeigte, daß unter allen Figuren, die nicht zu sehr von der sphärischen Gestalt abweichen, so daß es möglich ist, die Anziehung, welche auf einen Punkt der Oberfläche ausgeübt wird, nach den Potenzen dieser Abweichung zu entwickeln, das wenig abgeplattete Umdrehungsellipsoid, wie es Clairaut und Maclaurin bestimmt haben, die einzig mögliche Figur des Gleichgewichts

sei, und zwar nicht in irgendeiner Annäherung, sondern in absoluter geometrischer Strenge. Wenn man bedenkt, daß man hier aus Relationen zwischen dreifachen Integralen, deren Grenzen unbekannt sind, und welche Konstanten enthalten, zwischen denen eine unbekannte Relation stattfindet, die Gleichung zwischen den drei Variabeln zu suchen hat, welche die Grenzen gibt und zugleich die unbekannte Relation zwischen den Konstanten bestimmt, so staunt man über die Kühnheit und das Glück dieses Unternehmens ... Wie wesentlich die Bedingung ist, daß die Komponenten der Anziehung nach den Potenzen der Abweichung von der Kugelgestalt würden entwickelt werden können oder wenigstens entwickelt gedacht werden, erhellt daraus, daß die Legendresche Analysis das zweite sehr platte, von d'Alembert zuerst bemerkte Umdrehungsellipsoid nicht gibt. Aber man ist in einem sehr großen Irrtum gewesen, wenn man geglaubt hat, diese beiden Umdrehungsellipsoide seien, wenigstens unter Flächen 2. Ordnung, die einzigen Figuren des Gleichgewichts. In der Tat zeigt eine leichte Aufmerksamkeit, daß Ellipsoide mit drei ungleichen Achsen ebensogut Figuren des Gleichgewichts sein können; daß man zum Äquator eine ganz beliebige Ellipse annehmen kann, und dann immer die dritte Hauptachse, die Umdrehungsachse, welche auch hier die kleinste der drei Achsen ist, und die Rotationsgeschwindigkeit so bestimmen kann, daß das Ellipsoid eine Figur des Gleichgewichts wird.“ Jacobi findet, wenn m und n die halben Hauptachsen des Äquators, p die halbe Umdrehungsachse, und

$$\varDelta = \sqrt{\left(1+\frac{x}{m^2}\right)\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\left(1+\frac{x}{p^2}\right)}$$

gesetzt wird, eine transzendente Relation zwischen den drei Hauptachsen von der Form:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x}{m^2}\right)\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\varDelta} = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x}{p^2}\right)\varDelta},$$

welche alle ungleichachsigen Ellipsoide umfaßt, welche Figuren des Gleichgewichts sein können, während zu jedem dieser Ellipsoide die zugehörige Rotationsgeschwindigkeit v durch die Gleichung

$$v^2 = 2\pi \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+m^2)(x+n^2)\varDelta}$$

bestimmt ist.

Für den Winter 1834/35 hatte Jacobi außer einer Vorlesung über die Oberflächen und Linien doppelter Krümmung eine öffentliche, bisher von ihm noch nicht gehaltene über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen angekündigt, während zugleich die bisher mehr privaten mathematischen Übungen mit den Studierenden eine festere Gestalt annahmen. Nach Auflösung des früheren Herbartschen pädagogischen Seminars beantragten im Februar 1834 Neumann, Jacobi und Sohncke die Gründung eines mathematisch-physikalischen Seminars, und zwar unter der ausdrücklichen Erklärung Jacobis, daß er dem Antrage nur zustimmen könne, wenn etwas ganz Vollständiges und Bedeutendes geschähe, während sich Bessel prinzipiell gegen ein solches Seminar aussprach, weil er mehr Gewicht auf eignes Studium als auf den seminaristischen Unterricht lege. Im November 1834 wurde nun das Seminar mit einer mathematischen unter Jacobi und einer mathematisch-physikalischen unter Neumann stehenden Abteilung eröffnet, Sohncke dagegen wurden die elementareren, in lateinischer Sprache abzuhaltenden Übungen zuerteilt; am Ende eines jeden Jahres sollte dem Ministerium Bericht über den Fortgang der Arbeiten erstattet werden. Jacobi widmete sich nun mit dem größten Eifer der Leitung des Seminars, dessen Arbeiten er in jedem Semester damit einleitete, daß er „in kurzen Vorträgen an einen den Mitgliedern geläufigen Zusammenhang anknüpfte und von da zu einer besonderen Aufgabe hinleitete, mit deren Lösung die Mitglieder sich die Woche über zu beschäftigen hatten; ihre Arbeiten wurden

im Laufe der Woche dem Dirigenten abgegeben und am nächsten Sonnabend von demselben beurtheilt, worauf zu einer neuen Aufgabe übergegangen wurde". Die ersten Mitglieder im Winter 1834/35 waren Hesse, Czwalina und Schoenemann, mit denen Aufgaben behandelt wurden, welche sich auf sphärische Kegelschnitte bezogen, worin sich Hesse „durch Gediegenheit des Inhaltes und Eleganz der Form seiner Arbeiten auszeichnete".

Wenn Jacobi auch, wie wir bald sehen werden, wesentliche Teile seiner umfangreichen Untersuchungen in der analytischen Mechanik bereits fertiggestellt hatte, so beschränkte er sich zunächst doch noch immer in seinen Veröffentlichungen auf Ergänzungen und Erweiterungen früherer Arbeiten und auf die Darlegung von Resultaten, mit denen er seine geometrischen Vorlesungen bereicherte. In der vom 3. Dezember 1834 datierten Arbeit „Dato systemate n aequationum linearium inter n incognitas, valores incognitarum per integralia definita $(n-1)$ tuplicia exhibentur", geht er auf eine frühere Untersuchung zurück, in der er gezeigt hatte, daß, wenn $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, das für reelle x_n über alle positiven und negativen Werte der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ ausgedehnte Integral

$$\int^{(n-1)} \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{x_n \left(\sum a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda\right)^{\frac{1}{2}n}} = \frac{2^{n-1} S}{\sqrt{\sum \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}}}$$

ist, worin S gefunden, und der Ausdruck $\sum a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ für alle reellen Werte von $x_1 \ldots x_n$ als positiv vorausgesetzt war. Ist nun ein lineares System gegeben $a_{r1} y_1 + \cdots + a_{rn} y_n = m_r (r = 1, 2, \ldots n)$, worin $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$, so liefert, wie leicht durch Zerlegung seiner Determinante N in Unterdeterminanten erster Ordnung ersichtlich, das für mehrfache Integrale gefundene Theorem für die Auflösung des linearen Gleichungssystems die Werte

$$\frac{2^{n-1}S}{n}\frac{y_r}{\sqrt{N}} = \int^{(n-1)} \frac{x_r(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n)}{x_n\left(\sum a_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa x_\lambda\right)^{\frac{1}{2}(n+2)}} dx_1dx_2\cdots dx_{n-1},$$

worin $S = \frac{1}{2\cdot 4\ldots(n-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$, wenn n gerade, und $S = \frac{1}{3\cdot 5\ldots(n-2)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$, wenn n ungerade ist; durch eine einfache Umformung kann man sich auch von der Beschränkung, daß $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$, und daß $\sum a_{\varkappa\lambda}x_\varkappa x_\lambda$ für alle Wertsysteme von $x_1, \ldots x_n$ positiv ist, frei machen.

Die vom 9. Dezember 1834 datierte Arbeit „Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes“ ist ziemlich elementarer Natur, offenbar für seminaristische Übungen bestimmt gewesen und knüpft an seine Jugendversuche zur Auflösung der Gleichungen 5. Grades an. Aus der Form, wie 2, 3, 4 Elemente sich durch die symmetrischen Funktionen dieser ausdrücken lassen, leitet er die Auflösungen der Gleichungen 2., 3., 4. Grades her, zeigt, daß im Innern der Lösungsform unsymmetrische, in den Wurzeln der Gleichung rationale Funktionen vorkommen, durch deren Potenzierung symmetrische entstehen, und sucht die Natur dieser unsymmetrischen Ausdrücke genauer zu bestimmen. In Verallgemeinerung eines schon auf der Schule von ihm gefundenen Satzes führt er die Gleichung 5. Grades $x^5 - 10q^2x = p$ durch eine einfache Substitution in $y^{10} + 5qy^8 + 5q^4y^2 + q^5 = py^5$ über und zeigt, daß sich diese, wenn man das Zeichen des zweiten und dritten Postens ändert, mit Hilfe von Quadratwurzeln und 5. Wurzeln auflösen läßt. Er geht ferner noch auf die Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung ein, welche zwischen gegebenen Grenzen enthalten sind, indem er dieselbe auf die Feststellung der reellen Wurzeln einer Gleichung überhaupt zurückführt, und erweitert bekannte Methoden auf die Aufsuchung der kleinsten und größten Lösungen einer Gleichung.

Bei Gelegenheit seiner Wintervorlesung über Linien und Flächen war er zu einigen interessanten Bemerkungen gelangt, die er am 19. Dezember 1834 unter dem Titel „Zur Theorie der Curven“ veröffentlichte. Von einigen einfacheren Sätzen abgesehen, mag hervorgehoben werden, daß er das Element des Bogens der Krümmungsmittelpunktskurve gleich fand dem Halbmesser der Schmiegungskugel mal dem Winkel der Schmiegungsebenen, und die Differenz zweier aufeinander folgender Krümmungshalbmesser gleich dem Elemente des Bogens der Kurve der Krümmungsmittelpunkte mal dem Kosinus des Winkels, den es mit dem Krümmungshalbmesser bildet, oder auch gleich der Distanz der Mittelpunkte der Schmiegungskugel und des Schmiegungskreises mal dem Winkel der Schmiegungsebenen. Er führt ferner die Koordinaten einer Kurve als Funktion der Bogenlänge ein und entwickelt die Koordinaten ξ, η, ζ des Mittelpunktes der zu x, y, z gehörigen Schmiegungskugel in der Form $\xi = x + \varrho\alpha_2 + r\frac{d\varrho}{ds}\alpha_3$, $\eta = y + \varrho\beta_2 + r\frac{d\varrho}{ds}\beta_3$, $\zeta = z + \varrho\gamma_2 + r\frac{d\varrho}{ds}\gamma_3$, $R^2 = \varrho^2 + r^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2$, wenn ϱ und r die Radien der ersten und zweiten Krümmung, R der Radius der Schmiegungskugel, α_2, β_2, γ_2 die Richtungskosinus der positiven Richtung der Hauptnormale, und α_3, β_3, γ_3 die Richtungskosinus der positiven Richtung derjenigen Normale sind, welche auf der Schmiegungsebene senkrecht steht; vermöge dieser Formeln gelingt es ihm, einen Satz von Lagrange zu berichtigen, indem er findet, daß nur für eine ebene Kurve die Linie ihrer Krümmungsmittelpunkte ihre Evolute ist, oder von den Krümmungshalbmessern berührt wird. Determinantenformeln für das Maß der zweiten Krümmung beschließen die Arbeit.

In der noch vor Ende des Jahres am 20. Dezember niedergeschriebenen kurzen Notiz „De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea“ knüpft Jacobi einige Bemerkungen an eine

nachgelassene Arbeit von Euler, welche die Aufgabe behandelt, den Ausdruck aus einer rationalen Zahl x, welche $\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}$ selbt rational macht, unzählig viele andere Werte von x von derselben Eigenschaft zu finden. „In quibus commentationibus non adnotavit vir, analysin solutionis ab eo traditae aliam non esse nisi multiplicationis integralium ellipticorum — quamquam utriusque analysis autorem consensum illum memorabilem non fugisse, probabile est.“ Jacobi folgert diesen Zusammenhang unmittelbar aus dem Eulerschen Additionstheorem, nach welchem, wenn $f(x)$ vom 4. Grade und $\Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ ist, in der Beziehung $\Pi(x) = m_1 \Pi(x_1) + m_2 \Pi(x_2) + \cdots + m_n \Pi(x_n)$, worin $m_1, m_2, \ldots m_n$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, x und $\sqrt{f(x)}$ rational durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $\sqrt{f(x_1)}, \ldots \sqrt{f(x_n)}$ ausdrückbar sind. Verallgemeinert lautet der Satz: „designante $f(x)$ functionem ipsius x rationalem integram $2n + 1^{ti}$ aut $2n + 2^{ti}$ ordinis, si datur valor ipsius x rationalis, pro quo etiam $\sqrt{f(x)}$ rationale fiat, dantur innumerae aequationes n^{ti} gradus, quarum coefficientes numeri rationales sunt, ita comparatae, ut designante x earum radicem quamlibet, radicale $\sqrt{f(x)}$ per ipsam radicem x et numeros rationales rationaliter exhiberi queat“, und dieses Theorem ist auf Integrale beliebiger algebraischer Funktionen übertragbar.

Hatten bisher die Untersuchungen Jacobis über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, deren Veröffentlichung er noch immer hinausgeschoben, mehr in den Problemen der Variationsrechnung ihre Entstehung gefunden, so nahm die Richtung der hierauf bezüglichen Arbeiten, welche aber auch erst nach einem Jahre den Mathematikern zur Kenntnis kamen, durch die im Jahre 1834 und 1835 erschienenen Arbeiten von Hamilton eine wesentlich andere

und bedeutungsvolle Wendung. Aus seinen kurzen Aufzeichnungen ist erkennbar, daß er mit Bessel bereits im Jahre 1834 über diese Untersuchungen und die von ihm herbeigeführte wesentliche Vereinfachung der Hamiltonschen Theoreme mündlichen Gedankenaustausch gepflogen; dieser schreibt auch am 20. Januar 1834, wahrscheinlich durch Jacobi auf die Hamiltonschen Arbeiten hingewiesen, an Olbers: „Sind Sie auf Hamilton's Abhandlung im letzten Bande der 'Philosophical Transactions' aufmerksam gewesen? Sie ist ohne Zweifel wichtig für die Theorie, ob auch für die Praxis kann ich noch nicht beurtheilen. Das Wesentliche der Abhandlung besteht darin, daß gezeigt wird, daß man durch eine partielle Differentialgleichung eine Function erkennen kann, deren Differentiirungen die vollständige Auflösung der dynamischen Probleme ergeben. Bisher konnte man nach der Anleitung der mécanique analytique die Differentialgleichungen der zweiten Ordnung durch ein einförmiges und elegantes Verfahren erhalten. Hamilton integrirt nur einmal, freilich keine gewöhnliche sondern eine partielle Differentialgleichung; sobald dies geschehen ist, erhält man durch Differentiirung dieses Integrales nicht nur die Differentialgleichungen, bei welchen Lagrange stehen blieb, sondern auch die Integrale derselben; es ist möglich, daß diese Idee beträchtlichen Erfolg erhalten kann. Sie kann zwar gewiß nicht über ein Integral hinweg heben, welches man sonst suchen muß, allein die Änderung der Reihenfolge, welche sie hervorbringt, kann doch von wesentlichem Nutzen sein."

Aber alle auf diese Probleme bezüglichen Untersuchungen Jacobis blieben den Mathematikern zunächst noch unbekannt, und nur in den Vorlesungen und seminaristischen Übungen traten Andeutungen davon hervor; das Crellesche Journal brachte auch jetzt nur Arbeiten geometrischen und algebraischen Inhalts, aber von größtem Interesse und weittragender Bedeutung.

Noch im Wintersemester verfaßte er eine vom 22. Februar 1835 datierte ganz kurze Bemerkung „Über den Steinerschen Satz von den Primzahlen im 13. Bande des Crelleschen Journals", in welcher er das Theorem, daß, wenn p eine Primzahl, für n durch p nicht teilbare Zahlen, welche durch p dividiert lauter verschiedene Reste lassen, die Summen ihrer Kombinationen mit Wiederholungen zu $p-n, p-n+1, \dots p-2$ genommen durch p teilbar sind, daraus herleitet, daß, wenn $\frac{1}{(x-a_1)\dots(x-a_n)} = \frac{P}{x^n} + \frac{P'}{x^{n+1}} + \frac{P''}{x^{n+2}} + \cdots$ gesetzt wird, $P^{(m)}$ einerseits als die Summe der Kombinationen mit Wiederholungen zu m aus den Elementen $a_1, a_2, \dots a_n$, andererseits für $m \geqq 0$ durch den Ausdruck $\frac{a_1^{n+m-1}}{A_1} + \frac{a_2^{n+m-1}}{A_2} + \cdots + \frac{a_n^{n+m-1}}{A_n}$ bestimmt wird, worin $A_r = (a_r - a_1)(a_r - a_2)\dots(a_r - a_{r-1})(a_r - a_{r+1})\dots (a_r - a_n)$ ist.

In den Osterferien 1835 beschäftigte er sich von neuem zum Zwecke seiner Sommervorlesung über Variationsrechnung mit dem Studium der großen Lagrangeschen Abhandlungen; „vielleicht sehen Sie", schreibt er am 3. April an Bessel, „die ausgezeichneten Mémoires von Lagrange, von denen ich gestern sprach, und die ich im beifolgenden dicken Bande gezeichnet habe, flüchtig an. Bei Gauss heißt es nicht: de mortuis nil nisi bene, sondern de mortuis et de vivis nil." Von der zweiten Vorlesung, die er in diesem Sommer hielt und in welcher er die Oberflächen 2. Ordnung behandelte, besitzen wir eine von Rosenhain verfaßte Nachschrift. „Der Veranlassung", sagt Dirichlet, „welche Jacobi in seinen Untersuchungen über die Attraktion der Ellipsoide fand, sich mit den Flächen 2. Grades zu beschäftigen, verdankt man die Kenntnis mehrerer interessanter Eigenschaften und einer höchst eleganten Erzeugungsweise dieser Flächen."

Wie er es in allen seinen Vorlesungen liebte, gab er auch hier eine historische Einleitung, welche sich auf die

Einführung der analytischen Methode in die Geometrie bezog, hebt aber bei dieser Gelegenheit ausdrücklich hervor, daß zu analytisch-geometrischen Zwecken auch die reine Geometrie stets hilfreich sein müsse. „So beschäftigt sich z. B. Gauss mit der Transformation eines Integrales

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{a + b\cos\varphi + c\sin\varphi + d\cos 2\varphi + e\sin 2\varphi}} \text{ in } \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}},$$

die nach Steiner mit der einfachen Aufgabe übereinkommt, zwei in einer Ebene gegebene Kegelschnitte so zu projizieren, daß sie konzentrisch werden und sich auf dasselbe Paar konjugierter Durchmesser beziehen. Es wäre daher nicht unzweckmäßig, die Resultate der Steinerschen Untersuchungen durch reine Geometrie auch durch Rechnung zu verfolgen, denn man würde hier jedenfalls neue Symbole finden.“ Die Vorlesung selbst beschäftigt sich zunächst mit der Theorie der geraden Linie und der geradlinigen Figuren im Raume, mit der Zusammenstellung der Linien und Ebenen und der Transformation der räumlichen Koordinatensysteme. In der Lehre von den Oberflächen 2. Ordnung, zu deren Darstellung er sich auch öfter der höheren Analysis bedient, wird zunächst die Lehre von dem Mittelpunkt und den Durchmessern derselben entwickelt, und weiter ausführlich die Methode dargelegt, durch welche er selbst nicht bloß die Realität der Wurzeln der Hauptachsengleichung bewiesen, sondern auch gezeigt hat, wie man ihre Zeichen und Grenzen erkennt, um die Gattung der Oberflächen zu bestimmen. Es folgt die Einteilung der Flächen 2. Grades und die Untersuchung der wesentlichsten Eigenschaften derselben, verbunden mit der Entwicklung der Theorie der Polarebenen und der Berührungskegel der Flächen. Die Behandlung der Schnittkurven zweier Flächen 2. Ordnung wurde in dieser Sommervorlesung nicht ganz zu Ende geführt, wie denn überhaupt diese Vorlesung einen mehr elementaren Charakter hatte.

Am 22. Mai 1835 hielt Jacobi in einer öffentlichen Sitzung der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg einen Vortrag: „Über die Pariser polytechnische Schule", nachdem er während seines Aufenthaltes in Paris vielfach Gelegenheit gehabt, sich mit der Geschichte und den Einrichtungen derselben genauer bekannt zu machen.

„Als der bekannte Victor Cousin, Staatsrat und Pair", begann Jacobi seinen Vortrag, „im Auftrage der jetzigen französischen Regierung seine pädagogische Reise durch Deutschland machte, um sich namentlich über das preußische Schulwesen unterrichten zu lassen, erstattete unser Kultusminister v. Altenstein dem Könige einen Bericht über diese Sendung, daß Herr Cousin bei uns alles sehr gut gefunden habe, eine Anstalt aber, wie die polytechnische Schule in Frankreich, vermisse. Der Minister fügte hinzu, daß dieser Mangel sich nicht ableugnen lasse, auch immer fühlbarer werde, daß er deshalb seit längerer Zeit den Plan zu einer solchen Anstalt entworfen, aber wegen der Ungunst der Verhältnisse Anstand genommen habe, auf Bewilligung der nicht unbedeutenden Fonds bei Sr. Majestät anzutragen. Der König antwortete hierauf unter dem 29. August 1831, er sei geneigt, die Einrichtung dieses Instituts zu fördern." Hieran anknüpfend nimmt Jacobi zum Gegenstande seines Vortrages die Beantwortung der Fragen: welches war das Entstehen der polytechnischen Schule, wie hat sie sich im Laufe der Zeit unter den mannigfachsten Umständen fortentwickelt, was sind ihre Resultate? Er liefert zunächst eine übersichtliche und interessante Darstellung der Geschichte jener Schule; besonders lebendig schildert er, wie der berühmte Chemiker Fourcroy im Jahre 1794 beauftragt worden, dem Konvent einen Organisationsplan zu überreichen, wie dann Robespierre bei der gänzlichen Auflösung aller Finanzverhältnisse sich diesen Plänen entgegengestellt, und daß Fourcroy erst nach dem 9. Thermidor seinen Bericht einreichen konnte, der mit den Worten

begann: „Der Wohlfahrtsausschuß habe die aktenmäßigen Beweise, was Robespierre am meisten gehaßt, was er am blutdürstigsten verfolgt hätte, wären die Wissenschaften gewesen; er habe eine förmliche Verschwörung gegen die menschliche Vernunft organisiert und sei mit nichts Geringerem umgegangen, als Wissenschaft und Kunst auf der Erde auszurotten. Und welchen Nutzen doch gewährten diese für die Soldaten der Republik? Sie lehrten Waffen, Salpeter und Pulver anfertigen, aus den Glocken Kanonen gießen, Luftballons aufschicken, um die Stellung der feindlichen Heere zu rekognoszieren, Telegraphen bauen, Leder für die Soldaten in acht Tagen machen, die Truppen zweckmäßiger verproviantieren, ja man würde ganz neue Verteidigungsmittel erfinden, um die Feinde der Republik abzuwehren." An diese „sonderbare Apologie der Wissenschaften" knüpft nun Jacobi die Entwicklung des Grundplanes der Anstalt, die mannigfachen Umgestaltungen derselben, vor allem den Einfluß, den Monge, von Napoleon unterstützt, auf diese ausübte; Binet hatte Jacobi im Jahre 1829 mit den einzelnen Einrichtungen der Anstalt bekannt gemacht, welche dessen Verwunderung erregten. „Mit religiöser Ehrfurcht zeigte man die größeren Laboratorien, in welchen die Meister ihre berühmten Entdeckungen gemacht, insbesondere dasjenige, wo Gay-Lussac und Humboldt gemeinsam mehrere Jahre gearbeitet." Allmählich gewann auch die Mathematik einen größeren Anteil am Studienplan, und nun erst entwickelte sich die Schule zu ihrer unerreichten Höhe. Die Zahl der Zöglinge betrug damals 300; die Prüfungen wurden mit jedem einzelnen besonders angestellt. „Ich war öfter bei den Abgangsprüfungen in der Mathematik, welche Poisson abhielt, zugegen; da ich hierbei mich mit dem Examinator und Examinanden ganz allein befand, so hatte ich gute Gelegenheit, mich über das, was in der Mathematik in der Schule geleistet wurde, zu unterrichten. Diese Abgangsprüfung in der Mathematik

beschäftigte Poisson einen Monat lang täglich 9 Stunden.“ Als das Waffenglück Napoleons umschlug und die verbündeten Heere über den Rhein gingen, baten die Schüler um die Erlaubnis, in Masse eintreten zu dürfen, um das Vaterland zu verteidigen. Napoleon soll damals geantwortet haben, soweit sei es nicht mit ihm gekommen, daß er seine Henne töten müßte, die ihm die Goldeier lege. Jacobi hebt endlich noch die an dieser Schule erschienenen Lehrbücher hervor, wie Lagranges Funktionentheorie und Funktionenrechnung, Berthollets chemische Statik, Laplaces Exposition du système du monde, Lacroix', Francoeurs, Cauchys Lehrbücher der Algebra und Infinitesimalrechnung u. a. m., welche die Früchte des dort gegebenen Unterrichtes über ganz Europa verbreitet haben. „Den Glanz, den die polytechnische Schule durch ihre Lehrer und die Leistungen ihrer Schüler auf ganz Frankreich warf, hielt sie durch alle Stürme der Zeit hoch aufrecht, indem die Nationalehre bei ihrer Erhaltung beteiligt war. Bald erwähnte man sie auf der Tribüne der legislativen Gewalt oder in öffentlichen Dokumenten nicht, ohne sie die erste Schule der Welt, den Neid Europas, ein Institut ohne Nebenbuhler und Vorbild zu nennen.“

Jacobis Untersuchungen über Linien und Flächen führten ihn zu einer vom 13. Juni 1835 datierten Arbeit: „Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum inter duas variabiles propositarum“, deren wesentlichstes Resultat — der sogenannte Jacobische Satz — später zur Grundlage der Abelschen Transzendenten gemacht worden ist. Das bekannte Eulersche Theorem, daß, wenn X eine ganze Funktion von x bedeutet, $\sum \frac{U}{\frac{\partial X}{\partial x}} = 0$ ist, wenn die Summe sich auf alle Lösungen von $X = 0$ erstreckt, und U eine ganze Funktion von x ist, deren Grad um zwei Einheiten kleiner als der von X, dehnt Ja-

cobi auf ein System von beliebig vielen Gleichungen mit ebensoviel Variabeln aus. Er beweist zunächst, daß, wenn $f=0$, $\varphi=0$ zwei Gleichungen mit zwei Variabeln x, y, und $X=0$, $Y=0$ die Eliminationsgleichungen von y und x sind, wenn ferner M, N, P, Q die einfachsten ganzen Funktionen darstellen, welche $Mf+N\varphi=X$, $Pf+Q\varphi=Y$ identisch machen, und wenn man endlich $V=MQ-NP$ setzt und mit $V_{m,n}$ den Wert von V für $x=x_m, y=y_n$ für verschiedene m und n bezeichnet, dann $V_{m,n}=0$ wird, oder daß V verschwindet, wenn für x und y Wurzeln der Eliminationsgleichungen gesetzt werden, welche nicht zugleich simultane Lösungen der beiden vorgelegten Gleichungen sind. Kronecker hat im Nachlasse Jacobis eine Bemerkung gefunden, welche darauf hindeutet, daß er schon die zur Allgemeingültigkeit dieses Satzes notwendige Beschränkung gekannt hat, daß der Grad der Gleichungen $X=0$, $Y=0$ dem Produkte der Dimensionen der Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ gleich werden muß. Aus diesem Satze folgert er nun leicht, daß, wenn man mit R_m den Wert von $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ für $x=x_m, y=y_m$ bezeichnet, die symmetrische Funktion der gemeinsamen Wertsysteme der beiden Gleichungen $f=0$ und $\varphi=0$ $\sum_\varrho \frac{x_\varrho^\alpha y_\varrho^\beta}{R_\varrho}=0$ ist, wenn α und β positive ganze Zahlen bedeuten, deren Summe um zwei vermehrt kleiner ist als die Summe der Dimensionen, bis zu welchen die Funktionen f und φ ansteigen, woraus sich die wichtige Erweiterung des Eulerschen Satzes ergibt: „Sint f, φ duarum variabilium x, y functiones quaecunque rationales integrae; sit F alia functio ipsarum x, y rationalis integra quaecunque, cujus ordo tribus inferior summa ordinum functionum f, φ; erit $\sum \frac{F}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}}$ $=0$, summa extensa ad valores ipsorum x, y omnes, qui sunt radices simultaneae aequationum $f=0$, $\varphi=0$." Die Ausdehnung dieses Theorems auf k Funktionen mit k Varia-

beln bildet ein Beispiel zu der späteren Parallelisierung der Funktionaldeterminante von Jacobi mit der Ableitung einer Funktion von nur einer Variabeln.

Die Abgeschiedenheit Königsbergs von den wissenschaftlichen Zentren Europas machte in Jacobi immer mehr den Wunsch rege, an eine andere preußische Universität versetzt zu werden, und er wendete sich am 3. Juli 1835 mit einer dahingehenden Bitte an den Unterrichtsminister:

„Die Universität Bonn hat durch den Tod eines braven Mathematikers, Prof. Diesterweg, einen betrübenden Verlust erlitten. Es sind die Intentionen Ew. Exc. über die Wiederbesetzung seiner Stelle mir unbekannt. Wenn aber Ew. Exc. es für zweckmäßig erachten, diese Professur mir anzuvertrauen, so würde dies mit meinen lebhaften Wünschen übereinstimmen. . . . . Wenn durch den großen Mann, neben welchem ich hier zu stehen das Glück habe, sowie durch die hier gebildeten Schüler eine Lücke hier kaum entstehen könnte, so würde es vielleicht meinen Anstrengungen gelingen, in einer heitern und zugänglichen Gegend Deutschlands eine mathematische Schule von größerer und umfassenderer Bedeutung zu gründen, und die unter den Auspicien Ew. Exc. durch die Gnade unseres Königs in jenen Gegenden neu erblühte Universität dürfte dann auch in diesen Disciplinen hinter keiner der älteren Universitäten Deutschlands zurückstehen.“

Zugleich bittet er Bessel, der sich zur Zeit in Berlin befand, sein Ansuchen an den Minister zu unterstützen, und ist sehr enttäuscht, als ihm dieser am 21. Juli antwortet: „Obgleich ich mir lieber einen Finger abschneiden, als sagen will, daß es meiner Ansicht angemessen sei, Sie lebendig aus Königsberg zu lassen, so will ich mir doch auch lieber den Hals abschneiden, als sagen, daß Sie nicht allenthalben als ein Schatz glänzen würden; von der allerkräftigsten Seite kann ich Ihnen also nicht opponiren.“ Dementsprechend erwidert ihm auch am 24. August der Minister:

„.... es erscheint mir zum Besten der Sache wünschenswerth, daß Sie für jetzt Ihre verdienstliche Wirksamkeit bei der dortigen Universität noch fortsetzen, und das Studium der mathematischen Wissenschaften dort ferner, wie es bisher schon mit so ausgezeichnetem Erfolge geschehen ist, immer mehr begründen, ... es wird mir eine um so angelegentlichere Pflicht sein, durch eine angemessene Gehaltzulage Ihre aeußere Lage zu verbessern, sobald hierzu nur die erforderlichen Fonds vorhanden sein werden", und stellt ihm für später eine seinen Wünschen noch mehr entsprechende und seiner Wirksamkeit noch förderlichere Gelegenheit zur Veränderung seiner Lage in Aussicht.

Jacobi kommt jedoch nochmals am 9. September auf sein Ansuchen zurück: „Was meine Bitte selber betrifft, so erschien sie mir wohlbegründet, weil ich Bonn als Vereinigungspunkt von Deutschland, Holland, Frankreich und der Schweiz als den passendsten Punkt für eine Wirksamkeit in den mathematischen Wissenschaften betrachte, die in diesen Ländern von jeher mit Vorliebe getrieben wurden, und hätte ich hoffen dürfen, bei dem jetzigen Aufschwunge der mathematischen Wissenschaften, auch namentlich in Holland, auch aus diesen verschiedenen Gegenden manche Schüler dort um mich zu vereinigen. Unbezahlbar und von unberechenbarem Vortheile aber wäre für mich die Nähe von Paris gewesen, auch meinen dortigen Freunden, wie ich mir schmeichle, erwünscht." Aber die Gewährung der Bitte blieb versagt.

Die wichtigen algebraischen Untersuchungen, die seminaristischen, auf die verschiedenartigsten mathematischen Fragen sich erstreckenden Übungen mit seinen strebsamen und ausgezeichneten Schülern, endlich noch der stete Verkehr mit Bessel, welcher unaufhörlich mit Problemen theoretischer und praktischer Natur, jetzt meist auf die Theorie der bestimmten Integrale und die Entwicklungsformen der Funktionen bezüglich, an ihn herantritt, zogen ihn zunächst

wieder ganz von seinen Untersuchungen über die Differentialgleichungen der Mechanik ab. Noch während des Sommersemesters verfaßt er am 9. Juli eine im Anschluß an die berühmte Besselsche Abhandlung „De perturbationibus etc." entstandene Arbeit „Formula transformationis integralium definitorum", in der er zunächst von einer Legendreschen Formel ausgeht, welche dieser zur Kenntlichmachung der Konvergenz der Fourierschen Reihe entwickelte, und welche für die Darstellung von $(1 - 2a \cos x + a^2)^{-\frac{1}{2}}$ in Form einer solchen Reihe in der Beziehung

$$\int_0^\pi \frac{\cos ix\, dx}{\sqrt{1 - 2a\cos x + a^2}} = a^i \int_0^\pi \frac{\sin^{2i} x\, dx}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x}}$$

gegeben ist, aus der für kleine a und wachsende i das Fallen der Koeffizienten ersichtlich. „Putabat Legendre, illam transformationis formulam unicam sui generis esse. Sed incidi nuper in formulam generalem, qua, proposita evolutione functionis in seriem secundum cosinus multiplorum anguli procedentem, integralia, quibus coefficientes evolutionis exhibentur, transformantur in alia, in quibus sub signo loco $\cos ix$ invenitur factor $\sin^{2i} x$, et loco functionis evolvendae i^{tum} ejus differentiale, secundum $\cos x$ sumptum"; ähnliche Transformationsformeln für Doppelintegrale kommen bei der Entwicklung einer Funktion zweier Variabeln zur Erscheinung. Jacobi findet für eine nach ganzen positiven Potenzen der Variabeln entwickelbare Funktion die merkwürdige Beziehung

$$\int_0^\pi f(\cos x) \cos ix\, dx = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-1)} \int_0^\pi f^{(i)}(\cos x) \sin^{2i} x\, dx,$$

und stützt den Beweis dieses Satzes auf das Lemma, daß für $z = \cos x$

$$\frac{d^{i-1}(1-z^2)^{\frac{2i-1}{2}}}{dz^{i-1}} = (-1)^{i-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-1) \frac{\sin ix}{i}$$

ist. Nachdem er noch für unbestimmte Grenzen die obige Legendresche Transformation auf die Form gebracht

$$\int \frac{\cos 2n\psi - i \sin 2n\psi}{\sqrt{1 + 2\varkappa \cos 2\psi + \varkappa^2}}\, d\psi = (-\varkappa)^n \int \sin^{2n} \operatorname{am}\left(u + \frac{iK'}{2}\right) du,$$

worin $(1 + \varkappa) \sin \operatorname{am} u = (1 + \varkappa \sin^2 \operatorname{am} u) \sin \psi$ ist, leitet er eine Reihe Eulerscher und Legendrescher Relationen her und findet unmittelbar durch Anwendung auf das Besselsche Integral für dieses unter anderem den bekannten Ausdruck

$$\pi J_k^{(i)} = \frac{k^i}{1 \cdot 3 \cdots (2i - 1)} \int_0^\pi \cos (k \cos \varepsilon) \sin^{2i} \varepsilon \, d\varepsilon,$$

woraus sich wiederum einige interessante Rekursionsformeln für die Besselschen Funktionen sowie mehrere merkwürdige Fouriersche Reihenentwicklungen ergeben. Eine ganz ähnliche Beziehung für die Transformation der Doppelintegrale wird zur Entwicklung von $[a^2 - 2aa' (\cos \varphi \cos \varphi' + \cos J \sin \varphi \sin \varphi') + a'^2]^{-\frac{n}{2}}$ nach Vielfachen von $\varphi + \varphi'$ und $\varphi - \varphi'$ verwendet, sowie zur Auswertung bestimmter Doppelintegrale benutzt. Ohne Beweis — wie dies auch wieder später der Fall ist — wird im Anschluß hieran endlich der wichtige Satz ausgesprochen: „Duarum planetarum, quae in orbitis ellipticis moventur, distantia, ad potestatem quamcunque elata, si in seriem infinitam evolvenda proponitur, secundum cosinus ac sinus multiplorum anomaliarum earum excentricarum procedentem: evolutionis coefficientes numero dupliciter infinitae omnes per quindecim ex earum numero lineariter exprimi possunt."

Diese letztere Bemerkung findet in der vom 9. Oktober 1835 datierten Arbeit „De evolutione expressionis $(l + 2l' \cos \varphi + 2l'' \cos \varphi')^{-n}$ in seriem infinitam secundum cosinus multiplorum utriusque anguli φ, φ' procedentem" eine Ergänzung. „Quamvis vero in his quoque rebus gravia restent, in quibus tractandis a novis principiis proficisci debes, hoc loco ad alius generis disquisitionem methodos viri illustris (Legendre)

applicabo.... Theoremata quaedam de expressionibus complicatioribus a me inventa in alia nuper commentatione indicavi.“ Für die Entwicklung des analogen Ausdruckes nach den cosinus eines Winkels findet, wie aus der Theorie der Kugelfunktionen bekannt war, eine Rekursionsformel für die Koeffizienten statt, nach der sich alle aus einer endlichen Anzahl derselben darstellen lassen; es entsteht nun die Frage, wie sich dies für die Entwicklung nach den cosinus der beiden Winkel gestaltet, und zwar soll dies durch Aufstellung der Rekursionsformeln für je einen Winkel ermittelt werden. Wenn $U = \Delta^{-n} = (l + 2l' \cos\varphi + 2l'' \cos\varphi')^{-n} = \sum p_{ii'} e^{(i\varphi + i'\varphi')\sqrt{-1}} = p_{00} + 2\sum p_{i0} \cos i\varphi + 2\sum p_{0i'} \cos i'\varphi' + 4\sum p_{ii'} \cos i\varphi \cos i'\varphi'$ sein soll, so werden die Größen $p_{ii'}$ nach den in der letzten Arbeit von Jacobi aufgestellten Formeln durch den Ausdruck bestimmt sein:

$$p_{ii'} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos i\varphi \cos i'\varphi'\, d\varphi\, d\varphi'}{(l + 2l' \cos\varphi + 2l'' \cos\varphi')^n} =$$

$$\frac{(-2)^{i+i'}}{\pi^2}\, \frac{n(n+1)\cdots(n+i+i'-1)}{1\cdot 3\cdots(2i-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2i'-1)}\, (l')^i (l'')^{i'} \int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\sin^{2i}\varphi \sin^{2i'}\varphi'\, d\varphi\, d\varphi'}{(l + 2l' \cos\varphi + 2l'' \cos\varphi')^{n+i+i'}},$$

und er findet aus den Differentialbeziehungen $\Delta \frac{\partial U}{\partial \varphi} + n \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} U = \frac{\partial \Delta U}{\partial \varphi} + (n-1)\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} U = 0$ und $\Delta \frac{\partial U}{\partial \varphi'} + n \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi'} U = \frac{\partial \Delta U}{\partial \varphi'} + (n-1)\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi'} U = 0$ zwischen den p die Rekursionsformel $i'[l p_{ii'} + 2l' p_{i-1i'}] + l''[(i' - i + n - 1) p_{ii'-1} + (i' + i - n + 1) p_{ii'+1}] = 0$ und 3 ähnliche, wodurch die Bestimmung aller auf die 4 voneinander unabhängigen Größen $p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}$ reduziert ist. Für die Entwicklungskoeffizienten von $U = \sum P_{i'} e^{i'\varphi'\sqrt{-1}}$ ergibt sich zugleich die Differentialgleichung 3. Ordnung $M P_{i'} + M' \frac{dP_{i'}}{d\varphi} + M'' \frac{d^2 P_{i'}}{d\varphi^2} + M''' \frac{d^3 P_{i'}}{d\varphi^3} = 0$, in welcher M, M', M'', M''' ganze lineare Funk-

tionen von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$ sind. Ähnliche Sätze werden für den Fall ausgesprochen, daß $\varDelta$ eine beliebige ganze Funktion von $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi'$, $\sin\varphi'$ bezeichnet, jedoch wird weder hier noch in seinen späteren astronomischen Arbeiten, in denen sich dieselben wiederholt angeführt finden, ein strenger Beweis für dieselben geliefert. In seinem Nachlaß fand sich ein Bruchstück betitelt „De evolutione expressionis $\{A + B\cos\varphi + C\sin\varphi + (A' + B'\cos\varphi + C'\sin\varphi)\cos\varphi' + (A'' + B''\cos\varphi + C''\sin\varphi)\sin\varphi' + \cdots\}^{-n}$ in seriem infinitam secundum cosinus ac sinus multiplorum utriusque anguli φ, φ' procedentem, una cum applicatione ad calculum motus planetarum", in dessen Einleitung Jacobi hervorhebt, daß die Theorie der Bewegung der in ihren elliptischen Bahnen gestörten Himmelskörper sich wesentlich um die Entwicklung der reziproken Distanz zweier Planeten nach den cosinus und sinus der Vielfachen der beiden mittleren Anomalien dreht, und daß gerade dieser Teil des Problems, insofern sich dasselbe nicht auf die Variation der Elemente bezieht, eigentlich seit Euler keine Fortschritte gemacht hat. Seitdem am Anfange des Jahrhunderts Planeten entdeckt waren, deren Bahnen große Exzentrizitäten und große Neigungen hatten, wurden die früheren Methoden hinfällig, und die Astronomie besaß keine Methode, um die Störungen durch analytische Ausdrücke darzustellen. Gauss habe schon am Beginn des Jahrhunderts bei Berechnung der Bahn der Pallas die Veröffentlichung seiner Methoden in Aussicht gestellt, aber in den 25 Jahren sei nichts außer der Arbeit „determinatio attractionis etc." erschienen. Bruns vermutet, bei der Besprechung des astronomischen Nachlasses von Jacobi, daß das Ziel, welches Jacobi auf den später verloren gegangenen Blättern, von denen nur ein Bruchstück sich gefunden, vorschwebte, die Aufstellung der linearen Relationen war, welche zwischen den Koeffizienten der Entwicklung stattfinden, ferner die Aufsuchung der linear voneinander unabhängigen Koeffizienten, durch welche sich alle anderen

linear ausdrücken lassen, und endlich die Aufsuchung von linearen Differentialgleichungen, denen die Koeffizienten genügen. Jacobi wiederholt auch hier den am Schlusse der vorigen Arbeit ausgesprochenen Satz von der linearen Abhängigkeit aller Koeffizienten von 15 derselben, fügt aber hinzu: „Coefficientes illas quindecim non prorsus ex arbitrario accipere licet, fit enim, ut e coefficientibus initialibus quaedam a minori numero antecedentium pendeant. Unde cavere debes, ne in coefficientium primordialium numerum referas, quae a se invicem non sint independentes.“

Wie aus den späteren Arbeiten ersichtlich, hatten inzwischen geometrische Untersuchungen Jacobi zu wichtigen algebraischen Ergebnissen geführt, deren Veröffentlichung mit der vom 27. August 1835 datierten Arbeit „De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis“ beginnt. Während Bézout das Problem der Elimination einer Größe x zwischen zwei Gleichungen $f(x) = 0$ und $\varphi(x) = 0$ auf ein Eliminationsproblem zwischen linearen Gleichungen zurückführte, indem er, wenn $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ $\varphi(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0$ gesetzt wird, die Gleichungen $m_r = (a_n x^{n-r-1} + \cdots + a_{r+1})\,\varphi(x) - (b_n x^{n-r-1} + \cdots + b_{r+1}) f(x) = \alpha_{0r} x^0 + \cdots + \alpha_{n-1\,r} x^{n-1} = 0$ $(r = 0, 1, \cdots n-1)$ bildet und aus den n in $x^0, x^1, \ldots x^{n-1}$ linearen homogenen Gleichungen diese n Größen eliminiert, stellt Jacobi zunächst das Verschwinden der Determinante L der α_{rs} als Bedingung für die Existenz eines gemeinschaftlichen Teilers von $f(x)$ und $\varphi(x)$ auf; aus der Beziehung $\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$ folgert er, da $Lx^{(r)} = A_{r0} m_0 + \cdots + A_{r\,n-1} m_{n-1}$ ist, $A_{rs} = A_{sr}$, und für das den beiden Gleichungen gemeinsame x die Beziehung $x^0 : x^1 : \ldots : x^{n-1} = A_{0r} : A_{1r} : \ldots : A_{n-1\,r}$. Durch Umformung der Determinante gelangt Jacobi im Prinzip zu der späteren Cayleyschen Eliminationsmethode und knüpft hieran noch weitere Sätze, welche sich später in seiner Determinantentheorie wiederfinden, wie z. B. daß der Wert von A_{rs} nur von der Summe $r + s$ der Indices abhängt, u. a. m. Es mag endlich noch

das folgende Theorem Erwähnung finden, dem sich eine Reihe ähnlicher anschließt, und worin A_{rs} durch A_{r+s} zu ersetzen ist: „Sit $w_k = 0$ aequatio k^{ti} ordinis respectu ipsius x, quae provenit e $k+1$ aequationibus $L = A_0 m_0 + A_1 m_1 + \cdots + A_{k-1} m_{k-1}$, $Lx = A_1 m_0 + A_2 m_1 + \cdots + A_k m_{k-1}$, $\ldots Lx^k = A_k m_0 + A_{k+1} m_1 + \cdots + A_{2k-1} m_{k-1}$, eliminatis k quantitatibus $m_0, m_1, \ldots m_{k-1}$; si ipsius w_k potestas altissima x^k coefficientem habet $\Sigma \pm A_{00} A_{11} \ldots A_{k-1\,k-1}$, erit expressio $[\Sigma \pm A_{00} A_{11} \ldots A_{k-2\,k-2}]^2 w_k + [\Sigma \pm A_{00} A_{11} \ldots A_{k-1\,k-1}]^2 w_{k-2}$ per w_{k-1} divisibilis."

In den Herbstferien widmet sich Jacobi wieder ganz seinen großen Arbeiten, die ihn schon seit Jahren unausgesetzt beschäftigen, beeilt sich aber, um Zeit und Muße für die Ausarbeitung derselben zu gewinnen, erst noch eine Reihe von Lücken in seinen früheren Veröffentlichungen über Transzendenten, Algebra und Geometrie auszufüllen.

Es war bekannt, daß die Substitutionen $\cos\varphi = \alpha \cos\eta + \beta \sin\eta \cos\vartheta + \gamma \sin\eta \sin\vartheta$ und die analogen für $\sin\varphi \cos\psi$ und $\sin\varphi \sin\psi$, wenn $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$, $\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0, \ldots$, das Doppelintegral $\int\!\!\int U \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi$ in $\int\!\!\int U \sin\eta\, d\eta\, d\vartheta$ überführen, worin U in dem ersten durch φ, ψ, in dem zweiten durch η, ϑ auszudrücken ist, und Jacobi hatte bereits in einer früheren Arbeit von dieser Transformation des Doppelintegrals mehrfache Anwendungen gemacht; in der vom 12. September 1835 datierten Abhandlung „De integralibus quibusdam duplicibus, quae post transformationem variabilium in eandem formm redeunt" liefert er zwei neue Beispiele für eine Transformation, welche ebenfalls das Integralelement unverändert läßt. Sind nämlich zwischen den Größen x, y, z, p, q, r zwei Gleichungen vorgelegt $0 = gx + hy + iz = g'p + h'q + i'r$, $0 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy = a'p^2 + b'q^2 + c'r^2 + 2d'qr + 2e'rp + 2f'pq$, von denen die eine in bezug auf x, y, z, p, q, r homogen linear, die andere in bezug auf dieselben Größen homogen vom 2. Grade ist,

sei ferner $x^2 + y^2 + z^2 = p^2 + q^2 + r^2 = 1$, so besteht die Transformationsgleichung

$$\iint \frac{U\,dp\,dq}{r\sqrt{g^2(d^2-bc)+h^2(e^2-ca)+i^2(f^2-ab)+2hi(da-ef)+2ig(eb-fd)+2gh(fc-de)}}$$
$$=$$
$$\frac{U\,dx\,dy}{\sqrt{g'^2(d'^2-b'c')+h'^2(e'^2-c'a')+i'^2(f'^2-a'b')+2h'i'(d'a'-e'f')+2i'g'(e'b'-f'd')+2g'h'(f'c'-d'e')}}$$

und eine ähnliche Beziehung, wenn zwei Gleichungen gegeben sind, von denen jede homogen linear in dem einen und homogen vom 2. Grade in dem anderen Wertesystem ist.

Auch die Theorie der elliptischen Funktionen ergänzte er durch einige sehr interessante und wichtige Formeln, die er am 21. September 1835 unter dem Titel „Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales“ veröffentlichte. Vom Additionstheorem der elliptischen Funktionen ausgehend hatte er und nach ihm Richelot eine Beziehung zwischen $\sin\operatorname{am}(u+a+b)$, $\sin\operatorname{am}(u+a)$, $\sin\operatorname{am}(u+b)$ und $\sin\operatorname{am} u$ entwickelt und durch Anwendung dieser auf die Integrale 2. Gattung das Additionstheorem derselben, sowie durch Einführung von $\log \Omega(u) = \int_0^u E(u)\,du$ für die Integrale 3. Gattung $\Pi(u, a) = uE(a) + \frac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)}$ auch die Additionstheoreme dieser aufgestellt. Endlich leitet er noch aus $H(u) = \sqrt{\varkappa}\,.\,\sin\operatorname{am} u\,.\,\Theta(u)$ die für die späteren Anwendungen wichtige Beziehung her

$$\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)} + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{\Theta'(u+a+b)}{\Theta(u+a+b)}$$
$$= \frac{H'(o)\,H(a+b)\,H(u+a)\,H(u+b)}{\Theta(a)\,\Theta(b)\,\Theta(u)\,\Theta(u+a+b)}.$$

„Dedi olim sine demonstratione expressiones algebraicas generales radicum aequationum n^{ti} gradus, quae transformationem functionum ellipticarum concernunt. Quae formulae, quae spectari debebant ut id, quod hactenus in theoria functionum ellipticarum maxime reconditum est, per principium

novum ac latissime patens a me inventae sunt; post ope formulae memorabilis eas demonstratione maxime eleganti atque elementari comprobare contigit. Quod suo tempore in lucem proferemus.“

Daß ihn aber in diesen Ferien unausgesetzt mechanische und astronomische Fragen beschäftigten, ohne daß er noch zu irgendeiner Veröffentlichung über diese Probleme gelangte, ersehen wir aus der Korrespondenz Bessels mit ihm und andern befreundeten Gelehrten. „Jacobi bemüht sich viel um die Entwicklung der Störungen der Himmelskörper“, schreibt Bessel am 24. September an Schumacher; „so viel ich einsehe, liegt die Hauptschwierigkeit, welche bis jetzt garnicht ordentlich beseitigt werden kann, und auch nur durch eine neue Idee beseitigt werden wird, in den von den höheren Ordnungen der Massen abhängigen Theilen. Die Aufgabe, unabhängig von der Bedingung, daß zwei der drei Massen vergleichungsweise mit der dritten kleine Größen seien, scheint durch die Natur aufgelöst werden zu können; wenigstens scheint der dreifache Stern ζ Cancri einen Fall dieser Art zu zeigen, indem er aus 3, ihren Helligkeiten nach nicht sehr verschiedenen Theilen zusammengesetzt ist. Die allergrößte Entdeckung in der Mathematik würde wohl die Erfindung eines neuen Integrals der Differentialgleichung der Bewegung dieser Körper sein. Gesucht ist dieses Integral gewiß häufig genug“,

und Jacobi schreibt selbst am 11. Oktober 1835 an Bessel gelegentlich einer Anfrage über die Verdienste von Pfaff in der Theorie der Differentialgleichungen und mit Bezug auf ein mündliches Gespräch über einige Punkte der analytischen Mechanik: „Schreiben Sie ihm, daß Sie ferner der ebendaselbst von ihm ausgesprochenen Bemerkung vollkommen beistimmten, daß Pfaff ein vortrefflicher Mathematiker gewesen sei, und wenn auch bisweilen seine lichten Momente mit anderen abgewechselt hätten — was immer erfreulich sei, da manche nur die andern hätten — so bliebe

es doch dahin gestellt, ob er grade in solchen die Prüfung und Bestätigung der wichtigeren Sätze bewerkstelligt..... Pontécoulant's Analyse des besprochenen Gegenstandes ist ganz die Poisson'sche und ebenso unelegant, als ob Lagrange nie gelebt hätte. Wenn sie mir von meinem schönen Rosenstrauch die Blume pflücken und nur die Dornen zurücklassen, sollten sie doch säuberlicher mit umgehen."

Bevor nun Jacobi in das Wintersemester eintrat, veröffentlichte er noch eine fundamentale algebraisch-geometrische Untersuchung, welche eine Ausführung und geniale Fortentwicklung seiner früheren „Theoremata nova algebraica etc." war. In der Arbeit „De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis simul cum enodatione paradoxi algebraici" weist Jacobi darauf hin, daß der Widerspruch, den Euler darin findet, daß durch neun Punkte eine Kurve 3. Ordnung bestimmt ist, während doch zwei Kurven 3. Ordnung sich in neun Punkten schneiden, durch die dann alle Kurven 3. Ordnung des Büschels gehen, daher rühre, daß eine ganze Funktion n. Grades von m Variabeln freilich im allgemeinen durch $\binom{n+m}{m}$ Werte bestimmt ist, daß dies jedoch dann und nur dann der Fall ist, wenn das Wertsystem eine gewisse Determinante nicht zu Null macht. Er zeigt zunächst, daß von den n^2 Durchschnittspunkten zweier Kurven n. Ordnung $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkte durch die übrigen bestimmt sind, weist auf rein algebraischem Wege, gestützt auf die Formeln der erwähnten Abhandlung, nach, daß, wenn mn einfache Punkte auf zwei algebraischen Kurven m. und n. Ordnung gelegen sein sollen, wo $m > n$, zwischen den $2mn$ Koordinaten der mn Punkte $mn - 3n + 1$ Bedingungsgleichungen ($n^2 - 3n + 2$ für $m = n$) stattfinden müssen, und daß ferner die größte Zahl der Punkte, welche auf einer Kurve n. Ordnung beliebig angenommen werden können, damit

man durch eben dieselben eine einfache Kurve m. Ordnung legen kann, wenn wiederum $m > n$, $mn - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ist, daß somit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ von den Schnittpunkten einer Kurve m^{ter} und n^{ter} Ordnung durch die $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ übrigen eindeutig bestimmt sind; der Beweis dieser, der Jacobische Satz genannten, Erweiterung des Cramer-Plückerschen Problems stützt sich im wesentlichen auf sein früher aufgestelltes Theorem, nach welchem für zwei Gleichungen $f_m(x, y) = 0$, $f_n(x, y) = 0$ die Beziehung

$$\sum \frac{x^\alpha y^\beta}{\frac{\partial f_n}{\partial x}\frac{\partial f_m}{\partial y} - \frac{\partial f_m}{\partial x}\frac{\partial f_n}{\partial y}} = 0$$

besteht, wenn $\alpha + \beta \leqq m + n - 3$, und sich die Summation über alle mn Schnittpunkte erstreckt, wobei alle diese Gleichungen aus $\frac{(m-n-1)(m-n-2)}{2}$ von ihnen abgeleitet werden können. Diese und eine Reihe anderer Sätze über ebene Kurven dehnt nun Jacobi auch auf Flächen aus; er findet zunächst, daß durch $\frac{(n+1)(n+2)n+3)}{2 \cdot 3} - 2$ Punkte die Durchschnittskurve zweier Flächen n. Ordnung bestimmt wird, durch $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2 \cdot 3} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{2 \cdot 3} - 1$ Punkte die Durchschnittskurve einer Fläche n. und m. Ordnung, wenn $m \geqq n$, und daß endlich $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3} - 3$ Punkte die n^3 Punkte bestimmen, in denen drei Flächen n. Ordnung sich schneiden. Ist eine Durchschnittskurve zweier Flächen n. Ordnung gegeben, so werden von in ihr gelegenen Punkten, durch welche eine Fläche m. Ordnung $(m \geqq n)$ sich legen läßt, welche nicht durch die Kurve selbst geht, nicht mehr willkürlich angenommen werden können als $n^2(m-n+2) - 1$, wenn $m \geqq 2n - 3$, und wenn $m < 2n$, nicht mehr als

$$n^2(m-n+2) + \frac{(2n-m-1)(2n-m-2)(2n-m-3)}{2 \cdot 3} - 1,$$

und gerade durch so viel Punkte wird man stets eine Fläche m. Ordnung legen können. Endlich wird für die n^2m Punkte, in denen sich zwei Flächen n. und eine Fläche m. Ordnung schneiden, die Zahl der Bedingungen, welche zwischen den Koordinaten dieser Punkte stattfinden muß, bestimmt und die Gesamtzahl der Bedingungen aufgestellt, denen mnp Punkte genügen müssen, damit sie als Durchschnittspunkte dreier Flächen $m.$, $n.$, p. Ordnung betrachtet werden können, welche keine gemeinsame Durchschnittskurve besitzen.

Einige bei Gelegenheit der geometrischen Übungen im Sommer gemachte Bemerkungen veröffentlichte er am 14. Oktober 1835 unter dem Titel „Observationes geometricae“. Wenn ein Körper gegeben ist, so wird ein zu diesem symmetrischer gebildet, wenn einer oder den drei Koordinaten aller Punkte entgegengesetzte Werte zuerteilt werden, ein kongruenter, wenn man zwei Koordinaten entgegengesetzte Werte gibt, endlich ein ähnlicher, wenn statt der Koordinaten die m-fachen Werte derselben gesetzt werden, worin m positiv. Nachdem nun Euler bewiesen, daß es für zwei ähnliche Körper einen beiden gemeinsamen, oder sich selbst entsprechenden Punkt gibt, das Ähnlichkeitszentrum, von dem aus beide Körper gesehen einen ähnlichen Anblick bieten, stellt Jacobi, um für einen gegebenen Körper einen andern zu bilden, der ihm in beliebiger Lage ähnlich ist, für die Koordinaten die Beziehungen auf $mx = f + \alpha p + \beta q + \gamma r$, $my = g + \alpha' p + \beta' q + \gamma' r$, $mz = h + \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r$, so daß die des sich selbst entsprechenden Ähnlichkeitspunktes durch die hieraus entspringenden drei Gleichungen bestimmt werden, wenn man für x, y, z und p, q, r die Koordinaten dieses Punktes A, B, C setzt. Da nun, wie unmittelbar zu sehen, der Nenner der hieraus sich ergebenden Werte von A, B, C nur dann verschwindet, wenn $m = 1$, also die Körper kongruent sind, so folgt, daß nur zwei kongruente Körper keinen Ähnlichkeitspunkt besitzen.

Der Winter 1835/36 nimmt nun die Kräfte Jacobis

wieder aufs äußerste in Anspruch; Integralrechnung, Theorie der elliptischen Funktionen und seminaristische Übungen hatte er für dieses Semester angekündigt. Von den beiden Vorlesungen besitzen wir Nachschriften von Rosenhain. Die für Anfänger bestimmte Vorlesung über Integralrechnung behandelte nur die Quadraturen rationaler und solcher irrationaler Funktionen, welche Quadratwurzeln aus Polynomen 1. und 2. Grades einschließen, und erst am Schluß der Vorlesung finden sich noch einige Auseinandersetzungen über die Elemente der Theorie der totalen Differentialgleichungen mit dem Hinweis, daß die Aufsuchung der behandelten Quadraturen nichts anderes bedeute, als die Integrale der einfachsten Differentialgleichungen in algebraischer Form oder durch die elementaren Transzendenten darzustellen. Die Vorlesungen über elliptische Funktionen dagegen, die er in 77 Stunden gehalten, waren von einer Tiefe und Eleganz der Darstellung und brachten eine so reiche Fülle des Stoffes, wie sie keine seiner früheren Vorlesungen geboten. „Da die 10stündigen Vorlesungen über die elliptischen Transzendenten die Kräfte der Zuhörer in hohem Grade in Anspruch nahmen, so hielt ich es für zweckmäßig, die Übungen des Seminars bereits Neujahr einzustellen.“

Die Rosenhainsche Nachschrift dieser Vorlesung beginnt mit einer kurzen Einleitung und Charakteristik des Legendreschen traité; „indem Legendre von der allgemeinen Bestimmung der drei Integralgattungen ausging, konnte er sich doch nicht von dem physiokratischen Prinzip seiner Zeit trennen; er betrachtete es daher als seine Haupttendenz, die numerischen Werte der Integrale zu bestimmen.“ Jacobi geht hier zum ersten Male zur Begründung der elliptischen Transzendenten von der ϑ-Funktion aus; „weder Fourier noch Abel haben den Zusammenhang dieser Funktion mit den elliptischen Integralen eingesehen .... Die Definition dieser Transzendenten durch eine unendliche

Reihe hat vor jeder anderen den Vorzug, weil man von ihrem Werte immer eine bestimmte Vorstellung hat, während bei der Definition der Transzendenten durch Integrale die präzise Vorstellung aufhört, sobald die Grenzen der Integrale imaginäre Größen werden, weil wir an diese Form weniger gewöhnt sind. Ihre Theorie ist von Cauchy ausgearbeitet, aber sie hat doch noch nicht den Grad von Klarheit, welchen eine unendliche Reihe hat. Hierzu kommt noch die Undeutlichkeit, welche eine Quadratwurzel unter dem Integral hervorbringt, besonders wenn die Variable imaginäre Werte annimmt, wie bei allen Transzendenten."

Nach Entwicklung der charakteristischen Eigenschaften der ϑ-Funktion werden mit Hilfe dieser die Nullwerte derselben bestimmt, und hieraus die unendliche Produktentwicklung dieser Transzendenten abgeleitet. „Ich habe auf zwei Arten die Funktion durch ein unendliches Produkt dargestellt; es war vorauszusehen, daß dieses Resultat, dessen Auffindung so viel Schwierigkeit machte, desto wichtiger sein würde; diese Erwartung wurde erfüllt, denn es ergaben sich in der Tat daraus die wichtigsten Theoreme", und er entwickelt danach durch Verwandlung der unendlichen Produkte in Reihen die schon früher von ihm veröffentlichten zahlentheoretischen Sätze. An den Beweis des Satzes, daß jede Zahl sich als die Summe von vier Quadraten darstellen lasse, knüpft er einige Bemerkungen allgemeinerer Natur: „Dieser Satz bildet einen Teil eines großen Lehrsatzes von Fermat; er gab die ersten Gründe dazu in Noten zu einer Ausgabe des Diophantus, worin sich mehrere Sätze befinden, die jedoch fast alle ohne Beweis mitgeteilt sind. Von einigen, sagt er, habe er keinen Beweis finden können, und diese sind meistenteils falsch, von anderen, er habe einen Beweis, und diese hat man später als richtig erkannt. Unter diesen letzteren befindet sich der Hauptsatz, der noch bis jetzt nicht allgemein hat erwiesen werden können, daß jede Zahl die Summe von

höchstens m m-eckigen Zahlen sei . . . . . Der Satz, der die dreieckigen Zahlen behandelt, ist erst von Gauss in den Disquisitionibus arithmeticis bewiesen, doch gesteht er hier selbst ein, daß seine Methode sich nicht auf die fünfeckigen Zahlen würde anwenden lassen. Cauchy fand endlich den Beweis auch für diese; ich habe ungeachtet vieler Versuche diesen Satz noch nicht auf die elliptischen Transzendenten zurückführen können.“ Nachdem diese Untersuchungen sieben Vorlesungen in Anspruch genommen, geht Jacobi zur Entwicklung der ϑ-Funktion nach der Fourierschen Reihe über und macht davon einige Anwendungen auf die lineare Transformation dieser Transzendenten: „Diese Transformation ist eine der wunderbarsten der ganzen Analysis und sie gibt für spezielle Werte von q und z Gleichungen, die so auffallend sind, daß man sie ohne numerische Beispiele fast nicht glaubt“; danach vertieft er sich in vielen der folgenden Vorlesungen immer mehr in die allgemeine Transformation der ϑ-Funktion, freilich nach Methoden, die komplizierte und wenig übersichtliche Rechnungen erfordern und offenbar in dieser Form von ihm zum ersten Male und direkt für diese Vorlesung angestellt waren.

Mit seiner 22. Vorlesung beginnt aber ein völlig neuer Aufbau der Theorie der elliptischen Funktionen, der sich freilich erst systematisch in einer drei Jahre späteren Vorlesung vollzogen hat. Jacobi beweist ein „neues Fundamentaltheorem unserer Transzendenten“, jenen so berühmt gewordenen Satz von der Summe von Produkten von vier ϑ-Funktionen, den er selbst erst wenige Wochen vorher gefunden. Kronecker vermutet mit Recht: „Da Jacobi beim Beginn der Vorlesungen 1835/36, wie aus der Rosenhainschen Ausarbeitung deutlich zu ersehen ist, das neue Fundamentaltheorem der Transzendenten ϑ gehabt hat, so fällt dessen Entdeckung notwendig in die Zeit zwischen dem 21. September 1835, welches Datum der Aufsatz 'Formulae novae etc.' trägt, und dem Anfange der Winter-

vorlesungen. Man kann daher mit aller Sicherheit die durch die Entdeckung der ϑ-Relation bezeichnete Epoche und die damit beginnende neue Phase in der Entwicklung der Theorie der elliptischen Funktionen vom Ende September oder Anfang Oktober 1835 datieren."

Nach Herleitung der Additionstheoreme der ϑ-Funktionen aus jenem allgemeinen Theorem und der Beziehungen zwischen den vier ϑ-Funktionen untereinander, geht Jacobi zur Aufstellung der Relationen zwischen den Differentialquotienten dieser vier Funktionen über und zu der von ihm entdeckten merkwürdigen Beziehung des Differentialquotienten des ungraden ϑ zu den drei anderen Grundfunktionen für das verschwindende Argument. Nun wird der Zusammenhang der ϑ-Transzendenten mit den elliptischen Integralen der drei Gattungen eingehend untersucht; er definiert die drei elliptischen Funktionen als Quotienten von ϑ-Funktionen, leitet aus den Eigenschaften der letzteren die Periodizität der ersteren her und entwickelt aus speziellen Fällen seines allgemeinen ϑ-Theorems die Additionsformeln der elliptischen Transzendenten, sowie aus dem Zusammenhang der elliptischen Integrale 2. und 3. Gattung mit der ϑ-Funktion die Additionstheoreme dieser Integrale. Große Schwierigkeiten bereitet ihm der Begriff der unendlichen Vieldeutigkeit des elliptischen Integrales, indem er auf die Cauchysche Anschauungsweise vom komplexen Integral einzugehen versucht, und kommt bei dieser Gelegenheit auf den von ihm früher bewiesenen Satz, daß eine Funktion einer Variabeln nicht mehr als zwei Perioden haben kann. Hieran schließt sich die ausführliche Entwicklung der Eigenschaften der elliptischen Funktionen, hergeleitet aus denen der ϑ-Funktionen, die Aufstellung der verschiedenen Formen der Additionstheoreme nebst der „Anwendung auf ein Problem der Elementargeometrie", und eine nochmalige, etwas veränderte Darstellung der elliptischen Integrale 2. und 3. Gattung durch die ϑ-Funktionen. Von

der Transformation und Multiplikation der ϑ ausgehend behandelt er weiter die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen, geht aber nur auf die Transformation 1. und 2. Grades näher ein. Die 67. Vorlesung ist dem Abelschen Theorem und den Abelschen Transzendenten gewidmet; „ein Zweig der Analysis, der für die Zukunft eine große Entwicklung verspricht, beschäftigt sich damit, zusammengesetzte algebraische Relationen durch einfache Transzendenten zu ersetzen. Es könnte scheinen, als würde dadurch etwas Niederes auf etwas Höheres zurückgeführt, gleichwohl aber sieht man, wenn man den Gegenstand genauer ins Auge faßt, daß gerade dieses in gewissen Fällen unser tägliches Geschäft ist." Nachdem er vom Abelschen Theorem gesprochen und von den neuen Transzendenten, die mittels desselben in die Analysis eingeführt werden, hebt er hervor, daß man nicht hoffen darf, etwa auf einem unangemessenen Wege durch Überwindung der mühsamsten Rechnungen zu einem Resultate zu gelangen, „hier wird alles durch die Kraft der Betrachtung abgeleitet werden müssen, wenn diese Theorie zustande kommt; dann freilich wird sie auch als der Glanzpunkt mathematischer Forschung dastehen, weil durch sie der höchste mathematische Verstand durch Rechnung unverdunkelt zur Anschauung kommen muß." Jacobi entwickelt endlich ausführlich das Abelsche Theorem für hyperelliptische Integrale, bespricht den von ihm gegebenen Ansatz für die Umkehrung dieser Integrale und erläutert die Periodizität dieser Umkehrungsfunktionen.

Bei Gelegenheit seiner Vorlesung hatte Jacobi eine Aufzeichnung über einen schon früher erwähnten Punkt aus der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen gemacht, die erst nach seinem Tode aus seinem Nachlaß im Jahre 1891 unter dem Titel „De transformationibus functionum ellipticarum irrationalibus sive inversis" von Mertens herausgegeben wurde, und welche aus den Aus-

drücken für $\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ durch $\sin\operatorname{am}(u, \varkappa)$ und $\sin\operatorname{am}(nu, \varkappa)$ durch $\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ die vollständigen algebraischen Auflösungen der durch diese Ausdrücke definierten Gleichungen in der Form herleitet:

$$\frac{n\varkappa M}{\lambda}\sin\operatorname{am}(u + 4p\omega, \varkappa) = \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$$

$$+ \sum e^{\frac{8\nu p\pi i}{n}} \sin\operatorname{am}\left(\frac{u + 4\nu\omega'}{M}, \lambda\right) \sqrt[n]{\frac{\Psi(4\nu\omega')\Psi(u)}{\Psi(u + 4\nu\omega')}},$$

$$\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u + 4p\omega'}{M}, \lambda\right) = \sin\operatorname{am}(nu, \varkappa)$$

$$+ \sum e^{-\frac{8\nu p\pi i}{n}} \sin\operatorname{am}(nu + 4\nu\omega, \varkappa) \sqrt[n]{\frac{\Phi(4\nu\omega)\Phi(nu)}{\Phi(nu + 4\nu\omega)}},$$

worin

$$\Phi(u) = \left(1 - \varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(2\omega, \varkappa)x^2\right) \ldots \left(1 - \varkappa^2\sin^2\operatorname{am}((n-1)\omega, \varkappa)x^2\right),$$

$$\Psi(u) = \left(1 - \lambda^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2\omega'}{M}, \lambda\right)y^2\right) \ldots \left(1 - \lambda^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{(n-1)\omega'}{M}, \lambda\right)y^2\right),$$

wenn $x = \sin\operatorname{am}(u, \varkappa)$, $y = \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$, $n\omega = mK + m'iK'$, $4n\omega' = \mu K + \mu' i K'$ und $m\mu' - \mu m' = 1$ ist.

Am 18. Februar 1836 wurde Jacobi zum auswärtigen Mitglied der Berliner Akademie gewählt und erhielt die Nachricht davon zuerst durch Steiner, der ihm von den Einzelheiten der Wahl, von der Gefahr, die ihm Cauchy als Gegenkandidat bereitete, in einem humoristischen Briefe vom 22. Februar nähere Schilderungen gab und dann fortfährt: „Dein erster Brief enthielt die Weisung, es wäre für mich gut, wenn wir bei Zeiten wieder zusammenkämen, die ich, als ein in der Polar-Geschichte geübter, glaube richtig gefaßt zu haben. Dem Joh. Schulze wurde bemerkt, Berlin, der höchste wissenschaftliche Ort Deutschlands, wohin alle Lernbegierigen strömen, leiste in der Mathematik fast nichts; in seiner Provinz stehe es mit derselben auf den Gymnasien am schlechtesten; diesem Mangel sei zwar leicht, aber nur

dadurch abzuhelfen, daß man Dich hierher berufe, mit Machtvollkommenheit zum Examinator ernenne; aus eigner Machtvollkommenheit würdest Du von selbst bei der Universität sowie in allen literarischen Beziehungen das belebende Centrum werden, was für mich, D., und überhaupt für Alles, was mathematisch lebt und kreucht, von größter Wichtigkeit würde, und zwar sei der Plan dadurch möglich zu machen, daß Pl. nach Bonn und O. nach Halle versetzt werde. Ja, ja, es wäre gut, aber es geht nicht, kein Geld, kein Geld! ..... Das genannte Schriftchen (die Elemente der Isoperimetrie) ist nämlich nur ein Theil von einem Chaos über Maximum und Minimum, worin ich im Winter 1834/35 wühlte. Durch einige erfolgreiche Kniffe angespornt, wollte ich diesen Gegenstand für die Geometrie elementarisch behandeln, die Differentialrechnung mit Schand' und Spott aus diesem Reiche hinaustreiben, weil sie in den meisten Fällen reine Spiegelfechterei ist, dagegen aber das ∞ Kleine, wie es zu Anfang und vor jener im Gebrauch war, wieder zu hohen Ehren bringen. Ich gewann viele schöne neue Resultate, aber auch anscheinend falsche, blieb an vielen Stellen stecken, kein rex, der helfen konnte oder aus nobler Ambition helfen mußte. Ich war lange im Begriff, Dir einige von diesen Schwierigkeiten zur Entscheidung vorzulegen und würde es noch thun, wenn mich nicht der Gedanke an Dein ältliches Volumen abschreckte; nur der 16jährige Jüngling war omnipotent. .... In Rücksicht Deiner sehr verdienstlichen sphärischen Leistungen folgendes: was den Alten schwer gewesen, nennt Heuristes Kinderspiel; hätt' er etwas mehr gelesen, so erfänd er nicht so viel."

Mit dem Winter 1835/36, der Jacobis Kräfte aufs äußerste angespannt hatte, hörte für längere Zeit die Beschäftigung mit der Theorie der elliptischen und Abelschen Transzendenten auf — er hatte die ganze Spannkraft seines Geistes nötig, um endlich mit seinen weittragenden Entdeckungen in der Mechanik, der Variationsrechnung

und der Theorie der Differentialgleichungen, wenn auch zunächst nur noch in Andeutungen, in die Öffentlichkeit zu treten.

„Sollte man wohl“, schreibt er am 24. Juni 1836 an Bessel, „bei einer so gemeinen Sache, wie die Bewegung eines Punktes in einer Ebene, noch Neues bemerken können? Und doch glaube ich, daß das Folgende neu und merkwürdig ist. Es seien $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$ und habe man außer der lebendigen Kraft noch ein Integral gefunden $\varphi(x, y, x', y') = a$, worin t nicht explicite vorkommt, so daß man x', y' in x, y, h, a ausdrücken kann, so ist der Ausdruck $x'dx + y'dy$ immer ein genaues Differential, also auch seine Differentiale nach h und a genommen, und von den beiden Gleichungen

$$b = \int\left(\frac{\partial x'}{\partial a}dx + \frac{\partial y'}{\partial a}dy\right), \quad t + \tau = \int\left(\frac{\partial x'}{\partial h}dx + \frac{\partial y'}{\partial h}dy\right)$$

giebt die erste die gesuchte Gleichung zwischen x und y, die zweite den Ausdruck der Zeit in x, y ..... Vorstehendes soll eigentlich eine captatio benevolentiae, eine Einladungsschrift oder dergl. sein, nämlich die Anfrage einleiten, ob Sie vielleicht die Gewissensbisse meiner Frau, daß sie Ihnen auf einige Stunden Ihren schönen Besuch entzieht, durch die Großthat lindern wollen, Ihren Thee heute unter den Damen zu nehmen. Wie oft hat dies Humboldt in dreien Welttheilen gethan, thuen Sie es einmal in einem.“

Unmittelbar darauf richtet er ein Schreiben an die Akademie der Wissenschaften zu Berlin, von dem ein Auszug unter dem Titel „Über ein neues Integral für den Fall der drei Körper, wenn die Bahn des störenden Planeten kreisförmig angenommen und die Masse des gestörten vernachlässigt wird“, im Juli 1836 in deren Monatsberichten erschien, und sendet zugleich an die Pariser Akademie eine Zuschrift „Sur le mouvement d'un point et sur un

cas particulier du problème des trois corps", die mit den Worten beginnt: „Parmi les vérités nouvelles dont les mathématiques se sont enrichies de temps en temps, il y en a auxquelles on n'a pu parvenir qu'en surmontant de grandes difficultés, et dont la découverte paraît être réservée aux esprits supérieurs, qui président au développement de la science. Il y en a d'autres dont la découverte n'a pas le mérite des difficultés vaincues, mais qui étant à la portée de tout le monde dès qu'elles ont été une fois trouvées, se sont soustraites pendant long-temps aux soins des savants, je ne sais par quel accident, peut-être même à cause de leur facilité." In diesen Mitteilungen wird zunächst der Bessel bereits brieflich übermittelte Satz kurz angeführt, dann aber noch die Bemerkung hinzugefügt, daß für die Bewegung eines Punktes mit zu vernachlässigender Masse, der sich um die Sonne bewegt und durch einen Planeten gestört wird, dessen Bahn ein Kreis ist, vorausgesetzt daß die Planetenbahn die xy Ebene, die Sonne Koordinatenanfang, a_1 die Distanz des störenden Planeten von der Sonne, n' seine Anomalie, m' seine Masse, M die Masse der Sonne ist, die streng richtige Gleichung gilt

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}-n'\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+m'\left\{\frac{1}{[x^2+y^2+z^2-2a_1(x\cos n't+y\sin n't)+a_1{}^2]^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left.-\frac{x\cos n't+y\sin n't}{a_1{}^2}\right\}+\text{const.}$$

„C'est donc une nouvelle équation intégrale, qui dans le problème des trois corps subsistera entre les termes indépendants de l'excentricité de la planète troublante, et qui est rigoureuse pour toutes les puissances de la masse de cette dernière."

Auch seine im Sommer 1836 gehaltene Vorlesung über die allgemeine Theorie der Oberflächen, die ihm wieder zu mannigfachen geometrischen Arbeiten Veranlassung gab, und

von der wir eine Ausarbeitung von Rosenhain besitzen, legt diesmal besonderes Gewicht auf diejenigen Teile dieser Theorie, welche mit der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen im engsten Zusammenhange stehen. Er schickt seiner Gewohnheit gemäß der Vorlesung zunächst wieder eine längere Einleitung historischen Inhalts voraus, in der er die Arbeiten von Monge, Dupin und Gauss kurz charakterisiert, um dann sogleich mit Zugrundelegung der Lagrangeschen Anschauungen die Theorie der Berührung beliebiger Ordnung der Kurven untereinander sowie mit Oberflächen und der Oberflächen untereinander zu entwickeln. Bei der Erläuterung des Begriffs der Grenze hebt er hervor, daß derselbe „eine der tiefsten Konzeptionen der Griechen“ sei; „wir finden ihn vollständig ausgearbeitet in Archimedes' Schriften, der den Inhalt der Kugeloberfläche und die Quadratur der Parabel gefunden hat und daher die ersten Anwendungen der Integralrechnung macht. Es ist der Sache gemäß, daß diese früher als die Differentialrechnung angewendet wurde, denn der Begriff eines bestimmten Integrales ist elementarer als der eines Differentials . . . . .“ Auf die Lagrangeschen Anschauungen vom Grenzbegriff stützt er die Entwicklung von der Rektifikation der Kurven doppelter Krümmung und der Quadratur der Oberflächen und geht bei dieser Gelegenheit auf seine Theorie der Transformation der Doppelintegrale näher ein; er behandelt als Beispiel ausführlich die Oberflächenbestimmung des Ellipsoids nach Legendres und der von ihm selbst so bedeutend vereinfachten Methode mit genauer Diskussion der hier in Anwendung kommenden elliptischen Integrale, verläßt aber nun die allgemeinen Betrachtungen, welche die Methode der Grenzen zur Basis hatten, und geht zu denjenigen Untersuchungen über, welche die geometrische Anschauung zu Hilfe nehmen, „denn die Geometrie hat auch für den Analysten den Vorteil, daß sie die vollkommenste Symbolik darbietet“. Von den Tangenten

und Normalen der Kurven, den Tangential- und Normalebenen der Flächen gelangt er zur Behandlung der Eigenschaften des Kegels, Zylinders und der Umdrehungsoberflächen, entwickelt deren partielle Differentialgleichungen und erläutert die Mongesche Charakteristikentheorie. Er erörtert sodann eingehend die Integrationsmethode von Lagrange für die linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung und dessen Methode zur Integration aller partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln und leitet so die Vorlesung in eine solche über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen überhaupt über. „Die Ausdehnung auf jede Zahl von Variabeln hat zuerst Pfaff gefunden in einer meisterhaften Abhandlung ... Indes ließ die Abhandlung von Pfaff noch viel zu wünschen übrig. Nun hat der Professor Hamilton, der Direktor der Dubliner Sternwarte, in einer überaus merkwürdigen Abhandlung die Integration der Differentialgleichungen der Dynamik zurückgeführt auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung. Dieses erscheint gewissermaßen als keine Erleichterung, da die Integration derselben schwieriger ist. Wenn man aber seine Analysis genau betrachtet und verallgemeinert, so findet man darin umgekehrt alles, was sich noch für die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen n Variabeln wünschen ließ.“ Nunmehr entwickelt er seine später veröffentlichten Integrationsmethoden im Zusammenhange mit der Lagrangeschen und Pfaffschen sowie die Übertragung der Methode von Hamilton von den dynamischen Gleichungen auf alle partiellen Differentialgleichungen. Nachdem er dann zur Untersuchung der Eigenschaften der Kurven doppelter Krümmung zurückgekehrt und auch hier wieder den Satz bewiesen, daß nur für eine ebene Kurve die Linie ihrer Krümmungsmittelpunkte von den Krümmungshalbmessern berührt wird, also ihre Evolute ist, wendet er sich zur curvatura integra von

Gauss und zu dessen merkwürdigem Satze von der curvatura integra eines von drei geodätischen Linien gebildeten Dreiecks; er trägt ausführlich den Beweis dieses Satzes sowie der von ihm gefundenen Verallgemeinerung vor, die er zu gleicher Zeit zum Gegenstande einer gleich nachher zu erwähnenden Arbeit für das Crellesche Journal macht, und entwickelt in der Vorlesung weiter eine ausführliche Theorie der kürzesten Linien. Es folgt die Behandlung der einzelnen Flächenfamilien; er unterwirft vor allem die abwickelbaren Flächen einer genaueren Diskussion, untersucht die unendlich vielen Evoluten einer Kurve doppelter Krümmung und schließt endlich mit einer Theorie der Krümmungslinien einer Fläche, in der er auf die Sätze von Monge sowie auf die Beweise der früher von ihm im Crelleschen Journal nur in ihren Resultaten mitgeteilten Theoreme für die Krümmungslinien der Oberflächen 2. Ordnung näher eingeht.

Die obenerwähnte Arbeit, zu welcher er durch seine Vorlesung veranlaßt wurde, und welche das Datum vom 27. Juli 1836 trägt, ist betitelt „Demonstratio et amplificatio nova theorematis Gaussiani de curvatura integra trianguli in data superficie e lineis brevissimis formati.“ Indem Jacobi jede Kurve im Raume als kürzeste Linie irgend einer Fläche ansieht, spricht er zunächst den Gaussschen Satz in der Form aus, daß, wenn ein Dreieck im Raume von drei beliebigen Kurven gebildet wird, welche zu je zweien in dem Winkel, in welchem sie zusammenstoßen, dieselbe Richtung des Krümmungsradius haben, und man in der Einheitskugel parallele Radien zu den Krümmungsradien dieser Kurven zieht, dann der Inhalt des Dreiecks auf der Kugel gleich dem Exzeß der drei Winkel über zwei Rechte ist. Als neues, auf eben dieser Anschauung fußendes Theorem und zugleich als Quelle des Gaussschen bezeichnet er den Satz, daß, wenn man vom Mittelpunkt der Einheitskugel parallele Radien zieht, welche senkrecht stehen auf den

Krümmungsebenen einer Kurve $\alpha\beta$, die Länge ab der auf der Kugel verzeichneten Kurve gleich sein wird der Differenz der Winkel, welche an den Endpunkten der vorgelegten Kurve $\alpha\beta$ die Ebene der Krümmungsradien mit der Krümmungsebene bildet, wobei er unter der Ebene der Krümmungsradien einer Kurve die Ebene versteht, welche zwei unendlich nahe aufeinander folgenden Krümmungsradien parallel ist. Einige Jahre später knüpften sich, wie wir sehen werden, lange und bisweilen unerquickliche Diskussionen an diesen Satz.

Schon am folgenden Tage, am 28. Juli, berichtigt er in der „Nota de erroribus quibusdam geometricis, qui in theoria functionum leguntur“ einen von Lagrange begangenen Irrtum geometrischer Natur, auf den er ebenfalls im Laufe seiner Vorlesung geführt worden, indem er zeigt, daß auf einer gegebenen Fläche eine Krümmungslinie nicht zugleich kürzeste Linie sein kann, wenn sie nicht eine ebene Kurve ist.

In den Herbstferien ging er nun ernstlich an die ausführliche Bearbeitung seiner in den letzten Jahren angestellten so umfangreichen Untersuchungen über Variationsrechnung, Mechanik und die Theorie der Differentialgleichungen, und schreibt darüber am 17. September 1836 seinem Bruder Moritz, der bis zum Jahre 1835 als Baumeister in Königsberg gelebt, dann als Professor der Zivilbaukunst nach Dorpat berufen war: „. . . Um Dir zunächst von meinem und dann Deiner Freunde Ergehen zu berichten, so hatte ich, wie Du weißt, eine Anzeige von zwei Abhandlungen Hamiltons für das Dove-Moser'sche Repertorium übernommen. Dieses führte mich sehr tief in das Studium der wichtigsten mechanischen Theorieen, wodurch ein ungeheures Manuscript anschwoll, an dessen Beendigung ich aber durch anhaltendes Kopfweh verhindert wurde . . . Ich gerieth auf einige sehr abstrakte Ideen über die Behandlung der Differentialgleichungen, welche in den Problemen der Mechanik

vorkommen, indem diese Differentialgleichungen durch ihre besondere Form Erleichterungen für die Integration zulassen, welche man noch nicht bemerkt hatte. Diese Betrachtungen werden desto wichtiger, wie ich glaube, werden, weil sie sich zugleich auf die Differentialgleichungen ausdehnen, welche bei den isoperimetrischen Problemen und der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vorkommen."

Für den Winter hatte Jacobi, um Zeit für die Ausarbeitung dieser Untersuchungen zu gewinnen, nur eine Vorlesung, und zwar über Zahlentheorie angekündigt; die Übungen des mathematisch-physikalischen Seminars, in denen er das Problem der konformen Abbildung des Ellipsoids zu behandeln anfing, wurden von ihm und Neumann noch im Laufe des Semesters suspendiert, weil dasselbe „allein von allen Seminarien", wie die Direktoren der Behörde berichteten, „aller Fonds entbehrte", und dadurch eine gedeihliche Tätigkeit in demselben bedeutend erschwert war. Von der zahlentheoretischen Vorlesung besitzen wir eine eingehende und gewissenhafte, wenn auch bisweilen nicht ganz klare Nachschrift von Rosenhain, der noch im Laufe des Winters ebenso wie Hesse durch eine Seminarprämie ausgezeichnet wurde. Wieder leitet Jacobi auch diese Vorlesung mit einer ausführlichen, bis in die Zeit der Griechen zurückreichenden, sehr interessanten historischen Betrachtung ein, und, zur Entwicklung der modernen Zahlentheorie gelangend, hebt er hervor: „Wir müssen, um Fermats Sätze zu beweisen, Hilfsmittel anwenden, welche er nicht kannte, und es ist daher anzunehmen, daß er sehr einfache Methoden gehabt hat, welche wir noch nicht haben wieder auffinden können, wie es überhaupt in dieser Theorie nichts Ungewöhnliches ist, daß man einen Beweis, der mehrere Seiten umfaßt, nachdem man ihn gefunden, auf ebenso viele Zeilen abkürzen kann." Er schließt sich zunächst dem Gange der ersten Sectionen der Disquisitiones arith-

meticae von Gauss an und geht dann zur Untersuchung der höheren Kongruenzen über; „die meisten dieser zahlentheoretischen Betrachtungen lassen sich auch auf algebraische Untersuchungen ausdehnen, wenn man statt der ganzen Zahlen ganze rationale Funktionen einer Variabeln setzt ... Eine der wichtigsten Untersuchungen dieser Art hat Abel über die Verwandlung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch mitgeteilt; er gibt dort eine sichere und bestimmte Regel, durch die man erkennt, wenn $\int \frac{A\,dx}{\sqrt{X}}$, wo A und X ganze rationale Funktionen von x sind, sich endlich finden läßt, und diese Regel gründet sich ganz auf die Entwicklung von $\sqrt{X}$ in einen Kettenbruch. Diese Entwicklung gibt auch über die Transzendenten die interessantesten Aufschlüsse; so habe ich für die elliptischen Transzendenten gezeigt, daß sich der Kettenbruch aufs einfachste durch die Multiplikation der elliptischen Funktionen darstellen läßt. Ich will daher die Methoden der Algebra und Arithmetik soviel als möglich einander zu nähern suchen.“ Bei Gelegenheit des Beweises des Wilsonschen Satzes hebt er hervor, daß, wenn p eine Primzahl von der Form $4n-1$ ist, man immer eine feste Zahl t angeben kann, nämlich $t = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2}$, welche durch p dividiert den Rest $+1$ oder -1 läßt. „Es ist nun hier die Aufgabe, anzugeben, wann t den Rest $+1$ und wann es den Rest -1 läßt. Diese Aufgabe gehört zu den schwierigsten der höheren Arithmetik; sie wurde im Crelleschen Journal mehr zum Scherz, um zu zeigen, daß man unauflösliche Aufgaben geben könne, als im Ernst zur Auflösung vorgelegt; dennoch gelang es mir, eine ziemlich einfache Regel dafür aufzufinden, und ich habe sie in einer Abhandlung, Observatio arithmetica etc., jedoch ohne Beweis mitgeteilt.“ Er schließt nunmehr an den Wilsonschen Satz die Bemerkung: „Für jede Primzahl $4n+1 = p$ läßt $\left(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2}\right)^2$ den Rest -1, daher ist für den

Modul $4n+1$ $\pm\sqrt{-1}$ eine reelle Zahl, nämlich $\equiv 1\cdot 2\cdot 3 \ldots \frac{p-1}{2}$ oder dem Rest, den diese Zahl durch p dividiert läßt. Später werden wir sehen, daß, wenn p die Form $4n+3$ hat, es keine Zahl gibt, deren Quadrat durch p dividiert den Rest -1 läßt. In bezug auf einen solchen Modul ist also $\sqrt{-1}$ auch imaginär; allein es gilt hier nicht das, was in der Analysis von solcher Wichtigkeit ist. In der Analysis lassen sich alle Gleichungen, welche etwas Unmögliches enthalten, auf die Gleichung $x^2+1=0$ zurückführen. In der Zahlentheorie dagegen gibt es keine solche einzige imaginäre Form, sondern es gibt deren unendlich viele. Gauss hat einen Anfang gemacht, diese imaginären Formen in die Zahlentheorie einzuführen, in seiner letzten Abhandlung über die biquadratischen Reste, indem er Moduln von der Form $a+b\sqrt{-1}$ einführt. Dies ist aber nur eine spezielle Form der allgemeinen Formen, die man in die Zahlentheorie einführen muß, diese ist nämlich $a+a_1r+a_2r^2+\cdots+a_{n-1}r^{n-1}$, wenn r eine n^{te} Wurzel der Einheit ist.“ Nach einigen allgemeinen Untersuchungen über Potenzreste und historischen Bemerkungen über die Theorie der quadratischen Reste geht Jacobi zur Theorie der Kreisteilung über und entwickelt zunächst die von Gauss aufgestellten Theoreme. „Zu den Methoden, welche ich Ihnen hier mitteilen will, hat Gauss in seinen Disquisitiones arithmeticae nur die ersten Grundzüge gegeben, und auch in seinen späteren Untersuchungen nicht gesagt, daß er sie vervollkommnet habe. Gleichwohl ist seine Methode der Vervollkommnung im höchsten Grade fähig, und man wird durch sie auf neue Wege geführt, die Zahlentheorie zu erweitern. Auch bieten die neuesten Werke von Gauss Resultate, zu denen man auf diesem Wege gelangen kann; und da Gauss seine Resultate und Beweise gewöhnlich ohne sichtbaren inneren Zusammenhang, ganz starr und gefroren, als Rätsel aufstellt, so daß man sie erst auftauen muß, so sind wir bei

dem Gange, den Gauss bisher genommen hat, genötigt zu glauben, daß er diese Methoden gekannt, sie aber zu verschweigen für gut befunden hat, denn sie führen zu denselben Resultaten, die Gauss in seinen neueren Werken bekannt gemacht hat." Und nun entwickelt er die Fundamentaltheoreme der Kreisteilung, in der Form, wie er sie schon früher Gauss zum Teil schriftlich mitgeteilt hatte und im Oktober des nächsten Jahres als Frucht eben dieser Vorlesung veröffentlichte, stützt auf diese Sätze die Theorie der quadratischen Reste, und gibt vom Reziprozitätsgesetze derselben eine Reihe der verschiedenartigsten Beweise. Indem er nun zur Theorie der biquadratischen Reste übergeht, entwickelt er zunächst die Lehre von den ganzen komplexen Zahlen, beweist den Gaussschen, von Dirichlet bewiesenen Satz von der Gleichzeitigkeit des quadratischen Rest- und Nichtrestseins zweier komplexer Primzahlen, und auf Grund von zwei speziellen Hilfssätzen das von Gauss aufgestellte, aber ohne Beweis mitgeteilte Reziprozitätsgesetz für biquadratische Reste; hieran schließt er eine ausführliche Theorie der kubischen Reste, wie er sie in seinen Briefen an Gauss bereits angedeutet, und entwickelt in einfacher Weise deren Reziprozitätsgesetz. Die letzten Vorlesungen liefern endlich noch einige Anwendungen der Kreisteilung auf Eigenschaften der quadratischen Reste, die zum Teil aus der Theorie der quadratischen Formen bekannt waren, teils aber auch vollständig neu und äußerst interessant sind, aber von Jacobi nie im einzelnen veröffentlicht wurden.

„Die im Jahre 1832 erschienenen zwei Abhandlungen von Gauss über die biquadratischen Reste", sagt Dirichlet, „die durch die tiefsinnigen Gedanken, komplexe ganze Zahlen in der höheren Arithmetik geradeso wie reelle zu behandeln, und durch das darin aufgestellte Reziprozitätsgesetz Epoche machten, welches in der Theorie der biquadratischen Reste zwischen zwei komplexen Primzahlen stattfindet, gab Jacobi Veranlassung, seine früheren Untersuchungen wieder aufzu-

nehmen, und es gelang ihm, den erwähnten schönen Satz von Gauss und einen ähnlichen, welcher sich auf die kubischen Reste bezieht, mit großer Einfachheit aus der Kreisteilung abzuleiten. Obgleich Jacobi die eben angeführten Untersuchungen und andere damit zusammenhängende, die ich nicht einmal andeutungsweise bezeichnen kann, in den Jahren 1836—39 vollständig niedergeschrieben kat, so ist er doch nie dazu gekommen, sie durch den Druck zu veröffentlichen. Seine Zögerung entsprang aus dem Wunsche, einigen seiner Resultate eine größere Ausdehnung zu geben, wozu er, von so vielen anderen Arbeiten in Anspruch genommen, die nötige Muße nicht gefunden hat. Ein Teil seiner Forschungen und namentlich die schon erwähnten Beweise der Reziprozitätsgesetze sind jedoch einigen deutschen Mathematikern durch Nachschrift der Vorlesungen bekannt geworden, welche er im Winter 1836—37 in Königsberg über die Kreisteilung und deren Anwendung auf die Theorie der Zahlen gehalten hat.“

Noch vor Ende des Jahres suchte sich Jacobi endlich auf Bessels Drängen, der seit fast zwei Jahren von all den umfassenden Forschungen seines Freundes, von denen die wissenschaftliche Welt noch fast gar nichts erfahren hatte, Kenntnis genommen, durch kurze Mitteilungen die Priorität seiner Resultate zu wahren, und richtete am 29. November 1836 an Encke, den Sekretär der Berliner Akademie, ein auf seine Entdeckungen bezügliches Schreiben, welches im Crelleschen Journal unter dem Titel „Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen“ veröffentlicht wurde, und dessen Resultate er auch kurz der Pariser Akademie mitteilte.

„Es ist mir gelungen, eine große und wesentliche Lücke in der Variationsrechnung auszufüllen. Bei den Problemen des Größten und Kleinsten nämlich, welche von der Variationsrechnung abhängen, kannte man keine allgemeine Regel, woran zu erkennen wäre, ob eine Lösung wirklich ein Größtes oder Kleinstes gibt oder keins von

beiden. Man hatte zwar erkannt, daß die Kriterien hierfür davon abhängen, ob gewisse Systeme von Differentialgleichungen Integrale haben, die während des ganzen Intervalls, über das das Integral, welches ein Maximum oder Minimum werden soll, erstreckt wird, endlich bleiben. Aber man konnte diese Integrale selbst nicht finden, und auf keine Weise sonst, ohne sie zu kennen, den Umstand, ob sie innerhalb der gegebenen Grenzen endlich bleiben oder nicht, erörtern. Ich habe aber bemerkt, daß diese Integrale immer von selber gegeben sind, wenn man die Differentialgleichungen des Problems integriert hat, d. h. die Differentialgleichungen, die erfüllt werden müssen, damit die erste Variation verschwindet. Hat man durch Integration dieser Differentialgleichungen die Ausdrücke der gesuchten Funktionen erhalten, welche eine Anzahl willkürlicher Konstanten enthalten werden, so geben ihre nach diesen willkürlichen Konstanten genommenen partiellen Differentialquotienten die Integrale der neuen Differentialgleichungen, welche man zur Bestimmung der Kriterien des Größten und Kleinsten zu integrieren hat.“ Jacobi entwickelt zunächst das Resultat seiner Untersuchung für das Integral $\int f(x, y, y')dx$, für welches die Hauptgleichung der Variation $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$ lautet, und die zweite Variation, wenn $\delta y = w$ gesetzt wird, durch $\int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} w^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} w w' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} w'^2\right) dx$ gegeben ist; zur Existenz eines Maximums und Minimums des Integrales ist erforderlich, daß $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ immer dasselbe Zeichen behält, aber um die vollständigen Kriterien des Maximums und Minimums zu haben, muß man noch den vollständigen Ausdruck einer Funktion v kennen, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + v\right)^2$$

Genüge leistet, und diesen vollständigen Ausdruck findet Jacobi, indem er $u = \alpha\frac{\partial y}{\partial a} + \beta\frac{\partial y}{\partial b}$ setzt, worin a, b die Inte-

grationskonstanten der Hauptgleichung und α, β willkürliche Konstanten sind, und den Ausdruck

$$v = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \frac{1}{u}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{du}{dx}\right)$$

bildet, welcher nur die willkürliche Konstante $\frac{\beta}{\alpha}$ enthält. Um nun die Untersuchung allgemein anzugreifen, leitet er zunächst eine merkwürdige Eigenschaft einer besonderen Klasse linearer Differentialgleichungen $2n$. Ordnung her, welche die Form haben

$$0 = Ay + \frac{d(A_1 y')}{dx} + \frac{d^2(A_2 y'')}{dx^2} + \cdots + \frac{d^n(A_n y^{(n)})}{dx^n} = Y,$$

worin $A, A_1, \ldots$ gegebene Funktionen von x sind; ist nämlich y irgendein Integral von $Y = 0$, so wird, wenn man $u = ty$ setzt, der Ausdruck

$$y\left[Au + \frac{d(A_1 u')}{dx} + \cdots + \frac{d^n(A_n u^{(n)})}{dx^n}\right] = yU$$

integrabel, und man kann sein Integral angeben, ohne t zu kennen; dieses Integral hat wieder die Form von Y, wobei nur n um eine Einheit kleiner geworden, indem

$$\int yU dx = Bt' + \frac{d(B_1 t'')}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}(B_{n-1} t^{(n)})}{dx^{n-1}}$$

ist, worin sich die Zusammensetzung der Funktionen B aus u und den Funktionen A allgemein angeben läßt. „Die Metaphysik der gefundenen Resultate, um mich eines französischen Ausdruckes zu bedienen, beruht ungefähr auf folgenden Betrachtungen. Man kann bekanntlich der ersten Variation die Form $\int V \delta y dx$ geben, wo $V = 0$ die zu integrierende Gleichung ist. Die zweite Variation erhält hiernach die Form $\int \delta V \delta y dx$. Soll die zweite Variation das Zeichen nicht ändern, so muß dieselbe nicht verschwinden können, oder die Gleichung $\delta V = 0$, welche in δy linear ist, darf kein Integral δy haben, welches die Bedingungen, denen nach der Natur des Problems δy unterworfen ist, erfüllt. Man sieht hieraus, daß die Gleichung $\delta V = 0$ bei dieser Untersuchung eine bedeutende Rolle spielt und gewahrt in der

Tat bald ihren Zusammenhang mit den für die Kriterien des Maximums und Minimums zu integrierenden Differentialgleichungen. Außerdem sieht man sogleich, daß ein Wert von δy, welcher die Differentialgleichung $\delta V = 0$ erfüllt, jeder partielle Differentialquotient von y ist, nach einer der willkürlichen Konstanten genommen, die y als Integral der Gleichung $V = 0$ enthält. Man erhält daher den allgemeinen Ausdruck des Integrales δy der Differentialgleichung $\delta V = 0$, wenn man aus allen diesen partiellen Differentialquotienten von y einen linearen Ausdruck bildet. Die Gleichung $\delta V = 0$, deren sämtliche Integrale man auf diese Weise kennt, läßt sich aber, wie man zeigen kann, auf die Form der obigen Gleichung $Y = 0$ bringen, wenn man in dieser δy für y schreibt, und vermittels der angegebenen Eigenschaften dieser Art von Gleichungen gelingt es, die zweite Variation $\int \delta V \delta y dx$ durch fortgesetzte partielle Integration in einen anderen Ausdruck zu transformieren, der unter dem Integralzeichen ein vollständiges Quadrat enthält, welches eben die Transformation der zweiten Variation ist, die man hierbei zu erreichen strebt.“ Jacobi führt nun als Beispiel den Fall durch, in welchem V die 1. und 2. Ableitung einschließt, und kommt zugleich in einer Anwendung — wie später allgemein in seinen Vorlesungen über Mechanik — für das Prinzip der kleinsten Wirkung bei der elliptischen Bewegung eines Planeten auf die sogenannten Grenzwerte zu sprechen, welche weder ein Maximum noch ein Minimum geben: „... für die Flächen, die in jedem Punkte zwei entgegengesetzte Krümmungen haben, habe ich bewiesen, daß zwischen je zweien ihrer Punkte die kürzeste Linie wirklich eine kürzeste Linie ist.“ Während er diesen Untersuchungen ein großes Interesse deshalb zuspricht, weil sie in einem der schönsten Teile der Mathematik eine wesentliche Lücke ausfüllen, glaubt er doch, daß die folgenden Entdeckungen auf dem Gebiete der Mechanik tiefer in das Ganze der Wissenschaft eingreifen. Auf Hamiltons Prinzipien fußend konnte Jacobi

die Lösung der Probleme der Mechanik auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung zurückführen, und es gelang ihm weiter, diese Untersuchungen auch auf den Fall auszudehnen, daß die Kräftefunktion die Zeit enthält, das Prinzip der lebendigen Kraft also nicht mehr gültig ist, während das Prinzip der kleinsten Wirkung immer noch bestehen bleibt. Eine Erweiterung dieser Resultate führt nun Jacobi bei der Untersuchung der Umkehrung der gestellten Frage zu der für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung bedeutungsvollen Entdeckung, daß deren Integration stets auf die Integration eines einzigen gewöhnlichen Differentialgleichungsystems zurückgeführt werden kann, aber es kam wesentlich darauf an, nachzuweisen, daß diese Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen einer besonderen Behandlungsweise fähig sind. Die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung der Mechanik enthalten nun nie die unbekannte Funktion selber, und daraus folgert Jacobi schon auf Grund der von Lagrange für eine partielle Differentialgleichung mit nur drei Variablen gegebenen Integrationsmethode, daß, wenn irgendein Problem der Mechanik, für welches der Satz von der lebendigen Kraft gilt, von einer Differentialgleichung der 2. Ordnung abhängt, und man außer diesem Satze noch ein Integral kennt, so daß das Problem auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen zwei Variabeln reduziert ist, man diese letztere immer integrieren, d. h. nach einer bestimmten Regel den Multiplikator derselben finden kann, wie z. B. bei der Anziehung eines Punktes nach zwei festen Zentren. „Ich habe vor etwa einem halben Jahre die auf den Fall der freien Bewegung eines Punktes in einer Ebene bezüglichen Formeln, welche allgemein, wenn man außer dem Integral der lebendigen Kraft noch ein anderes Integral kennt, das Problem auf Quadraturen zurückführen, der Pariser Akademie mitgeteilt. Diese Formeln lassen sich sogleich auch auf die Bewegung eines Punktes auf einer ge-

gebenen Fläche ausdehnen ... Es ist mir ferner gelungen, die Schwierigkeiten, welche der Verallgemeinerung der Lagrangeschen Methode für die Integration partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen drei Variabeln im Wege standen, zu heben und hierdurch eine neue Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung für jede Zahl von Variabeln zu begründen, welche für die Integration derselben die wesentlichsten Vorteile darbietet und unmittelbar auf die Probleme der Mechanik ihre Anwendung findet ... Die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung und die isoperimetrischen Probleme, in welchen die Differentialquotienten der unbekannten Funktionen unter dem Integralzeichen nur bis auf die 1. Ordnung steigen, hängen von derselben Analysis ab, so daß jedes solches isoperimetrische Problem auch als Integration einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung gefaßt werden kann. Man kann unter diesen isoperimetrischen Problemen auch diejenigen begreifen, in welchen der Ausdruck, der ein Maximum oder Minimum werden, oder allgemeiner, dessen Variation verschwinden soll, nicht unmittelbar als Integral, sondern durch eine Differentialgleichung 1. Ordnung gegeben ist. Umgekehrt kann man auch die Integration einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung als solches isoperimetrische Problem ansehen." Jacobi faßt nun seine Auseinandersetzungen darin zusammen, daß, wenn das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen der Mechanik, von denen das Problem abhängt, nach Elimination der übrigen Variabeln auf eine gewöhnliche Differentialgleichung $2n$. Ordnung zwischen zwei Variabeln geführt, und man ein Integral desselben kennt, sich das Problem durch eine bestimmte Wahl von Größen, die man als Variable einführt, im Sinne der hiernach gegebenen Definition der Ordnung auf ein Differentialgleichungssystem der $2n-2$. Ordnung zurückführen läßt, dann durch Kenntnis eines neuen Integrals auf eines der $2n-4$. Ordnung usw., bis man keine Differentialgleichung mehr zu integrieren hat; alle außerdem noch aus-

zuführenden Operationen bestehen lediglich in Quadraturen. „Sie sehen, hochgeehrtester Professor, daß die in vorstehenden kurzen Umrissen angedeuteten Resultate ein neues wichtiges Kapitel der analytischen Mechanik begründen, die Vortheile betreffend, welche man aus der besonderen Form der Differentialgleichungen der Mechanik für ihre Integration ziehen kann. Wir verdanken Lagrange diese Form, aber sie hat bis jetzt in seinen und den Händen der ihm nachfolgenden Analysten nur dazu gedient, die analytischen Transformationen rascher und übersichtlicher zu leisten, und den bekannten allgemeinen mechanischen Gesetzen die Ausdehnung zu geben, deren sie fähig sind. Aber diese Form erhält jetzt eine viel wichtigere Bedeutung, indem sie zeigt, daß gerade die Differentialgleichungen von dieser bestimmten Form einer eigenthümlichen Behandlung fähig sind, welche die Schwierigkeiten ihrer Integration bedeutend vermindert.“

Die ausführlichere Behandlung der zuletzt berührten Punkte legte er damals in einer Aufzeichnung nieder, die später von Clebsch unter dem Titel „Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen vier Variabeln“ veröffentlicht wurde. Jacobi schickt dieser zunächst eine historische Einleitung voraus und setzt sodann den eigentlichen Sinn der Lagrangeschen Methode für die Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln $F(x, y, p, q) = 0$, in welcher die abhängige Variable V selbst nicht vorkommt, klar auseinander; er zeigt, daß, wenn man ein Integral der Differentialgleichungen:

$$dx : dy : dp = \frac{\partial q}{\partial p} : -1 : -\frac{\partial q}{\partial x}$$

mit $f(x, y, p) = a$ bezeichnet, so daß nunmehr p und q Funktionen von x, y, a sind, $pdx + qdy$ integrabel wird, und findet nach der von ihm modifizierten Hamiltonschen Methode das letzte Integral dieser Differentialgleichungen,

wenn $V = \int(p\,dx + q\,dy)$ ist, in der Form

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int\left(\frac{\partial p}{\partial a}dx + \frac{\partial q}{\partial a}dy\right) = b;$$

diese Methode wird auf die mechanischen Probleme angewandt, welche nur von zwei freien Koordinaten abhängen, und für welche das Prinzip der lebendigen Kraft gilt. Jacobi erweitert nun das von Lagrange für die Integration einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mit drei Variabeln angegebene Verfahren auf alle partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung, behandelt aber zur klareren Einsicht in das Wesen seiner Methode hier nur den Fall einer solchen Gleichung zwischen vier Variabeln, in welcher die abhängige Variable selbst nicht vorkommt, um zu dem in dem Briefe an Encke bezeichneten allgemeinen Resultate zu gelangen. Soll $dV = p\,dx + q\,dy + r\,dz$, und r eine gegebene Funktion von x, y, z, p, q sein, welche V nicht enthält, so müssen p und q so als Funktionen von x, y, z und zwei willkürlichen Konstanten bestimmt werden, daß der Ausdruck $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ integrabel, also wenn $\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} = A$, $\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} = B$, $\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = C$ gesetzt werden, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ wird, zu denen noch die identische Gleichung $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$ hinzukommt. Aus der gegebenen Funktion r von x, y, z, p, q findet Jacobi die lineare partielle Differentialgleichung $-\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{\partial r}{\partial y}$ zwischen q und den unabhängigen Variabeln x, y, z, p, und wird somit auf das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$dx : dy : dz : dp : dq = -\frac{\partial r}{\partial p} : -\frac{\partial r}{\partial q} : 1 : \frac{\partial r}{\partial x} : \frac{\partial r}{\partial y}$$

geführt. Ist nun ein Integral derselben $f(x, y, z, p, q) = a$, so ist der aus dieser Gleichung hergeleitete Wert von q die verlangte Funktion von x, y, z, p und einer willkürlichen Konstanten, welche der linearen partiellen Differentialgleichung genügt. Betrachtet man weiter r und q als Funk-

tionen von x, y, z, p, so nehmen die Gleichungen $C=0$, $B=0$, $A=0$ die Form an $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}$, woraus $A+B\frac{\partial q}{\partial p}+C\frac{dr}{\partial p}=0$ folgt; Jacobi zeigt nun, daß, wenn man für $f=a$ ein ganz beliebiges Integral des totalen Differentialgleichungssystems nimmt, es immer möglich ist, die Funktion p als Funktion von x, y, z so zu bestimmen, daß den beiden Gleichungen $B=0$, $C=0$ Genüge geschieht, welche wiederum $A=0$ nach sich ziehen. Bestimmt man aus der gegebenen partiellen Differentialgleichung und $f=a$ die Größen r und q als Funktionen von x, y, z, p, so daß $B=0$, $C=0$ in $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$ übergehen, so handelt es sich um die Aufsuchung eines zwei partiellen Differentialgleichungen gemeinsamen Integrales, welche sich lediglich auf das Theorem stützt, daß, wenn q und r Funktionen von x, y, z, p sind, welche der Gleichung $\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial q}{\partial x}=0$ genügen, und wenn φ ein Integral der Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial p}=0$ ist, $\varphi_1=\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial p}$ ebenfalls ein Integral dieser Gleichung oder $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}=0$ ist. Jacobi findet hiernach, daß das totale Differentialgleichungssystem von vier Gleichungen zwischen fünf Größen, welches äquivalent ist einer Differentialgleichung 4. Ordnung zwischen zwei Größen, und welches sonst die sukzessive Integration einer Differentialgleichung 4., 3., 2. und 1. Ordnung erfordern würde, nach den eben angegebenen Prinzipien, nachdem ein Integral der vier Differentialgleichungen 1. Ordnung ermittelt ist, nur noch die Integration von Differentialgleichungen der 2. Ordnung zwischen zwei Variabeln und keine der 3. Ordnung erfordert; es wird sich also die Differentialgleichung 3. Ordnung, auf welche nach gefundenem ersten Integral das

Problem zurückkommt, immer auf Differentialgleichungen 2. Ordnung zurückführen lassen. Schließlich wird noch die vollständige Integration des bei der Aufsuchung der gemeinsamen Lösung der beiden partiellen Differentialgleichungen benutzten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen behandelt und dessen Multiplikator bestimmt.

Auch die von Clebsch später herausgegebene Aufzeichnung Jacobis „De aequationum differentialium isoperimetricarum transformationibus earumque reductione ad aequationem differentialem partialem primi ordinis non linearem" stammt aus einer nur wenig späteren Zeit. Aus $\delta\int U(t, x, x', \ldots x^{(m)})dt = 0$ folgt $0 = \frac{\partial^m U_m}{\partial t^m} - \frac{d^{m-1} U_{m-1}}{d t^{m-1}} + \cdots \pm U_0$, wenn $U_0 = \frac{\partial U}{\partial x}$, $U_i = \frac{\partial U}{\partial x^{(i)}}$ ist, und wenn man mit Hilfe der Gleichung $\xi = U_m = \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}$ aus $V = U - x^{(m)}\xi$ die Größe $x^{(m)}$ eliminiert, so wird die Differentialgleichung $2m$. Ordnung auf ein Normalsystem von zwei Differentialgleichungen m. Ordnung zurückgeführt $\frac{d^m x}{d t^m} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}$, $\frac{d^m \xi}{d t^m} = \Xi$, worin die rechten Seiten nur bis $x^{(m-1)}$ und $\xi^{(m-1)}$ reichen; es ergab sich zugleich leicht aus seinen damals schon abgeschlossenen, aber erst später veröffentlichten Untersuchungen, daß der Multiplikator dieses Systems die Einheit ist, und dasselbe findet statt, wenn U noch andere abhängige Variable mit ihren Ableitungen enthält. Jacobi liefert nun noch eine zweite Transformation, durch welche er die Möglichkeit der Reduktion der isoperimetrischen Probleme auf eine nicht lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung nachweist. Enthält U außer der unabhängigen Variabeln t beliebige unbekannte Funktionen derselben mit ihren Ableitungen $x_1, x_1', \ldots x_1^{(\alpha)}, x_2, x_2', \ldots x_2^{(\beta)} \ldots$ und sollen x_1, $x_2, \ldots$ so bestimmt werden, daß $\delta\int U dt = 0$ ist, so setze man $\frac{\partial U}{\partial x_1^{(\alpha)}} = \frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}}$, $\frac{\partial U}{\partial x_2^{(\beta)}} = \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}}$, $\cdots$ und eliminiere mit Hilfe dieser Beziehungen $x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\beta)}, \ldots$ aus der Funk-

tion $V = U - x_1^{(\alpha)} \frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha - 1)}} - x_2^{(\beta)} \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta - 1)}} - \cdots$, dann wird V eine Funktion der als unabhängige Variable zu betrachtenden Größen $t, x_1, \ldots x_1^{(\alpha - 1)}, x_2, \ldots x_2^{(\beta - 1)}, \ldots$ und der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}}, \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}}, \cdots$ sein. Nach Ermittelung von V bilde man die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial W}{\partial t} + x_1' \frac{\partial W}{\partial x_1} + \cdots + x_1^{(\alpha-1)} \frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-2)}} + x_2' \frac{\partial W}{\partial x_2} + \cdots + x_2^{(\beta-1)} \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-2)}} + \cdots = V$, dann werden, wenn von dieser die vollständige Lösung W gefunden, welche außer der additiven Konstanten noch $\mu = \alpha + \beta + \cdots$ willkürliche Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_\mu$ einschließt, worin μ die Summe der Ordnungszahlen angibt, bis zu denen sich in U selbst die Differentialen der unbekannten Funktionen erheben, die unbekannten Funktionen $x_1, x_2, \ldots$ und ihre Differentialquotienten $x_1', x_1'', \ldots x_1^{(\alpha-1)}, x_2', x_2'', \ldots x_2^{(\beta-1)}, \ldots$ durch die μ Gleichungen $\frac{\partial W}{\partial a_i} = b_i$ zwischen jenen μ Größen und t selbst bestimmt sein, worin $b_1, \ldots b_\mu$ neue willkürliche Konstanten bedeuten, und dieselben Betrachtungen lassen sich auf isoperimetrische Probleme ausdehnen, für welche zwischen den unbekannten Funktionen Differentialgleichungen als Bedingungssgleichungen gegeben sind.

Die ebenfalls um diese Zeit entworfene und von Clebsch aus den hinterlassenen Papieren publizierte Aufzeichnung „De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando“, welche ebenso wie die anderen veröffentlichten Bruchstücke einen besonderen Abschnitt in dem großen, schon damals geplanten Werke über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen bilden sollte, geht von der Bemerkung aus, welche Jacobi bei seinen später zu besprechenden Multiplikatoruntersuchungen gemacht, daß der Multiplikator der Differentialgleichungen der isoperimetrischen Probleme mit einer abhängigen Variabeln

leicht zu ermitteln ist, daß sich aber die Bestimmung desselben viel schwieriger gestaltet, wenn die höchsten Differentialquotienten mehrerer abhängigen Variabeln unter dem Integral nicht von derselben Ordnung sind, und Jacobi greift deshalb die Frage ganz allgemein an, wie ein nicht normales Differentialgleichungssystem auf die normale Form zu führen sei. Er zeigt, daß die kürzeste Reduktion auf die Normalform durch die Lösung des Problems bestimmt wird, für m^2 beliebige Größen $a_{i\varkappa}$, in welchen i und $\varkappa$ die Werte $1, 2, \ldots m$ annehmen, m kleinste positive oder verschwindende Größen $l_1, l_2, \ldots l_m$ zu finden, derart, daß man, wenn $a_{i\varkappa} + l_i = p_{i\varkappa}$ gesetzt wird, unter den m^2 Größen $p_{i\varkappa}$ m in verschiedenen Horizontal- und Vertikalreihen gelegene Größen $p_{i_1 1}, p_{i_2 2}, \ldots p_{i_m m}$ auswählen kann, von denen eine jede unter den Größen derselben Vertikalreihe den größten Wert hat oder wenigstens nicht kleiner ist als irgendeine andere Größe derselben. Die ziemlich komplizierte Lösung dieser Aufgabe wird durch ein Beispiel erläutert, und sodann die Anwendung davon auf das Problem der Zurückführung der Differentialgleichungen auf die Normalform gemacht. Für das damit in Zusammenhang stehende Problem der Zurückführung eines vorgelegten Systems auf eine einzige Differentialgleichung zwischen einer abhängigen und einer unabhängigen Variabeln sollen durch Differenzieren der Differentialgleichungen solche Hilfsgleichungen gebildet werden, die notwendig sind, damit nur durch Elimination ohne jede Differentiation die Differentialgleichung zwischen diesen beiden Variabeln hervorgehe, und es wird gefragt, wievielmal zur Aufstellung jenes Systems von Hilfsgleichungen jede der Differentialgleichungen zu differenzieren ist; auch die Lösung dieses Problems stützt sich auf den obenerwähnten Hilfssatz.

Unmittelbar nach Absendung seines Briefes an Encke schloß Jacobi am 9. Dezember 1836 seine große und für den ganzen weiteren Ausbau der Analysis und Mechanik fundamentale Arbeit ab, welche betitelt ist „Über die Re-

duktion der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen irgendeiner Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen", welche zugleich in französischer Übersetzung im Liouvilleschen Journal erschien, und die in dem Briefe an Encke sowie in den eben besprochenen Aufzeichnungen zum Teil enthaltene Theorie näher ausführt.

„Zu Jacobis wichtigsten Untersuchungen", sagt Dirichlet, „gehören diejenigen über analytische Mechanik. Hamilton hatte die interessante Entdeckung gemacht, daß die Integration der Differentialgleichungen der Mechanik sich immer auf die Lösung von zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen zurückführen läßt, aber diese Entdeckung war, wie merkwürdig sie auch erscheinen mußte, völlig unfruchtbar geblieben, bis Jacobi sie von einer unnötigen Komplikation befreite, indem er zeigte, daß die zu findende Lösung nur einer der beiden partiellen Differentialgleichungen zu genügen braucht."

In der Tat hatte Hamilton zur vollständigen Integration der $3n$ Bewegungsgleichungen die Auffindung einer Funktion S von $6n+1$ Variabeln, nämlich den $3n$ Größen x_i, y_i, z_i, den $3n$ Größen a_i, b_i, c_i und der Größe t gefordert, welche zu gleicher Zeit den beiden partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U$, $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c_i}\right)^2\right] = U_0$ Genüge leistet, wodurch er „seine schöne Entdeckung in ein falsches Licht gesetzt hat", während Jacobi zeigt, daß es genügt, ein vollständiges Integral der ersten dieser beiden partiellen Differentialgleichungen zu finden, welches außer der additiven Konstanten noch $3n$ andere willkürliche Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n}$ enthält, um die vollständigen endlichen Integrale der vorgelegten $3n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit $6n$

willkürlichen Konstanten, auch wenn die Kräftefunktion die Zeit enthält, in der Form zu finden $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ldots \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}} = \beta_{3n}$; ist die Kräftefunktion von t frei, so vereinfacht sich die partielle Differentialgleichung auf die Form $\frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i} \right)^2 \right] = U + h$, und die Lösungen des mechanischen Problems ergeben sich aus dem vollständigen Integrale in der Gestalt $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ldots \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n-1}} = \beta_{3n-1}, \frac{\partial S}{\partial h} = t + \tau$, wenn h die Konstante der lebendigen Kraft war; dieselben Sätze gelten für die Bewegung nicht freier Systeme. Als Beispiel für die Auffindung von S wird der einfache Fall der elliptischen Planetenbewegung behandelt und bei dieser Gelegenheit das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft für ein System gegenseitig durch Anziehung aufeinander wirkender Punkte so transformiert, daß dasselbe nur die Entfernungen der Punkte voneinander enthält.

Jacobi geht nun zur Behandlung des allgemeinen Problems der Integration partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung über, wofür sich Lagrange auf zwei unabhängige und eine abhängige Variable beschränkt hatte, während Pfaff in seiner berühmten Abhandlung vom Jahre 1814 das Problem zum ersten Male ganz allgemein behandelt hat. Jacobi gibt nun zunächst, wie er es schon in einer seiner ersten Arbeiten auf eine symmetrische und übersichtliche Art getan, eine ausführliche Darstellung der Pfaffschen Methode, um dieselbe auf die Hamiltonsche Differentialgleichung anzuwenden. „Wenn daher die Differentialgleichungen der Bewegung durch die neue Methode Hamiltons auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung zurückgeführt worden, so besteht, wie ich im vorigen gezeigt habe, die ganze Kenntnis, die wir bis jetzt über die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung wenigstens für den Fall von mehr als drei Variabeln besitzen, darin, die

Integration dieser partiellen Differentialgleichung wieder auf die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung zurückzuführen. Ja es ist die vollständige Integration der Differentialgleichungen der Bewegung nach der von mir auseinandergesetzten Pfaffschen Theorie nur ein erster Schritt zur Integration der partiellen Differentialgleichung, indem zufolge dieser Theorie nachher noch eine Reihenfolge von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen zu bilden und jedes vollständig zu integrieren ist. Man muß daher im umgekehrten Sinne sagen, daß es eine wichtige Bemerkung Hamiltons ist, daß die Integration der von ihm aufgestellten partiellen Differentialgleichungen nur auf die vollständige Integration der Differentialgleichungen der Bewegung zurückkommt und es keiner weiteren Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen dazu bedarf. Diese Bemerkung Hamiltons gewinnt noch dadurch an Wichtigkeit, daß sie sich mit Leichtigkeit auf alle partiellen Differentalgleichungen 1. Ordnung ausdehnen läßt.“ Er gelangt nun durch Anwendung der Hamiltonschen Methode in der Tat zu dem ganz allgemeinen Resultate, daß zur Integration irgendeiner partiellen Differentialgleichung zwischen einer beliebigen Zahl von Variabeln die vollständige Integration des von Pfaff aufgestellten ersten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen vollständig hinreicht, und man nicht, wie Pfaff verlangt, noch eine Reihe anderer Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu integrieren hat. „Durch den obenerwähnten Zusammenhang zwischen einem Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen und einer partiellen Differentialgleichung“, sagt Dirichlet, „wurde er, die Sache in umgekehrter Ordnung betrachtend, zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt, mit welcher er sich schon in einer seiner frühesten Abhandlungen über die Pfaffsche Methode beschäftigt hatte, und gelangte jetzt zu dem Resultate, daß von der ganzen Reihe

von Systemen, deren sukzessive Integration Pfaff fordert, die Behandlung des ersten alle übrigen überflüssig macht, daß also schon der erste Schritt der früheren Methode vollständig zum Ziele führt.“ Jacobi gibt eine genaue Analyse der Pfaffschen Methode und kann auf Grund derselben durch Einführung der Anfangswerte der Variabeln, was Cauchy schon 1819 getan, zeigen, daß, wie man durch die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen die vollständige Lösung einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung finden kann, auch umgekehrt aus irgendeiner vollständigen Lösung der letzteren die vollständigen Integrale des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen abgeleitet werden können, und daß sich dies auch auf die allgemeine Untersuchung ausdehnen läßt, unter welche Pfaff die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit einbegreift, so daß, wenn irgendein System von n Gleichungen mit n willkürlichen Konstanten gegeben ist, welches der Differentialgleichung $X_1 dx_1 + \ldots + X_{2n} dx_{2n} = 0$ Genüge leistet, man daraus auch die vollständigen Integrale des von Pfaff aufgestellten Systems von $2n - 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen ableiten kann. „Ich habe oben bemerkt, daß es in der von Pfaff zur Integration der Gleichung $X_1 dx_1 + \ldots + X_{2n} dx_{2n} = 0$ vorgeschlagenen Methode ein Übelstand sei, daß man von den nacheinander zu integrierenden Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen nur das erste wirklich aufstellen, und für die andern Systeme nur die Art angeben kann, wie man sie, wenn man die vorhergehenden vollständig integriert hat, zu bilden hat. In der Tat ist klar, daß es hierdurch unmöglich fällt, das Ganze der Aufgabe zu übersehen. Für den besondern Fall, welcher die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung gibt, haben wir gesehen, daß die Integration des ersten dieser Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen vollkommen ausreicht und es der Aufstellung und Integration anderer Systeme nicht weiter bedarf.“

In eben dieser Zeit verfaßte auch Jacobi die umfangreiche und überaus interessante Aufzeichnung „Über diejenigen Probleme der Mechanik, in welchen eine Kräftefunktion existiert, und über die Theorie der Störungen“, welche erst weit später aus seinen hinterlassenen Papieren von Clebsch mitgeteilt wurde.

Wie Lagrange durch Einführung der Kräftefunktion die Differentialgleichungen der Bewegung vermittels der partiellen Differentialquotienten einer Funktion der Koordinaten darstellt, so wies Hamilton nach, daß man in diesem Falle auch sämtliche Integralgleichungen der Bewegung vermittels der partiellen Differentialquotienten einer einzigen Funktion auf ebenso einfache Weise darstellen kann. Jacobi bespricht zunächst das von Hamilton als angehäufte lebendige Kraft bezeichnete Integral $2\int\limits_0^t T dt = V$ sowie dessen charakteristische- oder Grundfunktion $\int\limits_0^t (U + T) dt = S$, entwickelt letztere für die Planetenbewegung, geht dann zur Form der Integralgleichungen für unfreie Bewegungen über und entwickelt die beiden von Hamilton aufgestellten partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung, denen die charakteristische Funktion genügt. Er zeigt hier wiederum, daß es hinreicht, die charakteristische Funktion nur der ersten partiellen Differentialgleichung zu unterwerfen, um schon daraus die Integralgleichungen des Bewegungssystems zu erhalten, nur daß dann nicht, wie bei Hamilton, die willkürlichen Konstanten die Anfangswerte der Koordinaten und der Bewegungsgrößen bezeichnen; aber gerade dadurch mußte Hamilton mit zwei partiellen Differentialgleichungen operieren und kam so nicht zur Herleitung der Integrale der Bewegungsgleichungen aus dem vollständigen Integral. Jacobi sucht nun weiter den Zusammenhang der verschiedenen Systeme von Integralgleichungen zu ermitteln, welche sich aus ver-

schiedenen vollständigen Lösungen der zur Bestimmung der Funktionen S und V dienenden partiellen Differentialgleichungen ergeben, und zeigt, wie man aus verschiedenen vollständigen Lösungen stets dieselben vollständigen Integrale der Bewegungsgleichungen erhält.

Es folgt die Entwicklung der charakteristischen Funktion für das Problem der Planetenbewegung aus der partiellen Differentialgleichung, und dafür noch andere Methoden, welche bei beliebigen Anziehungsgesetzen brauchbar bleiben und sich auf den Satz stützen, daß man jede partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, in welcher die gesuchte Funktion nicht selber vorkommt, in eine andere verwandeln kann, in welcher sich die partiellen Differentialquotienten mit den Variabeln vertauschen, so daß eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, in welcher außer der unbekannten Funktion auch mehrere Variabeln nicht selber vorkommen, sondern nur die nach den letzteren genommenen partiellen Differentialquotienten, immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher die Zahl der partiellen Ableitungen um eine gleiche Anzahl geringer ist.

Nachdem nun Jacobi noch für die zweite Lagrangesche Form der Bewegungsgleichungen das Hamiltonsche totale System und die partielle Differentialgleichung aus der Variation der charakteristischen Funktion hergeleitet und dieselbe für das Problem der Rotation entwickelt hat, geht er zur Zurückführung der allgemeinsten partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen über und zeigt, daß, wenn $f(t, q_1, \dots q_m, p_1, \dots p_m)$ irgend eine Funktion der $2m+1$ Größen $t, q_1, \dots q_m, p_1, \dots p_m$ bedeutet, und zwischen diesen Variabeln das System von $2m$ Differentialgleichungen 1. Ordnung besteht $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$, wenn ferner $c_1, \dots c_m$ die Werte der Größen $q_1, \dots q_m$, und $b_1, \dots b_m$ die Werte der Größen $p_1, \dots p_m$ für $t = 0$

bedeuten, und man vermöge der $2m$ Integralgleichungen das Integral $W = \int\limits_0^t \left(p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} - f\right) dt$ durch die Größen $t, q_1, \ldots q_m, c_1, \ldots c_m$ ausdrückt, dann die Gleichungen $\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i$, $\frac{\partial W}{\partial c_i} = - b_i$ als die $2m$ Integralgleichungen des Systems betrachtet werden können, während der Ausdruck von W selbst eine Lösung der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung $\frac{\partial W}{\partial t} + f\left(t, q_1, \ldots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = 0$ ist, welche m willkürliche Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_m$ und eine noch additiv verbundene einschließt. Nachdem er das Theorem auch auf den Fall erweitert, daß W selbst in die Funktion f eintritt, beweist er die Umkehrung dieser beiden Sätze und behandelt wieder die durch die Annahme, daß t nicht explizite in f enthalten ist, sich ergebende Vereinfachung. Indem er nun die verschiedenen Arten der vollständigen Integrale einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mit m unabhängigen Variabeln untersucht, findet er, daß, wenn eine Lösung $m + k$ willkürliche Konstanten enthält, zwischen den Verhältnissen der nach diesen willkürlichen Konstanten genommenen partiellen Differentialquotienten der Lösung k Relationen sich ergeben, welche außer diesen Verhältnissen nur noch die willkürlichen Konstanten enthalten, und zeigt den Zusammenhang dieses Satzes mit dem Umstande, daß Hamilton seine charakteristische Funktion durch zwei partielle Differentialgleichungen definieren konnte, indem er den Satz beweist, daß, wenn man von einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung eine Lösung mit einer willkürlichen Konstanten mehr gefunden hat, als die Zahl der unabhängigen Variabeln beträgt, dann dieselbe Funktion gleichzeitig außer der vorgelegten partiellen Differentialgleichung noch einer andern genügt, welche zwischen den willkürlichen Konstanten und den nach ihnen genom-

menen partiellen Differentialquotienten der unbekannten Funktion besteht, ohne die unabhängigen Variabeln selbst zu enthalten. Die Untersuchung der Beziehungen, welche zwischen den Differentialquotienten der Variabeln nach den Konstanten und denen der Konstanten nach den Variabeln bestehen, führt ihn zu dem wichtigen Theorem, daß, wenn $W(q_1, \ldots q_m, \alpha_1, \ldots \alpha_m)$ irgendeine Funktion, und man drückt aus den Gleichungen $\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i$, $\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ einmal die Größen $q_1, \ldots p_1, \ldots$ als Funktionen von $\alpha_1, \ldots \beta_1, \ldots$, ferner $\alpha_1, \ldots \beta_1, \ldots$ durch $q_1, \ldots p_1, \ldots$ aus, dann $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_\varkappa} = \frac{\partial \beta_\varkappa}{\partial q_i}, \frac{\partial p_i}{\partial \beta_\varkappa} = -\frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial q_i}$; $\frac{\partial q_i}{\partial \beta_\varkappa} = \frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial p_i}, \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_\varkappa} = -\frac{\partial \beta_\varkappa}{\partial p_i}$ sein wird, und von diesen Formeln werden Anwendungen auf die Differentialbeziehungen für die freie Bewegung gemacht.

Nachdem er noch allgemein die Frage beantwortet, wie man aus einer gegebenen vollständigen Lösung eine andere ableitet, deren Konstanten die Anfangswerte der Variabeln sind, und die gefundene Methode auf die Planetenbewegung angewandt hat, geht er zur Entwicklung der Störungsformeln über und beweist zunächst, daß die Lagrangeschen Formeln, wenn die Störungsfunktion H_1 außer den Größen q auch noch die Größen p enthält, in $\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \Sigma(\alpha, \beta)\frac{d\alpha}{dt}$ übergehen, worin $(\alpha, \beta) = \left[\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \cdots\right] - \left[\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \cdots\right]$, und $\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} = 0$ ist, während die Erweiterung der Poissonschen Störungsformeln in der Form gegeben wird $\frac{d\alpha}{dt} = \Sigma[\alpha, \beta]\frac{\partial H_1}{\partial \beta}$, worin $[\alpha, \beta] = \frac{\partial \alpha}{\partial q_1}\frac{\partial \beta}{\partial p_1} + \cdots - \left[\frac{\partial \alpha}{\partial p_1}\frac{\partial \beta}{\partial q_1} + \cdots\right]$, und wieder $\frac{d[\alpha, \beta]}{dt} = 0$ ist. Da nun (α, β) und $[\alpha, \beta]$ nicht von t abhängen, so wird, wenn $c_\varkappa, b_\varkappa$ die zu $t = 0$ gehörigen Werte von $q_\varkappa, p_\varkappa$ bedeuten, $(\alpha, \beta) = \frac{\partial c_1}{\partial \alpha}\frac{\partial b_1}{\partial \beta} + \cdots - \left(\frac{\partial c_1}{\partial \beta}\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} + \cdots\right)$,

$[\alpha, \beta] = \frac{\partial \alpha}{\partial c_1}\frac{\partial \beta}{\partial b_1} + \cdots - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial b_1}\frac{\partial \beta}{\partial c_1} + \cdots\right)$, und daher, wenn die Größen c, b selber zu Elementen genommen werden, $(c_i, b_\varkappa) = 0$ etc. sein, und somit die Gleichungen bestehen $\frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial b_i}$, $\frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial c_i}$, so daß wieder eine partielle Differentialgleichung $\frac{\partial W}{dt} + H_1 = 0$ existiert, deren vollständiges Integral die Integrale der gestörten Elemente in der Form $\frac{\partial W}{\partial c_i} = b_i$, $\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ liefert; für diese kanonischen Elemente werden die Störungsformeln für die Planetenbewegung entwickelt, und der Übergang von einem Systeme kanonischer Elemente und der zugehörigen Störungsgleichungen zu einem andern untersucht, wobei sich zeigt, daß die Störungsfunktion immer so bestimmt werden kann, daß die veränderlichen Elemente irgendwelche Funktionen der Zeit werden. Nachdem noch die Modifikationen erörtert worden, welche eintreten, wenn die Kräftefunktion des ungestörten Problems die Zeit nicht enthält, geht Jacobi zu seiner Entdeckung von der Bedeutung des Poissonschen Satzes über und weist nach, daß, wenn man von einem Probleme der Mechanik, für welches der Satz von der lebendigen Kraft gilt, zwei Integrale kennt, man daraus durch bloße partielle Differentiation ein drittes ableiten kann. Die Arbeit schließt mit der allgemeinsten Transformation der partiellen Differentialgleichung $F\left(W, x_1, \ldots x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = 0$ bei Einführung einer neuen unbekannten Funktion $Z = f(W, x_1, \ldots x_n, t_1, \ldots t_n)$, für welche sich durch Elimination der $2n + 1$ Größen $W, x_1, \ldots x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial W}{\partial x_n}$ aus den $2n + 2$ Gleichungen $F = 0$, $Z = f$, $\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $\frac{\partial Z}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial t_i}$ die transformierte partielle Differentialgleichung zwischen $Z, t_1, \ldots t_n, \frac{\partial Z}{\partial t_1}, \cdots \frac{\partial Z}{\partial t_n}$ ergibt.

Aus eben dieser Zeit stammt die gleichfalls von Clebsch aus den hinterlassenen Papieren Jacobis herausgegebene Aufzeichnung „Über die vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung", die ebenfalls ein Kapitel seines großen Werkes bilden sollte. Wenn $S=f(t, q_1, \ldots q_m, \alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_m)$ eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$ ist, worin H eine Funktion von $t, q_1, \ldots q_m, S, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial S}{\partial q_m}$, und $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ willkürliche Konstanten bedeuten, und man setzt in H für $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ die Größen p_i, bildet ferner die Gleichungen $S=f(t, q_1, \ldots \alpha, \alpha_1, \ldots)$, $\frac{\partial f}{\partial q_i} = p_i, \frac{\partial f}{\partial \alpha} : \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} : \cdots = \beta : \beta_1 : \cdots$, worin die β neue willkürliche Konstanten, so sind, wie Jacobi gezeigt hat, diese Gleichungen die vollständigen Integralgleichungen des zwischen den Variabeln t, q_i, S, p_i stattfindenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - p_i \frac{\partial H}{\partial S}, \frac{dS}{dt} = p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \cdots - H$. Wenn nun $S=f$ eine vollständige Lösung sein soll, so darf die Determinante, gebildet aus den partiellen Differentialquotienten 1. Ordnung von f nach $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ und denen 2. Ordnung nach diesen Größen und den $q_1, q_2, \ldots q_m$, nicht verschwinden, und es folgt danach aus einem von Jacobi in dem Aufsatze „de binis quibuslibet functionibus homogeneis etc." bewiesenen Satze, daß die m Quotienten von $\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}$ durch $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ in bezug auf je m der $m+1$ Variabeln voneinander unabhängige Funktionen sein müssen, daß es also zwischen diesen Quotienten, einer der $m+1$ Variabeln und den willkürlichen Konstanten keine identische Gleichung gibt.

Im Anschluß an seine früheren Untersuchungen erörtert er auch hier wieder den Fall, daß bei Aufsuchung einer vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung durch den

naturgemäßen Gang der Betrachtung eine größere Anzahl willkürlicher Konstanten in die Lösung eingeführt wird, als zu einer vollständigen Lösung erforderlich ist, und zeigt wieder in anderer Weise, wie man den Fall der überzähligen willkürlichen Konstanten auf den früheren zurückführt, und wie man diese Betrachtungen auf das aus einer vollständigen Lösung mit überzähligen Konstanten entspringende System der dynamischen Integralgleichungen anwendet. Jacobi geht nunmehr ausführlich auf die Untersuchung von Lagrange ein, aus jeder vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung allgemeinere abzuleiten und die von Lagrange hierbei gelassene Lücke durch den Nachweis auszufüllen, daß die von ihm eingeführten allgemeinen Formen auch wirklich alle Lösungen umfassen, oder daß die willkürlichen Funktionen, welche sie enthalten, immer so bestimmt werden können, daß eine gegebene Lösung erhalten wird. Wenn die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung durch $S = f(t, q_1, \dots q_m, \alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m)$ dargestellt ist, und f in F übergeht, wenn man $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m$ als Funktionen von $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{i-1}$ betrachtet, welche den Gleichungen $\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\right) = 0, \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}\right) = 0$ genügen, so ist $S = F$ wieder eine Lösung der Differentialgleichung, und man wird auf diese Weise alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung erhalten, indem man eine beliebig gegebene Lösung F aus jeder beliebigen vollständigen Lösung dadurch herleiten kann, daß man zuerst feststellt, wie viele der Größen $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m$ man bestimmten Funktionen der übrigen gleich zu setzen hat, und alsdann diese letzteren den obigen Gleichungen gemäß ermittelt. Darauf sich stützend, untersucht Jacobi unter Anlehnung an seine frühere Arbeit, wie man aus einer vollständigen Lösung alle vollständigen Lösungen ableiten kann, zunächst für den Fall, daß die partielle Differentialgleichung die gesuchte Funktion nicht enthält, und zeigt wiederum, daß alle verschiedenen vollständigen Lösungen

dieselben dynamischen Integralgleichungen geben, indem er diesen Nachweis auf den Satz zurückführt, daß man aus der vollständigen Lösung $S = f(t, q_1, \dots q_m, \alpha_1, \dots \alpha_m) + \alpha$ durch Elimination von $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ aus den Gleichungen $F = f + \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, a_1, a_2, \dots a_m) + a$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0$ eine neue vollständige Lösung mit den willkürlichen Konstanten $a, a_1, \dots a_m$ erhält, wenn die willkürliche Funktion φ so beschaffen ist, daß die Funktionen $\frac{\partial \varphi}{\partial a_i}$ in bezug auf $\alpha_1, \dots \alpha_m$, oder die Funktionen $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i}$ in bezug auf $a_1, a_2, \dots a_m$ voneinander unabhängig sind. Nach Ausdehnung dieser Resultate auch auf den Fall, daß die partielle Differentialgleichung die gesuchte Funktion selbst enthält, hebt er hervor: „Wenn man eine bestimmte vollständige Lösung zugrunde legt, so teilen sich alle Lösungen in verschiedene Klassen, je nachdem man, um sie aus der vollständigen Lösung abzuleiten, eine oder zwei etc. oder $m + 1$ Relationen zwischen den in denselben enthaltenen willkürlichen Konstanten anzunehmen hat. Die erste Klasse ist die allgemeinste, die letzte umfaßt die Lösungen selbst, welche in der zugrunde gelegten vollständigen Lösung enthalten sind. Diese Einteilung drückt aber nichts den Lösungen selbst Immanentes aus, sondern nur ihre Beziehung zu der zugrunde gelegten vollständigen Lösung; denn es kann jede gegebene Lösung zu jeder beliebigen Klasse gehören, je nachdem man verschiedene vollständige Lösungen zugrunde legt.“

Von den großen Erfolgen in diesen überaus schwierigen Untersuchungen gibt er am 20. Dezember 1836 seinem Bruder in Dorpat Kenntnis: „. . . Ich habe mich diesen Sommer, soweit die vielfachsten durch diese Krankheit (des Sohnes Nicolas) und eignes Unwohlsein herbeigeführten Störungen es gestatteten, auf neuen Gebieten mit entschiedenem Glücke bewegt. Ich habe die große Lücke in

der Variationsrechnung, die Criterien des Größten und Kleinsten in den isoperimetrischen Problemen betreffend, mit denen ich mich, wie Du weißt, seit einer Reihe von Jahren herumschlug, dadurch glücklich ausgefüllt, daß es mir auf unerwartete Weise gelang, die Systeme von Differentialgleichungen, deren Integration nach allen bekannten Methoden unmöglich schien, vermittels einer neuen Anwendung der schönen Methode der Variation der Constanten vollständig zu integriren. Ich habe ferner in der Störungstheorie einen merkwürdigen Ausdruck der großen Axe gefunden, der für alle Potenzen der Excentricitäten des gestörten und der Maße des störenden genau ist, und auf welchen Freund Bessel großen Werth legte. Endlich habe ich eine neue Methode, die Differentialgleichungen der Bewegung zu behandeln, erfunden, durch welche jedes Integral die Stelle von zwei Integrationen ersetzt ... Wenn der alte gute Bartels mit dem Tode abgehen sollte, würdet Ihr freilich Noth haben, ihn für die reine Mathematik zu ersetzen. Ich wüßte nur einen einzigen, ein eminentes Talent und ein Charakter von solcher Bravheit und Bescheidenheit, wie in den Sitten der heutigen Welt nicht leicht wieder gefunden wird, den Dr. Kummer am Liegnitzer Gymnasium. Dieser junge Mann, der schon das Bedeutendste in den tiefsten Theilen der Analysis geleistet, und den ich über alle unsere mathematischen Universitätsdocenten setze — Dirichlet vielleicht ausgenommen — wäre schon längst zur Universität gegangen, wenn es nicht bei uns so stünde, daß z. B. an der Halle'schen Universität gar kein ordentlicher Professor der Mathematik ist, und auf der Breslauer die Direction der Sternwarte und die ordentliche Professur der Mathematik dem Professor der Physik Dr. Scholz mit übertragen ist. Wenn ich nun dem Minister schreibe, das sei ein Gräuel, so schreibt er wieder, das sei ein Gräuel, aber er habe kein Geld. Und wenn er sich endlich an den König wendet, so wird es ihm abgeschlagen, weil er Geld genug habe, aber

nicht damit umzugehen verstehe, was leider nur zu wahr ist. Ich denke, ich habe Dir schon öfter von Kummer gesprochen; er griff eine Differentialgleichung 3. Ordnung in meinen fundamentis auf, die so complicirt ist, daß ich weder selber das geringste damit anfangen konnte, noch auch glaubte, daß irgend ein anderer etwas damit würde anfangen können. Mit einer Kühnheit, die mich in die größte Verwunderung setzte, machte er gerade diese zum Ausgangspunkte seiner Untersuchungen und leitete daraus auf unerwartete Weise ähnliche Resultate für andere Transcendenten ab, wie ich für die elliptischen gefunden hatte; eine der berühmtesten Arbeiten von Gauss ist der Ausdruck der Reihe $1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \cdots$ durch bestimmte Integrale, wenn $x = 1$; man glaubte, dieser Arbeit könne nichts mehr hinzugefügt werden, und Kummer leistete dasselbe für jeden Werth von x. Endlich hat er zuerst die Riccati'sche Gleichung integrirt, die so lange den Anstrengungen der Analysten spottete, und die Liouville im Pariser polytechnischen Journal um dieselbe Zeit vergeblich durch n-fache Integrale zu bewältigen bemüht war, andere schöne Arbeiten dieses noch ganz jungen Mannes abgerechnet."

Die von Jacobi hier erwähnten Untersuchungen von Kummer über die hypergeometrische Reihe hatten sogleich sein lebhaftes Interesse erweckt, und es fand sich auch unter seinen hinterlassenen Papieren eine aus dem Jahre 1836 oder 1837 stammende Notiz, die er im Jahre 1843 einer neuen Bearbeitung unterzogen und deren Resultate er auf die allgemeine hypergeometrische Reihe ausgedehnt hatte, Ergebnisse, welche Heine während seiner damaligen Studienzeit zu einem Aufsatze zusammengestellt und im Jahre 1859 unter dem Titel „Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe" veröffentlicht hat. Allgemeiner als Euler, welcher $y = \int_0^1 V du$, worin $V =$

$u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}$ als Integral der Differentialgleichung $x(1-x)y''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)y'-\alpha\beta y=0$ gefunden hatte, zeigt Jacobi, daß dieser Gleichung auch das Integral $\int\limits_g^h V du$ genügt, wenn g und h zwei von den Werten $0, 1, \pm\infty$ bezeichnen und $\left[\frac{u(1-u)}{1-xu}V\right]_g^h=0$ ist, die Konvergenz des Integrales vorausgesetzt; dasselbe leistet auch $\int\limits_g^{\frac{1}{x}} V du$, wenn $\frac{u(1-u)}{1-xu}V$ für $u=g$ verschwindet und $1-\alpha$ positiv ist. Da aber nach Gauss $\int\limits_0^1 u^\lambda(1-u)^\mu(1-au)^\nu du$, von einem konstanten Faktor abgesehen, der hypergeometrischen Reihe $F(-\nu, \lambda+1, \lambda+\mu+2, a)$ gleich ist, so erhält Jacobi hiernach die 24 hypergeometrischen Reihen, welche Kummer aufgestellt hat, in der wesentlich neuen Form, daß die bestimmten Integrale, welche jenen Reihen gleich sind, sämtlich durch Integration desselben Ausdrucks zwischen zweien der Grenzen $0, 1, \pm\infty, \frac{1}{x}$ erhalten werden. Eine gänzlich davon verschiedene Art von Beziehungen zwischen Integralen jener Differentialgleichung findet Jacobi durch Verallgemeinerung der Untersuchungen, welche Gauss in seiner Arbeit über mechanische Quadraturen durchgeführt hat; indem er aus einem Integrale derselben durch ein bestimmtes Integral die Lösung einer anderen Differentialgleichung 2. Ordnung herleitet, entwickelt er leicht für eine endliche hypergeometrische Reihe die Beziehung

$$F(-n,\alpha+n,\gamma,x)=\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\,\frac{d^n\{x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\}}{dx^n},$$

so daß man, wenn dieselbe mit X_n bezeichnet wird, jede Funktion nach diesen ebenso wie nach Kugelfunktionen entwickeln kann, da, wenn $I_{mn}=\int\limits_0^1 X_m X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx$ gesetzt wird,

sich $I_{mn} = 0$ und I_{nn} gleich einer bestimmten Konstanten ergibt. Jacobi geht endlich noch auf die Untersuchung der Frage ein, ob es für jeden endlichen Wert der Elemente möglich ist, die gegebene Differentialgleichung durch einfache bestimmte Integrale vollständig zu integrieren, und er charakterisiert die Klassen, in denen dies der Fall ist.

Noch im Winter 1836/37 begann Jacobi die Ausarbeitung der im Sommer in seiner Vorlesung gegebenen Anwendungen der Kreisteilung auf die Zahlentheorie; nur einen Punkt derselben berührt er jetzt schon in einem Briefe an Gauss vom 31. Januar 1837: „Sie wollen S. 31 Ihrer ersten biquadratischen Abhandlung wissen, welches Zeichen jedesmal in der Kongruenz $2b \equiv \pm r^2 \pmod{p}$ zu nehmen sei; dafür habe ich, wenn p die Form $8n + 5$ hat, die folgende Antwort: Es sei N die Zahl der reduzierten quadratischen Formen der Theiler von $x^2 + py^2$, so muß b mit solchem Zeichen genommen werden, daß $(-1)^{N + \frac{p+3}{8}} \cdot \frac{b}{2}$ die Form $4m + 1$ erhält", und am 15. April 1837 schrieb er an seinen Vetter Hauptmann Schwinck: „Ich bin grade jetzt dabei, eine sehr große Arbeit über die Primzahlen zu beendigen und abzuschicken."

Als jedoch die achtstündige Privatvorlesung über Variationsrechnung, die er für den Sommer angekündigt, nicht zustande gekommen, und er dadurch freie Zeit für die wissenschaftliche Arbeit gewonnen, führte er beim Niederschreiben die zahlentheoretischen Untersuchungen immer weiter aus, und die Zusätze zu dem, was er in der vorjährigen Sommervorlesung gegeben, wurden so umfangreich, daß er noch die ganzen Herbstferien auf die Ausarbeitung derselben verwenden mußte. Die seminaristischen Übungen hielt er in diesem Sommer mit großem Eifer ab, und eine erneute Eingabe von ihm und Neumann vom 29. August 1837 hatte das erfreuliche Resultat, daß

endlich zwei Jahre später am 19. April 1839 dem Seminar 350 Taler jährlich bewilligt wurden.

Auch der wissenschaftliche Verkehr mit Bessel blieb trotz seiner so sehr in Anspruch genommenen Zeit beständig ein äußerst reger, wovon ein aus den hinterlassenen Papieren seines Freundes, durch Kortüm mitgeteilter, Brief Jacobis aus Pillau vom 12. August 1837 Zeugnis gibt. Die „Geometrische Konstruktion zweier geodätischen Formeln Bessels" leitet Jacobi durch Abbildung mittels der Normalen auf der Einheitskugel und durch zwei Hilfssätze her, von denen der erste aussagt, daß, wenn in einem sphärischen Dreiecke die Grundlinie und der ihr gegenüberliegende Winkel unendlich kleine Größen sind, die Differenz der beiden anderen Seiten gleich ist der unendlich kleinen Grundlinie multipliziert in den cosinus eines der ihr anliegenden Winkel, der andere, daß, wenn in einem ebensolchen sphärischen Dreieck ein Winkel ein rechter oder eine Seite ein Quadrant ist, im ersten Falle die beiden Seiten einander gleich sind, im zweiten die Summe der Winkel an der Grundlinie gleich zwei Rechten ist.

Am Ende der Herbstferien sieht er endlich einen definitiven Abschluß seiner großen zahlentheoretischen Arbeit vor sich und schreibt am 14. September 1837 seinem in diesem Jahre aus Dorpat nach Petersburg berufenen Bruder: „... Was meine Studien betrifft, so habe ich seit einem Jahre mehr erfunden, d. h. von anderen erfundene Schwierigkeiten gelöst als seit langer Zeit, die analytische Mechanik, die Variationsrechnung und die Zahlentheorie sind diesmal der Schauplatz; in letzterer bin ich dabei, eine große Abhandlung von gegen 20 Bogen zu beenden, auch habe ich endlich angefangen, einiges aus meiner Theorie der Störungen von guten Freunden in Zahlen ausführen zu lassen ...", und in der Tat erscheint am 16. Oktober 1837 ein Auszug aus einem an die Berliner Akademie gerichteten Schreiben in deren Monatsberichten unter dem Titel „Über die Kreis-

teilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie". Schon am 8. Februar 1827 hatte Jacobi Gauss von seinen zahlentheoretischen Untersuchungen Mitteilung gemacht, nach denen, wenn p eine Primzahl, x eine Lösung von $\frac{x^p-1}{x-1}=0$, g eine primitive Wurzel von p, $F(\alpha)=x+\alpha x^g+\alpha^2 x^{g^2}+\cdots+\alpha^{p-2}x^{g^{p-2}}$ und α eine Wurzel der Gleichung $\frac{\alpha^{p-1}-1}{\alpha-1}=0$ ist, die Relation besteht $F(\alpha)F(\alpha^{-1})=\alpha^{\frac{p-1}{2}}p$; daß ferner, wenn $F(\alpha^m)F(\alpha^n)=\psi(\alpha)F(\alpha^{m+n})$ gesetzt wird, so daß $\psi(\alpha)$ eine ganze und ganzzahlige Funktion von α ist, $\psi(\alpha)\psi(\alpha^{-1})=p$ wird. Ist r eine primitive Wurzel von $r^{p-1}=1$, und setzt man in der Funktion $\psi(r)=\frac{F(r^{-m})F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})}$ für r die Zahl g, so wird für positive m und $n<p-1$ $\psi(g)\equiv-\frac{\Pi(m+n)}{\Pi(m)\Pi(n)}$ (mod p), wo $\Pi(n)=1.2\ldots n$ ist, und er folgerte daraus, daß, wenn $m+n>p-1$, $\psi(g)\equiv 0$ (mod p) ist, „einer der für die Anwendungen wichtigsten Sätze der Zahlentheorie".

Jacobi fügt jetzt den früheren Mitteilungen hinzu, daß, wenn $2\equiv g^m$, $3\equiv g^{m'}$ (mod p), dann $F(-1)F(\alpha^2)=\alpha^{2m}F(\alpha)F(-\alpha)$, $F(\alpha)F(\gamma\alpha)F(\gamma^2\alpha)=\alpha^{-3m'}pF(\alpha^3)$ ist, worin γ eine imaginäre 3. Einheitswurzel bedeutet. Die Funktionen $F(\alpha)$, welche bisher nur bestimmt waren, wenn α eine quadratische, kubische oder biquadratische Wurzel der Einheit ist, lassen sich durch die obigen Formeln auch für eine 6., 8., 12. Wurzel der Einheit bestimmen, so daß man die Gleichungen vom 6., 8., 12. Grade, welche in der Kreisteilung vorkommen, durch die Zerfällung von p in die drei Formen x^2+y^2, x^2+2y^2, x^2+3y^2 vollständig auflösen kann. Als eine für die Theorie der quadratischen Formen wichtige Anwendung der Zahlentheorie, welche zugleich eine Analogie zur Lagrangeschen Methode zur Bildung der Resolventengleichung einschließt, hebt Jacobi das dem Gaussschen Satze über Eulersche Integrale analoge Theorem hervor, daß, wenn $p=\lambda n+1$, β eine primitive λ.

Einheitswurzel, α irgendeine Wurzel von $\alpha^{p-1} = 1$, $\lambda \equiv g^m$ (mod p) ist, für ungerade λ $F(\alpha)F(\beta\alpha)F(\beta^2\alpha)\ldots F(\beta^{\lambda-1}\alpha)$ $\equiv \alpha^{-\lambda m} p^{\frac{\lambda-1}{2}} F(\alpha^\lambda)$, und für gerade λ $F(\alpha)F(\beta\alpha)F(\beta^2\alpha)\ldots$ $F(\beta^{\lambda-1}\alpha) = (-1)^{\frac{(p-1)(\lambda-2)}{8}} p^{\frac{\lambda-2}{2}} F(-1)F(\alpha^\lambda)$ ist, worin stets $F(-1) = \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$. „Die Formeln scheinen darauf hinzudeuten, daß, wie die Funktionen ψ im Zusammenhange mit den Binomialkoeffizienten oder den Eulerschen Integralen 1. Gattung stehen, zwischen den Funktionen F und den Eulerschen Integralen 2. Gattung eine ähnliche Beziehung stattfinden muß, in der Art, daß $-\frac{1}{\Pi(n)}$ der Funktion $F(r^{-n})$ entspricht. Aber ich habe lange diese Beziehung vergeblich gesucht, bis ich sie in folgendem Satze fand: In dem Ausdrucke von $F(\alpha)$ setze man für jeden Exponenten g^μ den ihm in bezug auf p kongruenten kleinsten positiven Rest g_μ, wodurch $F(x, \alpha) = x + \alpha x^{g_1} + \alpha^2 x^{g_2} + \cdots + \alpha^{p-2} x^{g_{p-2}}$ wird. Es seien ferner x und α nicht Wurzeln der Einheit, sondern x eine unbestimmte Variable und α eine Zahl $\equiv g^{p-1-m}$ mod p. Setzt man $x = 1 + y$ und bezeichnet mit Y_n die Entwicklung von $[\log(1+y)]^n$, wenn man die y^{p-1} übersteigenden Potenzen von y fortwirft, so wird für die verschiedenen Zahlen α, welche man für die verschiedenen Werte von m erhält, $F(1+y, \alpha) \equiv -\frac{Y_m}{\Pi(m)}$ mod. p, wo die Kongruenz für ein unbestimmtes y in bezug auf die einzelnen Koeffizienten der Potenzen von y stattfindet. Dies ist die gesuchte Beziehung, aus welcher durch Multiplikation zweier Funktionen F die obige zwischen den Funktionen ψ und den Binomialkoeffizienten folgt."

Nachdem er noch einen neuen Ausdruck für die wahre Form der Wurzeln der Gleichung $x^p = 1$ mittels der ψ-Funktionen angegeben, zu dessen Bestätigung Rosenhain in einer Preisschrift die Gleichungen $x^p = 1$ für alle Primzahlen p bis 103 aufgelöst hat, spricht er das folgende Theorem, „einen der

für die Zahlentheorie fruchtbarsten Sätze", aus: „Seien die Zahlen $m, m', m'', \ldots$ positiv und kleiner als $p-1$, werden sodann durch $m_i, m_i', m_i'', \ldots$ die kleinsten positiven Reste bezeichnet, welche $im, im', im'', \ldots$ durch $p-1$ dividiert ergeben, und sei $m_i + m_i' + m_i'' + \cdots = n_i(p-1) + s_i$, wo s_i ebenfalls positiv und kleiner als $p-1$, ist endlich ν die kleinste unter den Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_{p-1}$ und setzt man

$$F(r^{-m})F(r^{-m'})F(r^{-m''})\cdots = \chi(r)F(r^{-s}),$$

so werden die ganzzahligen Koeffizienten in $\chi(r)$ alle durch p^ν teilbar und durch keine höhere Potenz von p; setzt man ferner $\chi(r) = p^\nu \chi'(r)$ und in $\chi'(r)$ für r die primitive Wurzel g, so wird $\chi'(g) \equiv \pm \frac{\Pi(s)}{\Pi(m)\Pi(m')\ldots}$ (mod. p).... Diese Theoreme bilden gewissermaßen ein Verbindungsglied zwischen den beiden Hauptteilen der höheren Arithmetik, der Kreisteilung und der Theorie der quadratischen Formen."

Das Bestreben Jacobis, diese Sätze noch zu verallgemeinern, war die Veranlassung, daß er zunächst, leider für immer, die Fortführung seiner schon 20 Bogen starken Ausarbeitung, von der sich in seinem Nachlasse nichts vorfindet, aufgegeben und sich mit diesem kurzen Berichte an die Akademie begnügte. „Die hauptsächlichste Anwendung der Kreisteilung habe ich auf die Theorie der kubischen und biquadratischen Reste gemacht, und mit großer Leichtigkeit und Einfachheit den schönen Gaussschen Satz in seiner 2. Abhandlung über die biquadratischen Reste, dessen bisher noch nicht bekannt gemachten Beweis derselbe als ein mysterium maxime reconditum bezeichnet, wahrscheinlich auf ganz verschiedenem Wege abgeleitet. Die höchste Einfachheit hat der Reziprozitätssatz für kubische Reste, dessen Beweis sich fast mit einem Striche aus den bekannten Formeln der Kreisteilung findet. Sind nämlich $\frac{L + M\sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{L' + M'\sqrt{-3}}{2}$, wo M und M' durch drei aufgehen, zwei

komplexePrimzahlen, und bezeichnet man durch $\left(\frac{x+y\sqrt{-3}}{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}\right)$ diejenige der Größen 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, welche in bezug auf den Modul $\frac{L+M\sqrt{-3}}{2}$ der Potenz $(x+y\sqrt{-3})^{\frac{\frac{1}{4}(L^2+3M^2)-1}{3}}$ kongruent ist, so wird geradezu $\left(\frac{\frac{1}{2}(L'+M'\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}\right)=\left(\frac{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L'+M'\sqrt{-3})}\right)$."

Nachdem er noch in bekannter Weise das Legendresche Zeichen verallgemeinert und die Entwicklung des Reziprozitätsgesetzes für achte und fünfte Potenzreste in Aussicht gestellt, geht er zu einer seiner frühesten Anwendungen der Kreisteilung, zur zyklometrischen Auflösung der Pellschen Aufgabe über und entnimmt aus einer Nachschrift einer von ihm vor mehreren Jahren gehaltenen Vorlesung unter anderen Sätzen den folgenden: sei p eine Primzahl von der Form $4n+1$, und bezeichnet man mit a ihre quadratischen Reste zwischen 0 und $\frac{1}{2}p$, so wird $\sqrt{p}(\sqrt{p}.y+x) = 2^{\frac{p+1}{2}}\prod \sin^2\frac{a\pi}{p}$, wo $x^2-py^2=-4$, u. a. m.

Die Fülle der Entdeckungen, die ihm zuströmen, läßt ihn immer mehr zur Erkenntnis kommen, daß er zunächst zu einer zusammenhängenden Bearbeitung all der auf den verschiedensten mathematischen Gebieten gewonnenen Resultate keine Zeit finden wird, und er schickt deshalb wenigstens eine kurze Skizzierung seiner in der Mechanik gewonnenen Theoreme, die wir bereits aus den von ihm gemachten Aufzeichnungen kennen gelernt haben, in einer „Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique" an die Pariser Akademie. „Tout en composant un mémoire étendu relatif à ces recherches, j'ai été entraîné par des questions sur la théorie des nombres, laquelle a toujours été un objet de prédilection pour un grand nombre de géomètres, et ce ne sera qu'après avoir publié les résultats

obtenus dans cette matière, que je reviendrai à mon travail sur la dynamique", und gibt zunächst seine bekannte Darstellung des Prinzips der kleinsten Wirkung, welche auf der Elimination des Zeitelements mittels des Prinzips der lebendigen Kraft beruht. „Je crois, que l'on doit regarder le principe de la moindre action comme l'un des plus importants de la mécanique. En effet, on voit dans un mémoire des Miscellanea Taurinensia, ouvrage immortel et supérieur à tout éloge, Lagrange jeune faire ressortir d'un seul jet de ce principe la mécanique analytique toute faite. Celui des vitesses virtuelles n'a été appelé qu'après coup pour les démonstrations méthodiques dans des travaux postérieurs. Pourquoi donc la mécanique analytique, fille ingrate, a-t-elle voulu accuser le principe de la moindre action comme inutile? Si les travaux de M. Hamilton, et les recherches dont j'ai parlé ci-dessus, ajoutent essentiellement à la mécanique analytique, c'est encore à ce principe qu'on en sera redevable." Nach Einführung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung bespricht er die von ihm früher hierbei gemachten fundamentalen Entdeckungen und fügt hinzu: „Supposons que le mouvement éprouve des perturbations et que les équations différentielles du mouvement troublé deviennent $m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \cdots$; si, par les formules du mouvement primitif, on exprime la fonction Ω par t et les $6n$ constantes arbitraires, les differentielles de celles-ci dans le mouvement troublé seront $\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1}, \cdots \frac{d\alpha_{3n-1}}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_{3n-1}}$, $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau}$, $\frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1}, \cdots \frac{d\beta_{3n-1}}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{3n-1}}$, $\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial h}$."

Unaufhörlich geht die gewaltige, seine Gesundheit allmählich untergrabende Arbeit die Herbstferien hindurch vor sich, er kann sich von den verschiedenartigen Problemen nicht losreißen und arbeitet an allen zu gleicher Zeit. Am 31. Oktober 1837 schreibt er an seinen Vetter Schwinck, der sich mit mathematischen Fragen an ihn wendet: „Ich

bin sehr unglücklich, daß mich jetzt der Teufel plagt, daß ich wie unsinnig nicht von der Zahlentheorie loskomme, indem ich nämlich endlich, was ich darin seit elf Jahren gepfuscht, zusammenschreiben muß. Ich bin darin so versessen und vielleicht noch für den ganzen Winter, daß es mir unmöglich ist, auch nur den kleinsten andern Gedanken zu haben, und wer weiß, wenn ich jetzt diese göttliche Gelegenheit vorübergehen lasse, welches Schicksal in der nächsten Zeit zwischen uns die Störungen störend treibt. Ich will dann auch die Zahlen schmieden, daß sie die Schuhe verlieren ... Ich kann Ihnen nur den Rath geben, wenn Sie mit dem Gauss fertig sind, ihn wieder von vorn anzufangen. Das mit der Methode der kleinsten Quadrate hat er selbst später aufgegeben; doch ist es für die andern noch gut genug; z. B. Bessel trägt noch immer danach vor."

In dieser Lage bleibt nun Jacobi nichts übrig, als seine weiteren Entdeckungen in der Mechanik und der Theorie der Differentialgleichungen in seinen Vorlesungen niederzulegen, und er kündigt deshalb für den Winter 1837/38 außer dem Seminar eine Vorlesung über Variationsrechnung und eine solche über Mechanik an; von beiden besitzen wir Nachschriften von Rosenhain, dem damals erst 20jährigen, aber schon mit selbständigen Untersuchungen beschäftigten ausgezeichneten Schüler Jacobis.

„In der Geschichte der Mathematik", beginnt Jacobi seine Vorlesung über Variationsrechnung, „und vermutlich auch bei dem Entwicklungsgange aller anderen Wissenschaften trifft es sich oft, daß bei der ersten Entdeckung einer neuen Disziplin kühne und starke Geister in einem einzelnen Punkte weit über ihre Zeit hinaus vorwärts dringen und Fortschritte machen, die erst von ihren Nachkommen verstanden und benutzt werden. Diesem Umstande verdankt auch die Variationsrechnung ihre Entstehung ... Die rasche Förderung dieses Zweiges der Mathematik wurde

durch zwei zufällige Umstände bewirkt; einmal durch die Eifersucht und den Wettstreit der englischen und deutschen Mathematiker, die den Streit der Engländer und Franzosen abgelöst hatte, welcher von der Restauration der Wissenschaften an das ganze 17. Jahrhundert hindurch geführt wurde; der andere zufällige Umstand, der noch mehr auf die Ausbildung der Variationsrechnung einwirkte, war der Wettstreit der beiden Brüder Jacob und Johann Bernoulli ..." Jacobi hebt nun zunächst bei der Definition der Variationsprobleme die Schwierigkeit der Untersuchung der 2. Variation hervor und fügt hinzu: „es ist mir nicht bekannt, daß schon irgend jemand daran gedacht hätte, die 2. Variation von Doppelintegralen zu untersuchen, auch habe ich trotz vieler Mühe nur erkannt, daß der Gegenstand zu den allerschwierigsten gehört."

Mit Zugrundelegung der berühmten Lagrangeschen Arbeit, „in welcher die Gedanken wie Blitze mit der größten Schnelle und der größten Kürze aufeinander folgen", geht er von der Entwicklung der 1. Variation des Integrales $\int_a^b f dx$ aus, worin f die Variable x, von dieser abhängige unbekannte Funktionen und deren Differentialquotienten bis zu irgendwelcher Ordnung hin enthält, betrachtet aber auch zugleich den Fall, daß x von einer Variabeln t abhängt, und knüpft daran mannigfache Betrachtungen über die Bildung der Differentialquotienten impliziter Funktionen, die Entwicklung der Lagrangeschen Reihe zur Auflösung der Gleichungen u. a. m. Überall sind bei der Entwicklung der 1. Variation des Integrales die verschiedenen Methoden von Euler, Lagrange u. a. auseinandergesetzt; es werden nun Bedingungsgleichungen zwischen den unbekannten Funktionen $u, v, w, \ldots$ eingeführt, und das Prinzip der Lagrangeschen Multiplikatoren erläutert, die Verschiedenheit der variablen Multiplikatoren für den Fall, daß Bedingungsgleichungen zwischen den unbekannten Funktionen gegeben

sind, und der konstanten für die isoperimetrischen Probleme hervorgehoben. Von der Bemerkung ausgehend, daß unter allen Kurven von gegebenem Umfange der Kreis den größten Inhalt hat, daß der Kreis aber auch die andere Bedingung erfüllt, daß er bei dem kleinsten Umfange einen gegebenen Inhalt einschließt, wird er auf das Reziprozitätsgesetz geführt, daß, wenn die 1. Variation von $\int f dx$ verschwinden soll, und man unter Zugrundelegung der Bedingung $\int f_1 dx = a_1$, $\int f_2 dx = a_2$, ... den Wert desselben gleich a gefunden hat, man genau auf dieselbe Lösung kommen wird, welches immer von den Integralen $\int f dx = a$, $\int f_1 dx = a_1$, $\int f_2 dx = a_2$, ... man als dasjenige ansieht, dessen 1. Variation verschwinden soll, während die übrigen gegebene Werte erhalten. Die allgemeinere Aufgabe, die Variation von V verschwinden zu lassen, wenn eine Gleichung gegeben ist zwischen x, V, den Differentialquotienten von V und den unbekannten Funktionen u, v, w, ... und deren Differentialquotienten behandelt Jacobi mit Hilfe einer Kombination des Eulerschen Verfahrens und der Lagrangeschen Methode der Variation der Konstanten und geht dabei ausführlicher auf die Integration linearer Differentialgleichungen ein. „Man kann zur Variationsrechnung einen ganz neuen Teil hinzufügen; bis jetzt bestand ihr ganzes Geschäft darin, die Differentialgleichungen aufzustellen und zu integrieren, der Teil, den man noch hinzufügen kann, besteht in der Untersuchung dessen, was alle diese Differentialgleichungen Eigentümliches haben. Hamilton behandelt ein Integral, welches unter dem Integralzeichen nur die ersten Differentialquotienten der unbekannten Funktionen enthält; er zeigt, daß in diesem Falle die Integration der Differentialgleichungen zusammenhängt mit der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Seine Formen sind auch noch dadurch beschränkt, daß die unabhängige Variable x ebenfalls unter dem Integralzeichen nicht vorhanden ist. Doch

sind seine Untersuchungen leicht zu verallgemeinern; bei genauer Untersuchung zeigt sich, daß diese Methode auf alle Probleme der Variationsrechnung ausgedehnt werden kann, wenn man nur Funktionen einer Variabeln behandelt; bei Doppelintegralen scheint es sehr schwierig zu sein."

Nachdem er nun diese von ihm gemachte Entdeckung, die er in seinen Vorlesungen über Mechanik ausführlicher behandelt, ziemlich genau skizziert hat, geht er zur Behandlung der 2. Variation über und entwickelt zunächst nach den ihm eigentümlichen Methoden den Fall, daß unter dem Integral nur die erste Ableitung der unbekannten Funktion vorkommt nebst einer ausführlichen Kritik der Untersuchungen von Lagrange und Legendre; Jacobi beweist, daß, wenn man die Differentialgleichung integriert hat, welche das Verschwinden der 1. Variation bedingt, man auch die Differentialgleichung integrieren kann, welche die Kriterien für das Maximum und Minimum gibt, und er geht nun darauf ein, diese Kriterien selbst wirklich aufzustellen, jedoch in dieser Vorlesung immer nur für den Fall, daß die Ableitungen unter dem gegebenen Integral die 1. Ordnung nicht überschreiten. Die 47. Schlußvorlesung beschäftigt sich mit der Bildung der 1. Variation der Doppelintegrale und der Aufstellung der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen.

Zu gleicher Zeit hielt Jacobi aber auch eine ausführliche Vorlesung über Mechanik, die jedoch nicht zur Einführung in diese Disziplin bestimmt war, sondern die Transformation und Integration der Grundgleichungen der Dynamik zum Gegenstande haben sollte. Nach einer ganz kurzen Einleitung über die Darstellung der beschleunigenden Kräfte geht er zur Entwicklung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten, des d'Alembertschen Prinzips und der ersten Art der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen über; aus dem ersteren leitet er die drei Arten des Gleichgewichts her, wofür die Bewegung der Punkte,

wenn man nur die Impulse gehörig klein annimmt, kleiner als jede gegebene Größe wird, oder die Bewegung endlich wird, wie klein auch die Impulse sind, oder endlich bei einigen Impulsen die eine, bei anderen die andere Art der Bewegung eintritt; aus dem zweiten Prinzip folgert er das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft; über die Bedeutung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten für die Maschinenlehre, „soweit ich es bei einem mir unbekannten Gegenstande vermag, einen Begriff davon zu geben", macht er sodann eine Reihe sehr interessanter Bemerkungen. Es folgt der Übergang zur Transformation der Bewegungsgleichungen auf neue Variable und damit die Aufstellung der Lagrangeschen Gleichungen der zweiten Art, sowie eine ausführliche Behandlung des Falles, in welchem in der Kräftefunktion nur die ersten Potenzen der Koordinaten zu berücksichtigen sind, wobei er näher auf den Satz von der Realität der Lösungen der bekannten Gleichung eingeht, welche die Verallgemeinerung der kubischen Gleichung bei dem Hauptachsenproblem der Flächen 2. Grades darstellt. Er erörtert nun ausführlich das Problem der kleinen Schwingungen, berichtigt dabei einen schon früher in einem Briefe an Bessel erwähnten Irrtum von Lagrange, und entwickelt sodann als Beispiel für die Integration der Bewegungsgleichungen eine genaue Theorie des einfachen Pendels mit Benutzung der elliptischen Funktionen, um sich darauf zur Ausdehnung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten auf den Fall, wo die Bedingungen des Systems nur durch Ungleichheiten ausgedrückt werden können, zu wenden, und diese Erweiterung auf die Dynamik mittels des d'Alembertschen Prinzips zu übertragen; er gelangt zu dem Resultat, daß, wenn ein System den Bedingungen unterworfen wird, daß die beschränkenden Funktionen nicht negativ werden können, dann das Gesamtmoment der bewegenden Kräfte weniger dem Gesamtmoment der sollizitierenden immer positiv oder Null sein muß, wenn man die Lage des Systems

so ändert, daß den wirklichen physikalischen Bedingungen genügt wird. Sehr ausführlich behandelt Jacobi nun das Prinzip der kleinsten Wirkung, wieder mittels Elimination des Zeitelementes aus dem Prinzip der lebendigen Kraft, indem er schon hier, sowie in seiner späteren großen Vorlesung über Mechanik, auf den Unterschied der Maxima-Minima und der Grenzwerte eingeht. Nun vollzieht sich der Übergang zu dem totalen Differentialgleichungsystem von Hamilton und zu dessen partieller Differentialgleichung, welche Jacobi in der schon früher erwähnten Art auf den Fall erweitert, daß die Kräftefunktion auch die Zeit enthält. Naturgemäß wird er hierdurch zu einer Theorie der partiellen Differentialgleichungen überhaupt und zur Ausdehnung der Lagrangeschen Methode auf den Fall von vier Variabeln, sowie zur Behandlung des erst von ihm in seiner wahren Bedeutung erfaßten Poissonschen Satzes von der Erzeugung neuer Integrale aus zweien geführt. Die Vorlesung, welche 43 Stunden umfaßte, bildet, da es Jacobi an Zeit gebrach, kein abgeschlossenes Ganze und war, wie aus dem letzten Teile der Ausarbeitung ersichtlich, für die Zuhörer äußerst schwierig geworden.

Beim Schluß dieser Vorlesung schrieb er am 28. Februar 1838 an Bessel: „Ich habe mich, wie Sie wissen, mit den Grundgleichungen der Dynamik beschäftigt, versteht sich, ohne zu arbeiten, da Herbart und ich nie arbeiten. Ich bin hierbei auf folgendes fabelhafte Theorem gekommen, welches ich Ihnen großmüthiger als Herr B. ohne Entrée präsentiren will: Wenn in einem Problem der Mechanik der Satz von der lebendigen Kraft gilt, und man kennt irgend zwei Integrale außerdem, so kann man daraus immer nach einer festen Regel durch bloßes Differentiiren ein drittes ableiten, z. B. aus den beiden Flächensätzen den dritten . . .“

Während dieser Wintervorlesung über Mechanik und Variationsrechnung machte er wieder eine Reihe von umfang-

reichen Aufzeichnungen, welche Teile seines großangelegten Werkes über partielle Differentialgleichungen bilden sollten und die später von Clebsch herausgegeben wurden. In der ersten derselben, welche wahrscheinlich im Sommar 1838 verfaßt wurde und den Titel trägt „Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi" stellt er zunächst, wie in einer schon früher besprochenen Aufzeichnung, unter der Annahme, daß die partielle Differentialgleichung $(q_1, \ldots q_m, p_1, \ldots p_m, V) = 0$ durch Einführung einer neuen Variabeln t mittels der Gleichung $W = t \cdot V$ in eine andere übergeführt ist, welche die abhängige Variable gar nicht enthält, das Integrationsproblem in der Form, daß, wenn eine Gleichung zwischen den Größen $q_1, \ldots q_m, p_1, \ldots p_m$ gegeben ist, $m-1$ andere Gleichungen zwischen denselben Größen zu finden sind, aus denen $p_1, \ldots p_m$ als solche Funktionen von $q_1, \ldots q_m$ hervorgehen, daß $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_m dq_m$ ein vollständiges Differential wird. Nachdem er die hierdurch sich ergebenden Integrabilitätsbedingungen in dreierlei Form aufgestellt, beweist er das wichtige Theorem, daß, wenn $H_1, H_2, \ldots H_m$ voneinander unabhängige Funktionen der Variabeln $p_1, \ldots p_m, q_1, \ldots q_m$ sind, von denen je zwei beliebige H_i und $H_{i'}$ der Gleichung genügen $\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial q_m} - \frac{\partial H_i}{\partial q_1}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_1} - \cdots - \frac{\partial H_i}{\partial q_m}\frac{\partial H_{i'}}{\partial p_m} = 0$, und man aus den Gleichungen $H_1 = h_1, \ldots H_m = h_m$, worin $h_1, \ldots h_m$ willkürliche Konstanten sind, die in $H_1, \ldots H_m$ nicht vorkommen, die Größen $p_1, \ldots p_m$ durch $q_1, \ldots q_m$ ausdrückt, der Ausdruck $p_1 dq_1 + \cdots + p_m dq_m$ ein vollständiges Differential ist, das gestellte Problem somit auf die Lösung von $\frac{m(m-1)}{2}$ gleichzeitigen partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann.

Jacobi will nun hier nicht allgemein die Frage erörtern, wann und wie ein und dieselbe Funktion gleichzeitig meh-

reren partiellen Differentialgleichungen genügen kann; er beschränkt sich vielmehr darauf, das vorgelegte Problem mittels des Satzes zu erledigen, daß, wenn $\varkappa$ und λ verschieden von den Zahlen $1, 2, \ldots i$, und φ irgendein Integral der Differentialgleichung $0 = \frac{\partial f}{\partial q_\varkappa} + \frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_m} \frac{\partial f}{\partial p_m} - \frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_m} \frac{\partial f}{\partial q_m}$ ist, dann auch, wenn $p_\varkappa$ und p_λ Funktionen von $q_\varkappa, q_\lambda, q_{i+1}, \ldots q_m, p_{i+1}, \ldots p_m$ sind, welche der Gleichung $\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_\varkappa} = \frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_m} \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m} - \frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_m} \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m}$ genügen, die Funktion $f = \frac{\partial \varphi}{\partial q_\lambda} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{i+1}} + \cdots + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q_m} \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial q_{i+1}} - \cdots - \frac{\partial p_\lambda}{\partial p_m} \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}$ ein Integral jener Differentialgleichung ist. Auf dieses Theorem gründet er nun seine Methode der sukzessiven Integration; stellt man zuerst das gewöhnliche Differentialgleichungssystem auf $\frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_2}, \ldots \frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m}, \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_2}, \ldots \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m}$, worin p_1 vermöge der vorgelegten partiellen Differentialgleichung als Funktion von $p_2, \ldots p_m, q_1, \ldots q_m$ gegeben ist, und sei $f_1 = a_1$ ein Integral, bestimmt hieraus p_2 als Funktion der Größen $p_3, \ldots p_m, q_1, \ldots q_m$, also auch p_1 als Funktion derselben Größen, bildet sodann das System $\frac{dp_3}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_3}, \ldots \frac{dp_m}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_m}, \frac{dq_3}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_3}, \ldots \frac{dq_m}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_m}$, und aus einem Integrale φ desselben nach dem obigen Theorem eine Reihe weiterer Integrale $\varphi', \varphi'', \ldots$, bis man nach einer endlichen Anzahl von Operationen zu einer Integralgleichung $f_2 = a_2$ gelangt, welche den beiden ersten simultanen partiellen Differentialgleichungen genügt, drückt aus $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$ die Größen p_1, p_2, p_3 durch $p_4, p_5, \ldots p_m, q_1, \ldots q_m$

aus, usw., bis man $p_1, p_2, \ldots p_m$ durch $q_1, q_2, \ldots q_m$ dargestellt erhält, so wird $p_1 dq_1 + \cdots + p_m dq_m$ ein vollständiges Differential sein.

Zum Beweise des zugrunde gelegten Hilfsatzes leitet Jacobi nach Einführung des Symbols $A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = A[\varphi]$ das Theorem her, daß, wenn für jeden Wert von i $0 = A_1 \frac{\partial B_i}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial B_i}{\partial x_n} - B_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} - \cdots - B_n \frac{\partial A_i}{\partial x_n}$ und $0 = A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = A[f]$ ist, auch $AB^{(m)}[f] = 0$ sein wird, und zwischen $f, B[f], B^2[f], \ldots B^{n-1}[f]$ eine oder mehrere Gleichungen existieren, welche $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht enthalten; daß ferner, wenn R und S beliebige Funktionen von $q_1, \ldots q_m, p_1, \ldots p_m$ sind und $[R, S] = \frac{\partial R}{\partial q_1}\frac{\partial S}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial R}{\partial q_m}\frac{\partial S}{\partial p_m} - \frac{\partial R}{\partial p_1}\frac{\partial S}{\partial q_1} - \cdots - \frac{\partial R}{\partial p_m}\frac{\partial S}{\partial q_m}$, $[\varphi, \psi] = F$, $[\psi, f] = \Phi$, $[f, \varphi] = \Psi$ gesetzt wird, die Beziehung besteht $[F, f] + [\Phi, \varphi] + [\Psi, \psi] = 0$ „gravissimum theorema", woraus unmittelbar folgt, daß, wenn $\varphi = \text{cst.}$, $\psi = \text{cst.}$ zwei beliebige Integrale der Gleichungen $dp_1 : dp_2 : \cdots : dp_m : dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_m = \frac{\partial f}{\partial q_1} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial q_m} : -\frac{\partial f}{\partial p_1} : \cdots - \frac{\partial f}{\partial p_m}$ sind, die Gleichung $[\varphi, \psi] = \text{cst.}$ wiederum ein Integral dieses gewöhnlichen Differentialgleichungsystems sein wird. „Inquirens autem in conditiones possibilitatis ejusmodi integrationis simultaneae quum ad hoc Theorema fundamentale delapsus essem, ingenue fateor, theorema illud me per aliquod tempus pro invento plane novo habuisse. Quid enim magis mirum fingi potest ac paene fidem superans, quam quod inde sequitur et mox videbimus, in omnibus problematis mechanicis, in quibus virium vivarum conservatio locum habet, generaliter e duobus integralibus praeter principium illud inventis reliqua omnia absque ulla ulteriore integratione inveniri posse?" Poisson hatte den Satz an sich schon im Jahre 1809 veröffentlicht und Lagrange dieses

Theorem für die Störungstheorie verwendet. „Videmus ipsum summum magistrum ne suspicatum quidem esse, quid sit id, quod re vera theorema singulare reddat. Habemus hic praeclarum exemplum, nisi animo praeformata sint problemata, fieri posse, ut vel ante oculos posita gravissima inventa non videamus.“

Mit Hilfe dieser Symbole beweist nun Jacobi den oben erwähnten Hilfsatz, aus dem er die Integrale des simultanen partiellen Differentialgleichungssystems $[H_i, H_\varkappa] = 0$ herleitet, und folgert daraus von neuem den Satz, daß, wenn V ein Integral der partiellen Differentialgleichung $f(q_1, \ldots q_m, p_1, \ldots p_m) = a$ ist, welches aus der Gleichung $V = \int (p_1 dq_1 + \cdots + p_m dq_m)$ gefunden wird, in welcher $p_1, \ldots p_m$ mit Hilfe der oben aufgestellten Beziehungen $f = a$, $f_1 = a_1$, $\ldots f_{m-1} = a_{m-1}$ durch $q_1, \ldots q_m$ ausgedrückt sind, man die Integrale des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$ in der Form darstellen kann $\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m$, $\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \ldots \frac{\partial V}{\partial a_{m-1}} = b_{m-1}$, $\frac{\partial V}{\partial a} = t + b$, worin die a und b willkürliche Konstanten sind. In Anwendung auf die Hamiltonschen dynamischen Differentialgleichungen wird gezeigt, daß, wenn man aus zwei Integralen der dynamischen Differentialgleichungen ein drittes durch das Symbol $[\varphi, \psi]$ herleitet, dieses Integral in keiner Weise von der Wahl der Variabeln q_i, sondern nur von der wahren Natur der Funktionen φ und ψ abhängt; aus der Deutung des Poissonschen Satzes ergibt sich wieder, daß der 3. Flächensatz eine Folge der beiden andern ist, und zugleich wird geschlossen, daß, wenn für ein mechanisches Problem das Prinzip der lebendigen Kraft sowie die Flächenprinzipien gelten und die Lage des Systems durch drei Größen bestimmt ist, dasselbe auf Quadraturen zurückgeführt werden kann.

Jacobi geht sodann zur Entwicklung der einfachsten

Störungsformeln über, welche aus dem Hamiltonschen Differentialgleichungssystem erhalten werden, und dehnt diese Formeln sowie den Poissonschen Satz auf den Fall aus, daß die Funktion $H = T - U$, welche er die Hamiltonsche Funktion nennt, auch die Größe t enthält. Für diesen Fall wird auch eine Kombination des Prinzips der Erhaltung der lebendigen Kraft und des Flächenprinzips untersucht, welche in gewissen Fällen gültig bleibt, wiewohl die Kräftefunktion die Zeit explizite enthält, also diese beiden Prinzipien einzeln nicht gelten. Wenn nun die Kräftefunktion die Zeit nicht explizite einschließt, so wird das Differentialgleichungssystem $2m$. Ordnung $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, auf die Form gebracht $dq_1 : \cdots : dq_m : dp_1 : \cdots dp_m = \frac{\partial H}{\partial p_1} : \cdots : -\frac{\partial H}{\partial q_1} \cdots$, $2m - 1$. Ordnung sein und somit durch das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft die Ordnung um zwei Einheiten erniedrigt werden; die gleiche Erniedrigung der Ordnung erfolgt durch ein Flächenprinzip, jedoch nicht durch jedes Integral, Sätze, die er bereits in seinen Briefen, Aufzeichnungen und Vorlesungen ausgesprochen hatte.

Seinen Satz von den Differentialgleichungen der Störungselemente basiert er nun auf ein allgemeines Transformationstheorem des Hamiltonschen kanonischen Systems in ein anderes kanonisches, nach welchem, wenn das System vorgelegt ist $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_i}$, und eine willkürliche Funktion V der Größen $t, q_1, \ldots q_m$ und neuer Variabeln $a_1, a_2, \ldots a_m$ gebildet wird, ferner aus den Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i$, $\frac{\partial V}{\partial a_i} = -b_i$ die Variabeln $q_1, \ldots q_m, p_1, \ldots p_m$ durch t und die neuen Variabeln $a_1, \ldots a_m, b_1, \ldots b_m$ ausgedrückt werden, der Ausdruck $f_1 + \frac{\partial V}{\partial t} = \varphi(t, a_1, \ldots a_m, b_1, \ldots b_m)$ für diese Variabeln das kanonische System liefert $\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial b_i}$, $\frac{db_i}{dt}$

$= -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i}$. Zur Anwendung seiner Theorie geht er auf das Problem der Bewegung eines von einem und zwei festen Zentren angezogenen Punktes und von der Rotation eines von keinen Kräften sollizitierten, um einen festen Punkt rotierenden Körpers näher ein, entwickelt zugleich die Differentialausdrücke der gestörten Elemente für beide Probleme, und beweist den Satz, daß, wenn ein Integral der Differentialgleichung 2. Ordnung der geodätischen Linie gefunden ist, die Bestimmung dieser Linie stets auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Der Behandlung von $\delta\int(T+U)dt=0$ analog, wird noch für die isoperimetrischen Probleme $\delta\int\varphi(t, q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2', \ldots q_m')dt = 0$ allgemein gezeigt, daß, wenn mit Hilfe der Gleichungen $\frac{\partial \varphi}{\partial q_i'} = p_i$ der Ausdruck $H = q_1'\frac{\partial \varphi}{\partial q_1'} + \cdots + q_m'\frac{\partial \varphi}{\partial q_m'} - \varphi$ als Funktion der q und p dargestellt wird, die Lösung des Problems von dem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ abhängt, wozu es wiederum genügt, die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$ zu kennen.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung der von Lagrange und Poisson gegebenen Störungsformeln, wonach, wenn $q_1, \ldots q_m, p_1, \ldots p_m$ beliebige voneinander unabhängige Funktionen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$, also auch letztere ebensolche Funktionen der ersteren sind, mit Benutzung der Symbole $(\alpha_i, \alpha_\varkappa) = \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_\varkappa}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} + \cdots - \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_\varkappa} - \cdots$, $[\alpha_i, \alpha_\varkappa] = \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_1}\frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial p_1} + \cdots - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_1}\frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial q_1} - \cdots$ aus dem Systeme der $2m$ linearen Gleichungen $v_\varrho = (\alpha_\varrho, \alpha_1)u_1 + \cdots + (\alpha_\varrho, \alpha_{2m})u_{2m}$ sich durch Auflösung derselben die Werte $u_\varrho = [\alpha_\varrho, \alpha_1]v_1 + \cdots [\alpha_\varrho, \alpha_{2m}]v_{2m}$ ergeben.

Ein unangenehmer Zwischenfall hatte die Königsberger

Professoren und unter diesen besonders Jacobi noch am Ende dieses Jahres in große Aufregung versetzt. Als die sieben Göttinger Professoren im Jahre 1837 ihrer Ämter entsetzt wurden, beschloß noch in demselben Jahre die philosophische Fakultät in Königsberg auf Anregung von Lobeck dem Juristen Albrecht, im folgenden Jahre die medizinische Fakultät Wilhelm Weber die Doktorwürde honoris causa zu verleihen; das Ministerium sah jedoch hierin „ein ganz unberufenes und ungehöriges Urtheil über Acte einer fremden Regierung, welches die ernstlichste Rüge verdient“, und auch der Kronprinz Friedrich Wilhelm, als Rektor der Albertina, gab in einem Schreiben an Prorektor und Senat sein großes Mißfallen über diese Beschlußnahme zu erkennen. Der Mitglieder beider Fakultäten bemächtigte sich nun infolgedessen eine große Erregung, die aus Briefen Jacobis an Neumann und Bessel unverkennbar hervortritt, und es erfolgte gemeinsam von der philosophischen und medizinischen Fakultät eine würdige und auf ihre bisherige öffentliche Wirksamkeit — „da auch der Jüngste von uns bereits im 10. Jahre seines akademischen Lehramtes steht“ — hinweisende Erklärung. Erst mit der vom 3. März 1838 datierten Antwort des Kronprinzen — „Mit herzlicher Freude habe ich Ihr Schreiben vom 27. v. M. empfangen, weil ich in der Art, wie Sie meinen Tadel aufgenommen, so ganz die ehrenwerthe Gesinnung erkenne, welche die Albertina seit jeher ausgezeichnet hat. Ich werde auch gern jede Gelegenheit wahrnehmen, Ihnen Beweise meiner Achtung und meines aufrichtigen Wohlwollens zu geben“ — trat Beruhigung der Gemüter ein, und auch Jacobi gewann nach kurzer Unterbrechung wieder die zu seinen großen Arbeiten nötige Ruhe.

Von der Regierung durch den Roten Adlerorden 4. Klasse ausgezeichnet und am 22. März 1838 von der Berliner Akademie durch Bewilligung von 500 Talern zur Herausgabe von Tafeln für die Primzahlen-Reste, „einem

Unternehmen von großem wissenschaftlichen Werthe", sehr erfreut, genoß er im Sommer wenigstens in seiner pädagogischen Tätigkeit eine kleine Erleichterung, da er außer dem mathematischen Seminar nur eine Vorlesung über die Anfangsgründe der analytischen Geometrie angekündigt hatte.

Aber seine wissenschaftlichen Arbeiten überwältigten ihn immer mehr, nicht sowohl durch ihre Schwierigkeit als durch Umfang und Ausdehnung; „was mich selbst betrifft", schreibt er am 9. Juni seinem Bruder, „so bin ich jetzt in einer unglücklichen Periode, mehrere größere Arbeiten $^3/_4$ druckfertig zu machen und dann zu ihrer gänzlichen Beendigung die Geduld zu verlieren; vielleicht kommt wieder einmal eine Periode, in welcher ich grade umgekehrt alles beendige."

Auch für den Winter hatte Jacobi nur zwei elementare Vorlesungen über die Theorie der Oberflächen und über Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der Reihen angekündigt, um sich ungestört ganz der Fortführung seiner mathematischen Arbeiten widmen zu können; vom 21. November 1838 ist seine Arbeit „Neues Theorem der analytischen Mechanik" betitelt.

Im Anschluß an eine Arbeit von Encke „über die speziellen Störungen" bemerkt Jacobi: „Ich habe das Beispiel der elliptischen Bewegung eines Himmelskörpers gewählt, weil in diesem das Theorem durch die bekannten Formeln ohne Schwierigkeit verifiziert werden kann. Aber es ist das für dieses Beispiel aufgestellte Theorem nur ein besonderer Fall eines allgemeinen, für welches die Kräftefunktion auch die Zeit enthalten darf." Finden zwischen den n Punkten eines Systems irgendwelche Verbindungen statt, welche durch $3n - m$ Bedingungsgleichungen gegeben sind, so daß man die Position der Punkte immer durch m voneinander unabhängige Größen $q_1, \ldots q_m$ bestimmen kann, drückt man sodann die lebendige Kraft T

durch $q_1, \ldots q_m, q_1', \ldots q_m'$ aus, und setzt $\frac{\partial T}{\partial q'_r} = p_r$, so finden, wenn man die Anfangswerte der q_i und p_i mit q_i^0, p_i^0 bezeichnet, stets die Beziehungen statt $\frac{\partial q_i}{\partial q_\varkappa^{(0)}} = -\frac{\partial p_\varkappa^{(0)}}{\partial p_i}$, $\frac{\partial p_i}{\partial q_\varkappa^0} = \frac{\partial p_\varkappa^0}{\partial q_i}$, $\frac{\partial q_i}{\partial p_\varkappa^0} = \frac{\partial q_\varkappa^0}{\partial p_i}$, $\frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa^0} = -\frac{\partial q_\varkappa^0}{\partial q_i}$, worin jeder der beiden Indices i und $\varkappa$ alle Werte $1, 2, \ldots m$ annehmen kann, und die partiellen Differentialquotienten links vom Gleichheitszeichen voraussetzen, daß man in die Integralgleichungen des Problems die Größen q_i^0 und p_i^0 als die willkürlichen Konstanten eingeführt und diese Gleichungen dann nach den Größen q_i und p_i aufgelöst hat, während für die rechtsstehenden partiellen Differentialquotienten die Integralgleichungen nach den Größen q_i^0 und p_i^0 aufzulösen sind; die letzteren Ausdrücke erhält man aus den ersteren, wenn man q_i und q_i^0, p_i und p_i^0 miteinander vertauscht und $-t$ statt t setzt. Für jedes so beschaffene System von Elementen nehmen die Störungsformeln eine möglichst einfache Gestalt an, indem der Differentialquotient jedes gestörten Elementes, genommen nach der Zeit, einem einzigen partiellen Differentialquotienten der Störungsfunktion gleich wird, dessen Koeffizient nur $+1$ oder -1 ist.

Es war für Jacobi ein Ausruhen von seinen weitgreifenden und ermüdenden Untersuchungen, als er in den Weihnachtstagen sich mit schon früher in Angriff genommenen Problemen, die ihn wieder zu den elliptischen und Abelschen Transzendenten zurückführten, beschäftigte. Am 28. Dezember 1838 schrieb er an Bessel: „Ich habe gestern die geodätische Linie für ein Ellipsoid mit drei ungleichen Axen auf Quadraturen zurückgeführt. Es sind die einfachsten Formeln von der Welt, Abel'sche Integrale, die sich in die bekannten elliptischen verwandeln, wenn man zwei Axen gleich setzt", und Bessel, welcher sich früher vielfach mit diesem Problem beschäftigt hatte, teilt dies sogleich am

4. Januar 1839 Gauss mit: „Jacobi hat mir in diesen Tagen gesagt, daß er im Besitze der Gleichung der geodätischen Linie auf einem elliptischen Sphaeroide von drei verschiedenen Axen ist. Die Form ist so, daß sie sich, wenn zwei der Axen gleichgesetzt werden, unmittelbar auf die Gleichung der geodätischen Linie auf dem Rotationssphaeroid reducirt."

Aber auch diese Arbeit konnte Jacobi infolge geistiger Übermüdung im Winter nicht mehr druckfertig machen, nur noch der wissenschaftliche Kontakt mit Bessel blieb in dieser Zeit schwerster Überlastung unberührt, und Fragen der verschiedensten Art, besonders bezüglich der Konvergenz der Fourierschen Reihen, gaben interessante Gegenstände für das wissenschaftliche Gespräch und den steten kurzen Briefwechsel; Bessel sendet Jacobi seine Arbeiten vor dem Druck zur Durchsicht, und Jacobi beantwortet dessen Fragen und Bedenken meist umgehend. „Da ich in Beweisen von der Art des vorliegenden", schreibt Jacobi am 9. Januar 1839 an Bessel, „nicht die geringste Übung habe, so habe ich hier das Verhalten des Pfuschers dem Meister gegenüber. Ich kenne nur drei, denen ich es auf ihr Wort glaube, sie haben etwas bewiesen: Gauss, der in der neuen Zeit diese langweilige Strenge erfunden zu haben scheint, Dirichlet und der verstorbene Abel, und diese würde ich nur als Meisterrichter ansehen. Nur um Ihren Befehlen zu gehorchen, erlaube ich mir gegen die Evidenz der Darstellung im § 4 etwas zu moniren..." Aber schon am 7. Februar kommt Bessel mit einem ähnlichen Anliegen und schreibt ihm: „Da es doch nicht angeht, daß meine mathematischen Pfuschereien sich eher einem Anderen als dem Meister zeigen (ein anderes ist Pfuscherarbeit, ein anderes Meisterarbeit), so plage ich Sie, lieber Meister, noch einmal mit der Entwicklung der cos.- und sin.-Reihen. Die Geschichte ist so unendlich einfach, daß es mich ärgert, soviel Worte darüber haben machen zu müssen ... und nun bitte

ich Gott, daß er mich nie wieder zu mathematischen Pfuschereien kommen lasse, sondern mir einen Ekel an allem, was nicht Astronomie ist, beibringe. Diesmal hat Fourier die Schuld."

Die Folgen der ungeheuren geistigen Anstrengung blieben nicht aus; Kopfschmerzen und nervöse Zustände machten jede weitere Tätigkeit unmöglich, und Jacobi wurde gezwungen, zum Zwecke einer Badekur für den Sommer Urlaub zu nehmen. Er reist zunächst Ende März auf einige Wochen zu seiner Mutter nach Potsdam, von wo aus er seine Freunde in Berlin häufig aufsucht; er wird sogleich von Alexander von Humboldt überaus freundlich aufgenommen, und dieser zeigt ihm zu seiner großen Freude einen an demselben Tage von seinem Bruder Moritz aus Petersburg erhaltenen Brief, der ihm schreibt: „während meine Maschinen arbeiten, werden in einer Zelle der Batterie Kupferplatten und Visitenkarten en relief gravirt, die mir das Publicum zuträgt. Wenn das Licht zeichnet, wird es auch der Electricität erlaubt sein zu graviren." Der Umgang mit Steiner und Dirichlet stärkt und belebt ihn, es gelingt ihm auch, Steiner zu Dirichlet zu bringen, nachdem seit zwei Jahren jeder Umgang zwischen beiden aufgehört, auch seinen alten und verehrten Lehrer Boeckh suchte er wieder auf; „das eine nur hatte er an mir auszusetzen", schreibt er seiner Frau, „daß ich aus Potsdam sei, da sei noch nie ein berühmter Mann hergekommen — übrigens ist es auch wirklich ein gräßlicher Ort —"; daß damals ein junger Potsdamer, der wenige Jahre später durch sein Prinzip von der Erhaltung der Kraft der gesamten naturwissenschaftlichen Forschung neue Bahnen weisen sollte, sich bereits als junger Student in Berlin befand, wußte Boeckh natürlich noch nicht. Am 8. April schreibt Jacobi: „In Berlin war ich beständig mit Steiner, Dirichlet und Dr. Kummer aus Liegnitz zusammen, wo jeder und vor allem Dirichlet den Kern seiner Gedanken, Erfindungen,

Arbeiten und Projecte zum Besten gab.“ Aber nicht lange erträgt Jacobi diese Ruhe und Enthaltung von wissenschaftlicher Arbeit; er zieht sich wieder in die Stille seines Elternhauses nach Potsdam zurück, sehr erfreut, daß Humboldt ihn dort täglich ein- auch zweimal besucht, und beschließt erst Anfang Juni nach Marienbad zu gehen, wofür ihm Johannes Schulze eine Unterstützung beim Könige auszuwirken versprochen hatte.

Gleich die ersten Tage seiner Muße in Potsdam benutzt nun Jacobi dazu, um die schon im Dezember des vorigen Jahres entworfene und der Pariser Akademie kurz mitgeteilte Untersuchung auszuarbeiten und am 18. April der Berliner Akademie unter dem Titel „Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution“, vorzulegen.

„Indem er vermittels der so vereinfachten Theorie“, sagt Dirichlet, „um nur eine der zahlreichen Anwendungen anzuführen, das noch ungelöste Problem behandelte, die geodätische Linie auf dem ungleichachsigen Ellipsoid zu bestimmen, gelang es ihm mit Hilfe eines analytischen Instrumentes, welches sich schon früher in seinen Händen als sehr wirksam gezeigt hatte und jetzt unter dem Namen der elliptischen Koordinaten allgemein bekannt ist, die partielle Differentialgleichung zu integrieren und so die Gleichung der geodätischen Linie in Form einer Relation zwischen zwei Abelschen Integralen darzustellen. Die Jacobische Entdeckung ist die Grundlage eines der schönsten Kapitel der höheren Geometrie geworden, welches deutsche, französische und englische Mathematiker wetteifernd ausgebildet haben.“

Die Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linie des ungleichachsigen Ellipsoids, welche für die gewöhnlich üblichen Koordinaten so überaus schwierig erscheint, zerfällt nach Jacobis Entdeckung durch Einführung der sogenannten Krümmungslinien-Koordinaten in zwei

Quadraturen, welche durch Abelsche Integrale, und zwar von der 1. Ordnung, welche zunächst auf die elliptischen folgt, dargestellt werden, und ganz ähnliche Ausdrücke erhält man für die Rektifikation der geodätischen Linie; für das Umdrehungsellipsoid verwandelt sich das eine der beiden Abelschen Integrale in einen Kreisbogen, das andere in ein elliptisches Integral der 3. Gattung. Jacobi hebt hervor, daß schon Legendre die hierauf bezüglichen Formeln von Monge als analytisches Instrument benutzt hat, um den Inhalt der Oberfläche des Ellipsoids auf die Länge von Ellipsenbogen zu reduzieren, wie „einst Archimedes den Inhalt der Kugeloberfläche auf die Länge der Kreisperipherie zurückgeführt hat“.

Von dieser Methode der Lagenbestimmung der Punkte eines Ellipsoids macht nun Jacobi noch eine Anwendung auf die Aufgabe, die Oberfläche des Ellipsoids so auf einer Karte abzubilden, daß die unendlich kleinen Teile ähnlich bleiben; wendet man die Theorie von Gauss an, nach welcher man den Ausdruck für das Linienelement $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ in zwei Faktoren zerlegt und jeden Faktor mit Hilfe des Multiplikators integriert, so treten für gewöhnliche Variabeln unübersteigliche Hindernisse entgegen, während sich für die Jacobischen Variabeln das Problem unmittelbar auf bloße Quadraturen, und zwar auf Abelsche Transzendenten zurückführen läßt. „Durch Ausdehnung dieser auf drei Variabeln bezüglichen Formeln auf jede Zahl von Variabeln bekommt man merkwürdige Amplifikationen wichtiger Theoreme. Auf diese Weise habe ich die berühmte von Legendre entdeckte Relation zwischen den vollständigen Integralen der 1. und 2. Gattung zweier elliptischer Integrale, deren Moduln Komplemente zueinander sind, auf alle Abelschen Integrale ausgedehnt. Aber dieselbe Substitution hat mich auf das Abelsche Theorem selbst geführt, auf einem Wege und durch Betrachtungen, welche von dem von Abel eingeschlagenen gänzlich verschieden sind und welche von

einem mechanischen Probleme ausgehen.“ Euler hat das Problem der Anziehung von zwei festen Zentren auf elliptische Integrale zurückgeführt, die, wenn eine der anziehenden Massen oder beide $= 0$ werden, nicht aufhören, elliptische Integrale zu sein, so daß man die elliptische Bewegung eines Planeten oder selbst die geradlinige Bewegung eines Punktes durch eine Gleichung zwischen elliptischen Integralen erhält. Damit sind zwei Methoden gegeben, dasselbe Problem zu behandeln, von denen die eine die Lösung in transzendenter, die andere in algebraischer Form darstellt, also eine Methode, das Fundamentaltheorem der elliptischen Integrale aufzufinden. „Indem ich die für zwei Variabeln angewandten Formeln auf jede Zahl von Variabeln ausdehnte, erhielt ich das Abelsche Theorem, und zwar in einer neuen, merkwürdigen und fertigen Form. Zugleich ergab sich ein einfacher Weg, von dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen, wie ich dasselbe früher in einer Abhandlung über die Abelschen Transzendenten aufgestellt habe, durch Anwendung passender Multiplikationen direkt zu den algebraischen Integralen zu gelangen, was mir früher wegen der großen Komplikation des Gegenstandes wohl wünschenswert, aber schwer zu erreichen schien.“

Nach Vollendung dieser Arbeit stellt er noch während seines Aufenthaltes in Potsdam einige seiner schon weit zurückliegenden zahlentheoretischen Überlegungen zusammen, wohl im Hinblick auf den in wenigen Wochen in Aussicht genommenen Besuch bei Gauss, und legt dieselben unter dem Titel „Über die komplexen Primzahlen, welche in der Theorie der Reste der 5., 8. und 12. Potenzen zu betrachten sind“ am 16. Mai der Berliner Akademie vor. Gauss hatte die komplexen Zahlen von der Form $a + bi$ als Moduln oder Divisoren eingeführt und dadurch das biquadratische Reziprozitätsgesetz in derselben Einfachheit und Vollendung gefunden wie das quadratische. „Aber wie

einfach jetzt auch eine solche Einführung der komplexen Zahlen als Moduln erscheinen mag, so gehört sie nichtsdestoweniger zu den tiefsten Gedanken der Wissenschaft; ja ich glaube nicht, daß zu einem so verborgenen Gedanken die Arithmetik allein geführt hat, sondern daß er aus dem Studium der elliptischen Transzendenten geschöpft worden ist, und zwar der besonderen Gattung derselben, welche die Rektifikation von Bogen der Lemniskate gibt. In der Theorie der Vervielfachung und Teilung von Bogen der Lemniskate spielen nämlich die komplexen Zahlen von der Form $a + bi$ genau die Rolle gewöhnlicher Zahlen.“ So beim Multiplikations-Divisionsproblem, der 17-Teilung etc.

„Mögen nun auch jene Untersuchungen der Integralrechnung viel komplizierter und schwieriger erscheinen als jener einfache Gedanke der Zahlenlehre, so ist es doch nicht immer das Einfache, welches sich zuerst darbietet. Gauss versichert in den Disqu. arith., die Methode seiner Kreisteilung auf die Teilung der ganzen Lemniskate anwenden zu können und verspricht hierüber ein amplum opus zu einer Zeit, in welcher er sich sicher noch nicht, seinen eignen späteren Angaben zufolge, mit den biquadratischen Resten beschäftigt hatte. Auch ist es nicht unwahrscheinlich, daß er die Fundamentaltheoreme über biquadratische Reste aus dieser Quelle geschöpft hat . . .“ Jacobi bezeichnet es als eine ebenso interessante als schwierige Aufgabe, der von Abel gefundenen Teilung der Lemniskate in $a + bi$ Teile einen geometrischen Sinn abzugewinnen. „Die Geometrie hat in neuerer Zeit mit Glück dem Imaginären auch auf ihrem Gebiete einen Platz angewiesen; es ist zu erwarten, daß sie bei dem bewunderungswürdigen Aufschwung, welchen sie unter Steiners Händen genommen hat, sich auch dieser abstrakteren Ideen bemächtigen wird.“ Er hebt hervor, daß zur Auffindung der Reziprozitätsgesetze für kubische Reste, die sich noch einfacher als die Gaussschen für biquadratische Reste gestalten und aus bekannten Formeln der Kreisteilung ableiten

lassen, nur die Einführung komplexer Zahlen von der Form $\frac{a+b\sqrt{-3}}{2}$ oder solcher, die aus den 3. Einheitswurzeln zusammengesetzt sind, als Moduln oder Divisoren erfordern; er beweist, daß jede Primzahl p von der Form $8n+1$ in vier komplexe Faktoren, welche aus 8. Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind, in der Form zerlegt werden kann $p = \varphi(\alpha)\varphi(\alpha^3)\varphi(\alpha^5)\varphi(\alpha^7)$, worin $\varphi(\alpha) = y' + y''\alpha^2 + z'\alpha + z''\alpha^3$, und y', y'', z', z'' ganze Zahlen sind, und ähnlich lassen sich die Primzahlen von der Form $12n+1$ in vier komplexe Faktoren zerfällen, welche aus 12. Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind. Die drei Arten, wie man die vier Faktoren in zwei Paare ordnen kann, geben im ersten Falle für die Primzahlen von der Form $8n+1$ die Darstellung derselben Primzahl in den drei Formen a^2+b^2, c^2+2d^2, e^2-2f^2, im zweiten Falle die Darstellung der Primzahlen $12n+1$ in den drei Formen a^2+b^2, c^2+3d^2, e^2-3f^2. Zur Untersuchung der Eigenschaften der durch die Kreisteilung eingeführten komplexen Zahlen geht Jacobi auf einen früher von ihm bewiesenen Satz zurück, daß, wenn λ ein Teiler von $p-1$ ist, sich die Primzahl p, und in der Regel auf mehrere verschiedene Arten, als Produkt zweier komplexen Zahlen darstellen läßt, welche aus λ. Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind, und bemerkt nun, daß man mehrere dieser komplexen Zahlen miteinander multiplizieren und das Produkt wieder durch andere komplexe Zahlen derselben Art dividieren kann, so daß der Quotient ebenfalls eine ganze komplexe Zahl wird, ohne daß man sieht, wie die komplexen Zahlen des Nenners sich gegen die des Zählers fortheben. „Eine genaue Betrachtung dieses merkwürdigen Umstandes führte mich zu der Überzeugung, daß diese komplexen Faktoren der Primzahl p im allgemeinen selbst wieder zusammengesetzt sein müssen, so daß, wenn man sie in die wahren komplexen P r i m z a h l e n auflöst, die komplexen Primzahlen, welche die Faktoren des Nenners

bilden, gegen die Primfaktoren des Zählers sich einzeln aufheben lassen." Es gelang Jacobi in der Tat nach vielen mühsamen, an den einzelnen Primzahlenformen angestellten Versuchen nachzuweisen, daß die Primzahlen von der Form $5n + 1, 8n + 1, 12n + 1$ sich als Produkte von vier ganzen komplexen Zahlen, welche resp. aus 5., 8., 12. Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind, von der Art darstellen lassen, daß die neuen Faktoren notwendig Primzahlen sind, zwischen denen man in der Theorie der Reste der 5., 8., 12. Potenzen die Reziprozitätsgesetze aufzusuchen hat.

Bevor er nun seine Verwandten und Freunde in Potsdam und Berlin verließ, übersandte er noch am 16. Mai dem Minister seinen „Canon arithmeticus sive tabulae, quibus exhibentur pro singulis numeris primis vel primorum potestatibus infra 1000 numeri ad datos indices et indices ad datos numeros pertinentes" und stattete zugleich seinen Dank ab „für die bei des Königs Majestät beantragte Unterstützung zu der von ihm beabsichtigten Badecur". Auf der Reise nach Marienbad hielt er sich nur kurze Zeit in Dresden auf, und sein Umgang in Marienbad selbst, wo er jedem größeren Verkehr fern bleiben, aber auch jede geistige Anstrengung meiden sollte, beschränkte sich hauptsächlich auf seinen alten Freund Peter Riess; nur einmal hatte er Gelegenheit, dem preußischen Kronprinzen vorgestellt zu werden: „... Von der Gegend, in der die neue Petersburger Sternwarte errichtet ist, gab er eine sehr schöne, fast romantische Beschreibung. In die Worte solches Herrn legt man so viel Geist, wie bei einer Geliebten, soviel nur irgend hineingeht." Nach Beendigung der Kur, die seiner Gesundheit sehr zuträglich schien, reiste er, nachdem er noch Humboldt in Teplitz besucht, nach Prag und Wien, ohne jedoch von dem Aufenthalt daselbst sehr befriedigt zu werden, und traf dann mit Wilhelm Weber, den er schon seit zehn Jahren nicht wieder gesehen hatte, in München zusammen. In den ersten Tagen des

September verbrachte er einige herrliche Stunden in Heidelberg: „dort besuchte ich den alten Mathematiker Schweins, der mich als Lehrer von Steiner und weil ich als Student viel in seinen Sachen gelesen, interessirte, und der mich Nachmittags auf das Heidelberger Schloß begleitete.“ Über Frankfurt, Mainz, Köln eilte er nun direkt — wenigstens hatte er, wie wir wissen, die Absicht, dies zu tun — zu Gauss nach Göttingen, leider liegt aber keinerlei Nachricht über die Einzelheiten dieses Besuches vor, auch in den Briefen an seine Frau ist von der Göttinger Episode nichts erwähnt. Doch schickte er, wahrscheinlich mit Bezug auf eine in Göttingen stattgefundene Unterhaltung, schon am 27. September aus Königsberg an Gauss mit den einleitenden Worten: „ich bin so frei, Ihnen anbei eine kurze Andeutung zu schicken, weßhalb ich gewünscht, daß Lagrange für den Fall der gleichen Wurzeln in ein näheres Detail eingegangen wäre“ einige kurze Ergänzungen zur Lagrangeschen Auseinandersetzung bezüglich der Integration von zwei simultanen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für den Fall gleicher Wurzeln der Hilfsgleichung, indem er zeigt, daß in dem behandelten mechanischen Problem die Zeit als Potenz in den Formeln niemals dadurch vorkommen kann, daß zwei Wurzeln der Hilfsgleichung einander gleich werden.

Nach Königsberg zurückgekehrt nimmt Jacobi mit frischen Kräften seine so ungern abgebrochenen Untersuchungen wieder auf; „ich habe in den 7 Monaten, die ich abwesend war“, schreibt er am 19. Dezember 1839 an Hauptmann Schwinck, „mein bischen Mathematik ganz vergessen und muß wieder von vorn anfangen“, und schon in den Weihnachtsferien kann er seinem Bruder melden: „. . . ich quäle mich seit langer Zeit mit der Ausarbeitung und immer wiederholten Umarbeitung eines großen ‘Phoronomia sive de solutionum finitarum problematum mechanicorum natura et investigatione’ betitelten Werkes; sobald

diese etwa zehn Bogen betragende Einleitung fertig ist, will ich den Druck beginnen lassen . . .“

Für das Wintersemester 1839/40 hatte Jacobi nur eine große Vorlesung über elliptische Transzendenten angekündigt, die uns durch eine Nachschrift von Borchardt erhalten ist, der im Herbst zu Jacobi nach Königsberg gekommen war, um dort bis zum Jahre 1843 zu bleiben und den Doktorgrad zu erlangen. Nachdem Jacobi seine bekannten Sätze über die Natur der Perioden von Funktionen einer Variabeln entwickelt, gibt er die Einteilung der elliptischen Integrale, hebt besonders mit Beziehung auf Gauss und Abel die lemniskatischen Integrale hervor, und berührt kurz das Abelsche Theorem — alles in Form einer Einleitung zu seiner Vorlesung, an deren Schlusse er noch auf die Umkehrungsfunktionen der Abelschen Integrale hindeutet und hervorhebt, daß das Verhalten der Abelschen Transzendenten als Funktionen zweier Variabeln ihre Untersuchung unendlich viel schwieriger macht als die aller bisher in der Analysis betrachteten. „Die Mathematik hat freilich die Eigenschaft, daß man durch Rechnung zu Erfindungen kommen kann, ganz im Gegensatz mit dem Goetheschen Verse: Das ist auch eine von ihren Sünden, Sie glauben Rechnen, das sei Erfinden; denn wenn man auch im Anfange einen unrichtigen Weg einschlägt, so dividiert sich gleichsam durch die Rechnung die Unrichtigkeit fort, und da man mit Buchstabenausdrücken rechnet, d. h. mit solchen, welche die Art ihrer Entstehung an sich tragen, so gibt das Resultat selbst den kürzesten Weg, den man zu nehmen hat. Dieser Weg, durch Rechnen zu erfinden, ist nun aber bei den Abelschen Transzendenten durchaus nicht mehr anzuwenden möglich; denn wenn man auch um noch so wenig vom richtigen Wege abweicht, so kommt man wegen der ungeheuren Komplikation der Rechnung zu gar keinem Resultat. Es scheint daher, daß die Führung dieser Untersuchung die ganze Mathematik auf einen höheren Standpunkt erheben würde.“

Nach dieser Einleitung geht nun Jacobi unmittelbar zur Definition der ϑ-Funktion als einer Summe von Exponentialgrößen mit Exponenten, welche die Glieder einer arithmetischen Reihe 2. Ordnung bilden, über, führt die vier verschiedenen ϑ-Funktionen ein und entwickelt deren wesentlichste Eigenschaften, ihre Darstellung durch unendliche Reihen und Produkte, leitet durch Transformation derselben eine Reihe der früher von ihm gefundenen zahlentheoretischen Sätze ab, und untersucht endlich noch die Periodizitätsbeziehungen der mit einer Exponentialgröße, deren Exponent in der Variabeln quadratisch ist, multiplizierten ϑ-Funktionen. Der zweite Teil der Vorlesung beginnt mit der Entwicklung seiner berühmten Relation zwischen den Produkten von vier ϑ-Funktionen; aus den sich hieraus ergebenden Formeln werden die Additionstheoreme der ϑ-Funktionen hergeleitet, und nachdem der Übergang zu den elliptischen Funktionen vollzogen, die Eigenschaften dieser ausführlich behandelt und die Theorie der Integrale 2. und 3. Gattung angeschlossen. Die 36., 37. und 38. Vorlesung beschäftigt sich mit der Theorie der Transformation 1. und 2. Grades der elliptischen Funktionen, während die letzte, die 39. Vorlesung, noch eine kurze Andeutung von der Behandlung der Transformation n. Grades der elliptischen Funktionen auf Grund der Transformation der ϑ-Funktion liefert. Gerade die Transformationstheorie der ϑ-Funktion, die er längst schon als die Fundamentaltranszendente in der Theorie der elliptischen Funktionen bezeichnet hatte, interessierte ihn bei diesen Vorlesungen, und es ergab sich ihm manches, worauf er früher nicht aufmerksam gewesen; „ich will eine lustige Formel hersetzen", schreibt er am 8. Februar an Bessel, „sollte nämlich Jemand in den Fall kommen, das arithmetische und geometrische Mittel der beiden Ausdrücke $(1 + 2q + 2q^4 + \cdots)^2$, $(1 - 2q + 2q^4 - \cdots)^2$ wissen zu wollen, so sind es dieselben Ausdrücke, wenn man in ihnen q^2 statt q setzt."

Von dem 2. Teile dieser Vorlesung über elliptische Funktionen besitzen wir außerdem noch eine äußert korrekte, im Auftrage Jacobis zum Zwecke der Veröffentlichung von Borchardt angefertigte Ausarbeitung. „Sie kann", wie Weierstrass sagt, „mit gutem Fug als eine von Jacobi autorisierte betrachtet werden, weil dieser das Manuskript durchgesehen, mit Anmerkungen begleitet und durch Hinzufügung mehrerer Formelsysteme vervollständigt hat." Das Manuskript Borchardts, welches sich im Nachlasse Jacobis vorgefunden, wurde im Jahre 1891 unter dem Titel „Theorie der elliptischen Funktionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet" veröffentlicht. „Ich beabsichtige den historischen Gang der Entdeckung der elliptischen Funktionen umkehrend den entgegengesetzten Weg einzuschlagen", lauten Jacobis Einleitungsworte, denen unmittelbar jene allgemeine Relation zwischen den Produkten von vier ϑ-Funktionen folgt, wie er sie schon in seiner letzten Vorlesung über die elliptischen Transzendenten zugrunde gelegt, aus welcher dann die elliptischen Funktionen als ϑ-Quotienten und deren Additionstheoreme hergeleitet werden; auch hier wird, wie er dies stets in seinen Vorlesungen getan, mit Hilfe der Relation zwischen $\vartheta(x, q)$ und $\vartheta_1(2x, q^4)$ die Beziehung $\vartheta_1{}' = \pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3$ entwickelt, und nach Herstellung der Reihen für den Integralmodul und die Perioden die Theorie der Integrale 2. und 3. Gattung mit Hilfe der ϑ-Funktionen dargestellt.

Einen Teil der während der Bearbeitung seiner Vorlesungen gewonnenen, aus der Theorie der elliptischen Funktionen hergeleiteten zahlentheoretischen Folgerungen sandte er zugleich unter dem Titel „Elementarer Beweis einer merkwürdigen analytischen Formel, nebst einigen aus ihr folgenden Zahlensätzen" an Crelle und gibt darin zunächst für die früher aus den elliptischen Funktionen hergeleitete Beziehung

$$\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m}(-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}\right\}^3 = \sum_{0}^{\infty}{}^{n}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n^2+n}{2}},$$

welche das einzige Beispiel dafür war, daß der Kubus oder eine andere Potenz einer Reihe, in welcher die Exponenten der Glieder derselben eine arithmetische Progression 2. Ordnung bilden, wieder eine solche Reihe — hier mit Trigonalzahl-Exponenten — liefert, einen ganz elementaren Beweis, indem er durch logarithmische Differentiation dieser Gleichung das Problem auf die Verifikation des Satzes zurückführt, daß für jeden Wert von $x \sum (-1)^{\frac{a-b}{2}} b(a^2 - b^2) x^{a^2+3b^2}$, worin sich die Summation auf alle positiven und negativen Zahlen a der Form $6m+1$ und auf alle positiven ungeraden Zahlen b bezieht, verschwindet. Durch unmittelbare Ausführung des Kubus in der obigen Gleichung wird Jacobi auf eine Reihe weiterer zahlentheoretischer Theoreme geführt; zerfällt man z. B. eine Zahl p von der Form $24k+3$, welche nicht das Dreifache eines Quadrats ist, auf alle möglichen Arten in drei Quadrate von der Form $(6m \pm 1)^2$ und zählt diese Zerfällungen in der Weise, daß man immer die Fälle, in welchen alle drei Quadrate verschieden sind, doppelt rechnet, so wird man für die Zerfällungen, in denen eine oder drei der Größen m gerade sind, eben dieselbe Zahl wie für die Zerfällungen erhalten, in denen eine oder drei der Größen m ungerade sind, und ähnliche Sätze über die Zerfällungen von p in die Form $a^2 + 2a'^2$, in welcher a nicht durch 3 teilbar ist. Aus der ebenso leicht sich ergebenden Formel $\left\{\sum (-1)^m x^{(6m+1)^2}\right\}^3 = \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}} b x^{3b^2}$, in welcher m alle positiven und negativen Zahlen, b alle positiven ungeraden Zahlen bedeuten, lassen sich aber noch Folgerungen ganz anderer Art herleiten; wenn z. B. N eine ungerade Zahl ist, so hat man immer, und zwar auf mehrere Arten, $3N^2 = (6m+1)^2 + (6m'+1)^2 + (6m''+1)^2$ oder $N^2 = (2(m+m'+m'')+1)^2 + 2(2m - m' - m'')^2 + 6(m' - m'')^2$, ferner besteht, wenn N eine Primzahl ist, die Gleichung $N = \alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2 + 6\delta^2$, in welcher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen sind, u. a. m.

Im Sommer 1840, in welchem Jacobi außer den Übungen

im Seminar nur eine schon häufig wiederholte Vorlesung über die allgemeine Theorie der Oberflächen und doppelt gekrümmten Linien hielt, gewann er wieder mehr freie Zeit zur Ausführung und Zusammenstellung von zusammenhängenden Untersuchungsreihen, die zunächst die Theorie der linearen Gleichungen betrafen und schon vor vielen Jahren durch Fragen Bessels angeregt waren, sich aber sehr bald zu einer allgemeinen Theorie der Determinanten ausgestalteten, für die er bereits zum Zwecke seiner früheren algebraischen und analytischen Untersuchungen die nötigen Vorarbeiten hatte machen müssen. Um diese Zeit veröffentlichte Bessel in Schumachers astronomischen Nachrichten: „Neue Formeln Jacobis für einen Fall der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate", in welchen die Zusammensetzung der Auflösungen eines linearen Systems von drei Gleichungen und der Gewichte der daraus entspringenden Werte in völlig symmetrischer Form gegeben wird; „sie erscheinen so merkwürdig, daß ich mir von meinem Freunde Jacobi die Erlaubnis zur Veröffentlichung erbeten habe"; und am 1. Juli schreibt Jacobi an Gauss: „. . . bin ich so frei, einige die Methode der kleinsten Quadrate betreffende Sätze mitzutheilen, welche ich in diesen Tagen bemerkt habe; sie beziehen sich auf die Zusammensetzung der Werthe der Unbekannten und ihrer Gewichte aus denen, welche die verschiedenen Combinationen der Beobachtungen ergeben, wenn man nur immer so viel nimmt, als unbekannte Größen sind . . ."

Noch in diesem Sommer erhielt er den Roten Adlerorden 3. Klasse, wurde Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen und an Poissons Stelle auswärtiges Mitglied der Göttinger Sozietät. „. . . In der That kann ich ein Recht zu einer solchen Auszeichnung", antwortet er letzterer am 29. Juni, „nur in dem anhaltenden Bemühen erblicken, in den Geist der Schriften des außerordentlichen Mannes einzudringen, welchen die Königl. Societät zur Zeit an ihrer Spitze sieht, und dessen wunderbarer Genius un-

willkührlich an den Archimedes' erinnert. Denn wir finden in seinen Schriften bei Überlieferung des Vollgehaltes gleich tiefsinniger Entdeckungen auch die vollendete Form und ideale wissenschaftliche Strenge jenes Alten wieder, und wie dieser weit über alle praktischen Anwendungen, welche ihn in dem Munde des Alterthums zur Fabel werden ließen, den rein mathematischen Gedanken stellte, so hat auch Gauss bei aller Bewunderung, welche die größere Menge der Vollendung seiner Praxis zollt, selber an sich immer nur den Maßstab der Tiefe seiner Gedanken gelegt."

Als eine der größten Zierden der Königsberger Hochschule zeichnete ihn auch der junge König Friedrich Wilhelm IV. besonders aus; sehr erfreut konnte Jacobi, der die Herbstferien wieder in angestrengtester Arbeit in Königsberg zubrachte, seiner Schwägerin am 30. September melden: „Bei meinem durch die vermehrte Familie so vergrößerten Hausstande hat es mir sehr angenehm sein müssen, daß der König bei seinem jetzigen Aufenthalte hier mir in einem gnädigen Cabinetschreiben eine jährliche Zulage von 500 Thalern ertheilt hat, sowie ebenfalls dem Geheimrath Bessel."

Noch vor Beginn des Wintersemesters, für welches er eine Vorlesung von allgemeinerem Charakter über höhere Mathematik angekündigt hatte, übersandte er in Form eines Briefes eine kurze „Sur un théorème de Poisson" betitelte Note dem Präsidenten der Pariser Akademie. „Monsieur de Humboldt vient de me communiquer un fragment d'une Notice biographique sur Mr. Poisson, dont la lecture m'a donné envie d'adresser à vous, Monsieur, et à votre illustre Académie, quelques remarques sur la plus profonde découverte de Mr. Poisson, mais qui, je crois, n'a été bien comprise ni par Lagrange, ni par les nombreux géomètres qui l'ont citée, ni par son auteur lui-même; ... ce théorème, vraiment prodigieux, et jusqu'ici sans exemple, est resté en même temps découvert et caché." Und nun formuliert Jacobi das Theorem in der demselben von ihm gegebenen Gestalt,

wonach man, wenn eine beliebige Anzahl materieller Punkte von Kräften angegriffen und Bedingungen unterworfen ist, für welche das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft gilt, und man außer diesem Integral noch zwei andere Integrale kennt, daraus direkt ein drittes ohne Anwendung von Quadraturen bestimmen kann; für spezielle, dem gegebenen Probleme spezifisch angehörige Integrale kann man danach alle Integrale herleiten. „C'est qu'on verra dans un ouvrage auquel je travaille depuis plusieurs années, et dont peut-être je pourrai bientôt faire commencer l'impression."

Die Ausarbeitung seines großen Werkes über Mechanik, mit dem er schon, wie er früher seinem Bruder schrieb, seit zwei Jahren beschäftigt war, und von dem einzelne, in seinem Nachlasse aufgefundene Teile schon oben erwähnt wurden, führte ihn auch immer tiefer in speziell astronomische Probleme, zu denen ihm Bessel stets erneute Anregung gab; am 2. Weihnachtstage 1840 schrieb Jacobi seinem Freunde: „Der Fall concentrischer Bahnen bietet Erleichterungen, die nicht ohne Interesse sind; wenn man kleine Größen 2. Ordnung vernachlässigt, wird $\varrho^2 = a'^2 - 2aa' \cos(E - E') + a^2 + 2\varDelta(a' \cos E' - a \cos E)$, wo ϱ die gegenseitige Distanz zweier Planeten, a, a' die halben großen Axen, $\varDelta$ die Distanz der beiden Centra der Bahn, η, η' die Winkel der beiden Apsidenlinien mit der Verbindungslinie der beiden Zentra, ε, ε' die beiden excentrischen Anomalieen, $\varepsilon + \eta = E$, $\varepsilon' + \eta' = E'$." Während er aber noch kurz zuvor mit größter Hast und Anstrengung an der Fertigstellung seines Werkes über Mechanik arbeitete, überwältigte ihn doch im Laufe des Winters die Fülle der Untersuchungen in der Theorie der Dynamik und die Bearbeitung der astronomischen Probleme, welche die Störungstheorie betrafen, derart, daß er den Plan, dieses Werk druckfertig zu machen, wieder aufgeben mußte; am 9. Januar 1841 schrieb er seinem Bruder in Petersburg:

„... Du kannst Ostrogradsky mit vielen Grüßen von

mir erzählen: que je m'occupe à dévélopper analytiquement les formules de perturbation sans faire usage d'aucune quadrature mécanique et sans procéder suivant les différents ordres des excentricités et inclinaisons, que les formules sont simples et très convergentes, et que l'on peut les pousser d'après une loi facile jusqu' à telle limite numérique qu'il plaira. Pour montrer l'usage de ma méthode dans un problème difficile j'ai pris pour exemple la détermination de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne, et Mr. Claussen s'occupe à présent à évaluer en nombres les formules, qui donnent cette inégalité. Le fondement de ma méthode n'est pas tiré des fonctions elliptiques, mais d'une double substitution, que j'ai imaginée pour cet effet et que j'ai exposée dans toute sa généralité il y a dix années dans le 8. volume du journal de Crelle (De transformatione integralis duplicis etc.) ... Ich habe es jetzt aufgegeben, ein größeres mechanisches Werk unter dem Titel Phoronomie zu schreiben, denn ich habe nicht gehörig langen Athem dazu, 20 Abhandlungen wer weiß wie viel Jahre noch zurückzuhalten, bis noch 20 andere dazu geschrieben. Ich werde in irgend einer Form alles, was ich fertig habe, in einzelnen Abhandlungen von Stapel laufen lassen, und wenn nur erst der astronomische Dämon, der übrigens das Prioritätsrecht hat, da diese astronomischen Hirngespinste sehr alt sind, mich losgelassen, so soll eine wahre Sündfluth kommen. Laplace hat 30 Jahre Memoiren über die Mec. C. geschrieben, ehe der 1. Band davon erschien, und so hoffe ich auch später einmal mit größerer Leichtigkeit alles zu ganzen Werken zusammenzustellen, denn freilich ist der Nutzen dieser ein ganz anderer. Leider habe ich schon von diesen Werken gesprochen, obgleich es das sicherste Mittel war, daß nichts daraus wurde ..."

In der zweiten Hälfte des Winters hatte er sich ganz der Fertigstellung einer systematischen Bearbeitung der Theorie der Determinanten zugewandt, die er auch, datiert vom

17. März 1841, unter dem Titel „De formatione et proprietatibus determinantium“ an das Crellesche Journal überschickte.

„Wenn es die immer mehr hervortretende Tendenz der neuen Analysis ist“, sagt Dirichlet, „Gedanken an die Stelle der Rechnung zu setzen, so gibt es doch gewisse Gebiete, in denen die Rechnung ihr Recht behält. Jacobi, der jene Tendenz so wesentlich gefördert hat, leistete vermöge seiner Meisterschaft in der Technik auch in diesen Gebieten Bewunderungswürdiges. Dahin gehören seine Abhandlungen über die Transformation homogener Funktionen des 2. Grades, über Elimination, über die simultanen Werte, welche einer Anzahl von algebraischen Gleichungen genügen, über die Umkehrung der Reihen und über die Theorie der Determinanten. In dem letztgenannten Kapitel verdankt man ihm eine ausgebildete Theorie der von ihm mit dem Namen der Funktionaldeterminanten bezeichneten Ausdrücke. Indem er die Analogie dieser Ausdrücke mit den Differentialquotienten weiter verfolgte, gelangte er zu einem allgemeinen Prinzip, welches er das Prinzip des letzten Multiplikators nannte, und welches bei fast allen in den Anwendungen vorkommenden Integrationsproblemen die letzte Integration zu bewerkstelligen das Mittel gibt, indem es den dazu erforderlichen integrierenden Faktor a priori angibt.“

Jacobi behandelt zunächst in der oben bezeichneten Arbeit von der alternierenden Funktion ausgehend die elementaren Eigenschaften der Determinanten; „scilicet illae proprietates quamvis elementares non omnes ita tritae sunt, ut quas indemonstratas relinquere deceat“; die Zerlegung in Unterdeterminanten, die Darstellung dieser als Differentialquotienten der Determinante selbst, die Multiplikation der Determinanten und die Untersuchung der aus den adjungierten Elementen gebildeten wird systematisch dargestellt. Er wendet sich sodann zur Auflösung eines Systems von m linearen Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten, behandelt aber auch

den Fall von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten, ohne jedoch auf alle möglichen Besonderheiten einzugehen; er erklärt dies für ein „paullo prolixum negotium“. Schließlich entwickelt er noch einige auf die Methode der kleinsten Quadrate bezügliche Theoreme, „quibus explicetur, quomodo incognitarum valores eorumque Pondera, Methodo illa determinata, pendeant a diversis valoribus et ponderibus, quae obtinentur pro diversis Combinationibus numeri Observationum numero incognitarum aequales, qui earum determinationi sufficit“; er findet, wie er schon früher Bessel und Gauss mitgeteilt, daß, wenn man aus n linearen Gleichungen alle möglichen Partialsysteme von je ν Gleichungen bildet, jedes derselben nach den Unbekannten auflöst, und diesen Lösungen als Gewicht das Quadrat der Determinante des entsprechenden Partialsystems beilegt, die mit diesen Gewichten gebildeten Mittelwerte aller Unbekannten mit den durch die Methode der kleinsten Quadrate gelieferten Werten übereinstimmen.

Unmittelbar darauf verfaßt er als 2. Teil dieser Arbeit die Abhandlung „De determinantibus functionalibus“, in welcher die Determinanten aus den ersten partiellen Differentialquotienten eines Systems von Funktionen von ebensoviel Variabeln behandelt werden, und die Analogie mit dem Differentialquotienten einer Funktion einer Variabeln durchgeführt wird. Die Beziehung der Funktionaldeterminante zu der der inversen Funktionen, die Auffindung des Kriteriums der Abhängigkeit von n Funktionen von n Variabeln voneinander in dem identischen Verschwinden der Funktionaldeterminante, die Zurückführung dieses „überaus wichtigen analytischen Instrumentes“ auf einen Posten eines Produktes von n Gliedern, und die Anwendung dieser Umformung der Funktionaldeterminante auf die Transformation der vielfachen Integrale bilden das Fundament für den ganzen späteren Aufbau der Algebra; auf den Satz von dem gleichzeitigen Verschwinden der Funktionaldeterminante

mit einem Systeme homogener Gleichungen und auf die von Hesse hinzugefügte Ergänzung, daß für einen gleichen Grad der Homogenität auch die Ableitungen der Funktionaldeterminante zu gleicher Zeit verschwinden, stützt sich die für die Anwendungen auf Geometrie so wichtige Eliminationstheorie mit Hülfe der Determinanten.

Endlich bildet noch eine kürzere, um dieselbe Zeit verfaßte Arbeit: „De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum“, eine Ergänzung zu den beiden vorigen Arbeiten. Indem sich Jacobi auf den Satz von Vandermonde stützt, nach welchem eine bestimmte Determinante gebildet aus den ersten $n-1$ Potenzen von n Größen sich als ein Produkt aus den Differenzen dieser Größen ergibt, leitet er aus den von ihm entwickelten Determinantensätzen die Eigenschaften der alternierenden Funktionen her und entwickelt schließlich die allgemeine Form dieser Funktionen mit Hilfe der symmetrischen Gebilde derselben nach einer Methode, die im wesentlichen zusammenfällt mit der Darstellung der Potenzsummen durch die Koeffizienten einer Gleichung in jenen allgemeinen Formeln, welche sich als Entwicklungskoeffizienten bestimmter logarithmischer Reihen ergeben. Eine ergänzende Bemerkung zu dieser Darstellung bietet die am 18. März 1841 niedergeschriebene kurze Note „Zur kombinatorischen Analysis“, worin er mit Hülfe der logarithmischen und Exponentialreihe nachweist, daß $\sum \frac{1}{2^b 3^c \ldots a! b! c!} = 1$ ist, wenn $a + 2b + 3c + \cdots$ denselben Wert behält, eine Beziehung, die er auch durch rein kombinatorische Betrachtungen gewinnt.

Die Wiederholung der Vorlesung über Variationsrechnung, welche sich im wesentlichen dem Gange der früher gehaltenen anschloß, gestattete ihm endlich, eine seiner Abhandlungen über Differentialgleichungen fertigzustellen, welche einen Teil des früher geplanten, nunmehr aufge-

gebenen großen Werkes bilden sollte. Am 12. Juli 1841 beendete er die fundamentale, sehr umfangreiche Arbeit „Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis“, welche eine große Reihe der in seinen obenerwähnten Aufzeichnungen enthaltenen Resultate systematisch zusammenstellt. „Quod hic ab Ill. Lagrange praestitum esse videmus, id semper in rebus mathematicis summum erit, vinculum atque connexionem invenire problematum. Quamquam quod alterius ad alterum reductionem attinet, modo illud ad hoc modo hoc ad illud revocare conveniet. Qua de re mirari non debes, quod in hac commentatione, cum mihi disserendum esset de habitu atque natura aequationum, quibus integrantur aequationum differentialium vulgarium simultanearum systemata, ratius esse duxi, ab aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis proficisci harumque solutioni contra Analyticorum usum illarum integrationem substruere.“ Jacobi geht von der linearen partiellen Differentialgleichung $X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n} = X$, aus, deren Integral $\alpha = f(x, x_1 \ldots x_n)$ die Gleichung $0 = X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ identisch erfüllt; sind $f_1, \ldots f_n$ partikuläre Lösungen, so genügt der Differentialgleichung auch $\Pi(f_1, f_2, \ldots f_n)$, und daß nur n solche voneinander unabhängige Integrale existieren, beweist er mit Hilfe der von ihm aufgestellten Theoreme über Funktionaldeterminanten; hieran schließt sich weiter das Problem, die Lösung f in Form einer unendlichen Reihe darzustellen, wenn die Bedingung hinzugefügt wird, daß dieselbe für einen zwischen den unabhängigen Variabeln bestehenden Zusammenhang in eine gegebene Funktion übergehen soll. Indem er nun Systeme gewöhnlicher simultaner Differentialgleichungen betrachtet, zeigt er, daß durch n endliche Gleichungen, welche

den Differentialgleichungen $dx:dx_1:\cdots:dx_n=X:X_1:\cdots:X_n$ genügen, die sich bekanntlich durch Elimination auf eine Differentialgleichung höherer Ordnung mit einer abhängigen Variabeln zurückführen lassen, eine jede Lösung f der partiellen Differentialialgleichung $X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$ einer Konstanten gleich wird, und daß umgekehrt, wenn man n voneinander unabhängige Lösungen der partiellen Differentialgleichung $X\frac{\partial f}{\partial x}+\cdots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$ willkürlichen Konstanten gleichsetzt, zwischen den $n+1$ Variabeln x, x_1, $\ldots x_n$ n Gleichungen definiert werden, aus denen man die n gewöhnlichen Differentialgleichungen $dx:\cdots:dx_n=X:\cdots:X_n$ herleiten kann. Jacobi nennt nun n endliche, auf die obigen n unabhängigen Lösungen führende Integralgleichungen des Systems $dx:\cdots:dx_n=X:\cdots:X_n$ vollständige, wenn sie n willkürliche Konstanten enthalten, die sich nicht auf eine geringere Zahl zurückführen lassen, und man erhält somit, wenn man aus n vollständigen Integralgleichungen des Systems die n willkürlichen Konstanten als Funktionen der Variabeln ausdrückt, n voneinander unabhängige Lösungen der partiellen Differentialgleichung $X\frac{\partial f}{\partial x}+\cdots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$. Führt man statt der willkürlichen Konstanten die Anfangswerte der Variabeln x^0, x_1^0, $\ldots x_n^0$ ein, so wird in jeder der zwischen den Variabeln x, x_1, $\ldots x_n$ und deren Anfangswerten $x^0, x_1^0, \ldots x_n^0$ vorgelegten Integralgleichung durch Vertauschung von x, x_1, $\ldots x_n$ mit x^0, x_1^0, $\ldots x_n^0$ die Integralgleichung entweder unverändert bleiben oder in eine andere aus der Zahl der Integralgleichungen übergehen.

Für die Untersuchung in betreff der überflüssigen willkürlichen Konstanten kommt zunächst in Betracht, daß, wenn durch Integration der Differentialgleichungen $dx:dx_1:\cdots:dx_n=X:X_1:\cdots:X_n$ die Größen x_1, x_2, $\ldots x_n$ durch x und durch willkürliche Konstanten ausgedrückt werden, die gefundenen Ausdrücke $x_i=\varphi_i(x)$ mehr als n willkürliche

Konstanten nicht enthalten dürfen, wie schon früher in einer seiner Aufzeichnungen ausführlich dargelegt wurde. Ist nun eine Integralgleichung eine vollständige, wenn sie zu dem Systeme der vollständigen Integralgleichungen gehört oder wenn ihr durch das System der vollständigen Integralgleichungen genügt werden kann, während sie im entgegengesetzten Falle eine partikuläre Integralgleichung genannt wird, so ist es zur Auffindung einer Lösung jener partiellen Differentialgleichung nicht notwendig, das ganze System von Gleichungen zu benutzen, durch welches das entsprechende gewöhnliche System von Differentialgleichungen vollständig integriert wird, sondern es genügt, eine beliebige Gleichung zu kennen, welche zum System der vollständigen Integralgleichungen gehört. Können nun aus den Gleichungen, welche aus einer vorgelegten Integralgleichung durch Differentiation und Benutzung des totalen Systems deriviert sind und somit selbst wieder Lösungen der partiellen Differentialgleichung liefern, nicht alle willkürlichen Konstanten eliminiert werden, so ist die vorgelegte Integralgleichung notwendig vollständig, und so oft jene Integralgleichung mehr willkürliche Konstanten einschließt, als aus ihr Gleichungen abgeleitet werden, so wird diese Gleichung ebenfalls eine vollständige sein, wenn auch einigen willkürlichen Konstanten, deren Zahl jenem Überschuß gleich ist, besondere Werte zuerteilt werden.

Indem er nun einer vorgelegten Integralgleichung überflüssige willkürliche Konstanten zuschreibt, wenn durch Partikularisierung einiger derselben das Integralsystem, zu welchem jenes Integral gehört, seine Allgemeinheit behält, folgert er, daß, wenn für das gewöhnliche Differentialgleichungssystem mit n abhängigen Variabeln eine beliebige vollständige Integralgleichung gegeben ist, welche keine überflüssige Konstanten enthält, aus dieser so viel voneinander unabhängige Lösungen der zugehörigen partiellen Differentialgleichung abgeleitet werden können, als

willkürliche Konstanten in derselben enthalten sind, somit für den Fall von n solchen Konstanten die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung, und erörtert weiter die Frage, wie man aus einem Integrale mit überflüssigen Konstanten durch wiederholte Differentiation nach denselben andere Integrale herleiten kann. Indem Jacobi nun in Anlehnung an seine erste im Jahre 1827 veröffentlichte Abhandlung über partielle Differentialgleichungen zu dem Zusammenhang von Systemen simultaner partieller Differentialgleichungen mit gewöhnlichen Differentialgleichungen übergeht, stellt er das fundamentale Theorem auf, daß, wenn das partielle Differentialgleichungssystem $X\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_1} + \cdots + X_i\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i} = X_{i+1}, \ldots X\frac{\partial x_n}{\partial x} + X_1\frac{\partial x_n}{\partial x_1} + \cdots + X_i\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = X_n$ vorgelegt ist, und man die gewöhnlichen Differentialgleichungen $dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$ vollständig integriert, sodann zwischen den willkürlichen Konstanten, welche in die vollständigen Integralgleichungen eingehen, nach Aufstellung beliebiger $n-i$ Gleichungen zwischen denselben aus diesen und den n Integralgleichungen alle n willkürlichen Konstanten eliminiert, daraus $n-i$ Gleichungen hervorgehen, durch welche die Größen $x_{i+1}, \ldots x_n$ als Funktionen von $x, \ldots x_i$ bestimmt werden, welche dem partiellen Differentialgleichungssystem Genüge leisten; daran schließen sich einige unmittelbare Folgerungen, welche die Transformation jenes Systems partieller Differentialgleichungen für eine andere Wahl der unabhängigen und abhängigen Variabeln betreffen.

Indem er nun die Integration eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems mit Hilfe von Multiplikatoren oder durch Aufsuchung passender Faktoren, mit denen die Differentialgleichungen multipliziert und addiert ein vollständiges Differential liefern, zu bewerkstelligen sucht, zeigt er, daß das Problem wieder auf die Reduktion des gewöhnlichen Systems auf eine

partielle Differentialgleichung führt. Ist $X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$, und $df = Mdx + M_1 dx_1 + \cdots + M_n dx_n$, so wird vermöge der Beziehungen $\frac{\partial f}{\partial x} = M$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = M_1$, $\cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} = M_n$ eine Funktion f gesucht, für welche zugleich $df = Mdx + \cdots + M_n dx_n$ und $0 = MX + \cdots + M_n X_n$ ist, also durch Elimination von M $df = M_1\left(dx_1 - \frac{X_1\,dx}{X}\right) + M_2\left(dx_2 - \frac{X_2\,dx}{X}\right) + \cdots + M_n\left(dx_n - \frac{X_n\,dx}{X}\right)$; es folgt hieraus, daß, wenn f gefunden, man die Multiplikatoren $M_1, \ldots M_n$ kennt, welche den Ausdruck $M_1\left(dx_1 - \frac{X_1\,dx}{X}\right) + \cdots + M_n\left(dx_n - \frac{X_n\,dx}{X}\right)$ zu einem vollständigen Differential, also integrabel machen, und daß umgekehrt, wenn man die Multiplikatoren $M_1, \ldots M_n$ also auch M kennt, welche diesen Ausdruck integrabel machen, die hieraus mit Hilfe von Quadraturen sich ergebende Funktion f eine Lösung der partiellen Differentialgleichung liefert. Für n voneinander unabhängige Integrale $f_1, f_2, \ldots f_n$ entstehen n verschiedene Systeme von Multiplikatoren $M_1^{(i)}, M_2^{(i)}, \ldots M_n^{(i)}$, und für eine willkürliche Funktion $\Pi(f_1, f_2, \ldots f_n)$ ist das allgemeine Multiplikatorensystem durch die Gleichungen gegeben $M_k = \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} M_k^{(1)} + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} M_k^{(n)}$.

Nachdem Jacobi noch mannigfache Transformationen der $\frac{n(n+1)}{2}$ Integrabilitätsbedingungen für den Differentialausdruck $\Sigma X_i dx_i$ aufgestellt und eine Reduktion derselben auf $2n-1$ andere gegeben, beschäftigt er sich endlich noch in dieser Arbeit mit der Transformation eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems in eine Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln und stellt eine Reihe wichtiger Betrachtungen an, welche schon den Inhalt der oben besprochenen Aufzeichnungen bildeten.

Mißliche Familienverhältnisse zwangen Jacobi zunächst zur Unterbrechung seiner Arbeiten; er mußte, da unvorhergesehene, sehr große pekuniäre Verluste die Auflösung des väterlichen Geschäftes notwendig machten, außerdem der leidende Zustand seiner Mutter seine Anwesenheit in Potsdam dringend erforderte, seine Vorlesungen schon vor dem Ende des Juli schließen, und als er bei seiner Ankunft in Potsdam die Verhältnisse noch trauriger fand, als er vermutete, faßte er trotz aller materiellen Schwierigkeiten sogleich den Entschluß, seine Mutter mit nach Königsberg zu nehmen. Die ihm nach Potsdam gemachte Mitteilung von seiner Ernennung zum korrespondierenden Mitglied der Turiner Akademie, sowie die am 3. August ausgesprochene Bewilligung von 250 Talern von seiten der Berliner Akademie zum Behufe der numerischen Ausführung seiner neuen Methode für die Berechnung der planetarischen Störungen brachten ihm wenigstens eine momentane Freude in der trüben Stimmung des elterlichen Hauses. Am 18. August schreibt er seiner Frau: „Ich beeile mich Dir Mutters wegen zu schreiben, daß Du ihr zu Michaelis eine Wohnung miethest ... Die kleine jetzt eingetretene Pause habe ich benutzt, um vorgestern nach Berlin zu fahren ... Visite bei G. R. Schulze, der furchtbar grob gegen mich war, was wohl seinem sinkenden Ansehen zuzuschreiben ist; dann machte ich, nachdem ich mich hatte im Hotel des Ministers zur Abendaudienz aufschreiben lassen, einen langen Besuch bei Encke, der eigentlich Hauptzweck der Reise war; dann zu Peter Riess, mit dem ich zu Dove ging, dann Audienz beim Minister Eichhorn und retour mit dem Dampfwagen ... Der Minister war im höchsten Grade freundlich; er freue sich unendlich meine persönliche Bekanntschaft zu machen; es wurde viel gesprochen von der politischen Lage in Preußen, von Schön u. dergl. Dieses habe ich gesehen, daß, wenn je irgend einmal von meiner Versetzung nach Berlin die Rede sein soll, das Ministerium

ohnmächtig ist, und dies nur durch den König unmittelbar gehen könnte, d. h. durch Humboldt."

Schon am 27. August wendet sich Jacobi noch von Potsdam aus in einem Immediatgesuch an den König:

„Eure Königliche Majestät wage ich mit der allerunterthänigsten Bitte anzugehen, mich von der Königsberger Universität an die Berliner Universität, an welcher ich vor 16 Jahren meine Laufbahn als academischer Docent begonnen habe, Allergnädigst zurückversetzen zu wollen. Ich fand damals in Berlin nahe meiner Heimath keine Stelle und war genöthigt mit Aufopferung von Familieninteressen eine kleine erledigte Stellung in Königsberg anzunehmen. In der seitdem verflossenen Zeit haben die mathematischen Wissenschaften in den Staaten Ew. Königl. Majestät einen unerwarteten Aufschwung genommen, so daß sie den Standpunkt, auf welchem sie sich in andern Ländern Europas befinden, erreichen oder vielmehr vielleicht übertreffen. Es gereicht zu meinem besonderen Glücke, daß ich an diesem Aufschwunge Antheil habe nehmen und namentlich den mathematischen Unterricht an der Universität Königsberg in weiterem Umfange habe begründen können. Aber ich habe das Bewußtsein, daß meine Thätigkeit größer und weiter sein würde, wenn es mir jetzt verstattet wäre, mich mit den großartigen Hülfsmitteln und Kräften in Verbindung zu setzen, welche Eurer Königl. Majestät Residenz Berlin die Aufmerksamkeit der gebildeten Welt zuwenden. Seit mehreren Jahren zu einem der Mitglieder der Berliner Academie der Wissenschaften ernannt, früher selbst Docent an der Berliner Universität, finde ich hier meine geistige ebensowohl wie meine Familienheimath. Zwei meiner Schüler, Prof. Richelot und Doctor Hesse, welche in die Tiefen der Wissenschaft einzuführen mir gelang, lehren an der Königsberger Universität meine Fachwissenschaften in gründlichen und gediegenen Vorträgen, und machen die Wiederbesetzung meiner Stelle unnöthig . . .",

und an demselben Tage meldet Jacobi dem Minister, daß er in einem Immediatgesuch den König um Versetzung von Königsberg nach Berlin gebeten habe; „an der Berliner Universität gebildet, selbst eine kurze Zeit Docent an dieser Universität und seit mehreren Jahren eines der Mitglieder der Academie der Wissenschaften, fühle ich mich durch geistige wie durch Familieninteressen hierhergezogen. Mein 15jähriger Aufenthalt in Königsberg hat hierin keine Änderung gemacht, sondern nur das Verlangen nach Rückkehr in mir steigern können. Ich habe das Bewußtsein, die mir in Königsberg gestellte Aufgabe gelöst und dem dortigen mathematischen Universitätsunterricht eine Ausdehnung gegeben zu haben, welche mir gestattete, die Studirenden selbst in die entlegneren und schwierigeren Theile der Mathematik einzuführen und Schüler zu bilden, die nicht allein durch schriftstellerische Thätigkeit die Wissenschaft bereicherten, sondern welche auch an der Königsberger Universität bereits mit Glück lehren, so daß die Wiederbesetzung meiner Stelle jetzt völlig unnöthig sein dürfte. Ich selbst aber sehne mich danach, mich wieder den weiteren und größeren wissenschaftlichen Verhältnissen Berlins anschließen zu können, und glaube im Interesse der Wissenschaft bitten zu dürfen, meine Zurückversetzung an die Berliner Universität zu bevorworten . . .“

Das Gesuch Jacobis wurde aus finanziellen Gründen und in Rücksichtnahme auf die Königsberger Verhältnisse abschlägig beschieden.

Noch bevor Jacobi wieder nach Königsberg zurückkehrte, berichtet Bessel am 11. September 1841 an Gauss über die traurige Veranlassung, welche Jacobi zu seiner Reise nach Potsdam bewogen hatte: „Unserm Jacobi ist eine Unannehmlichkeit zugestoßen. Er hat sein Vermögen größtentheils, wahrscheinlich ganz, verloren. Sein Vater verlangte im Testament, daß das gemeinschaftliche Vermögen der Mutter und Kinder zusammenbleiben und von

einem der Brüder in einem Banquiergeschäfte nutzbar gemacht werden sollte. Dieser Bruder ist aber unvorsichtig gewesen und gerieth schon vor 2 Jahren in Verlegenheit, aus welcher er sich nur heraushalf, um jetzt einen starken Bankerott zu machen. Die Erbschaft betrug etwa 100000 Thaler. Jacobi ist seit 4—6 Wochen zu seiner Mutter nach Potsdam gereist, die er nun mit hierher bringen wird. Glücklicherweise kann ein solches Talent nicht verderben, aber ich hätte ihm doch das Gefühl der Freiheit ferner gewünscht, welches Vermögensbesitz gewährt. Wir schätzen hier Jacobi doppelt, wegen seines Talentes nicht allein, sondern auch wegen seines Charakters, der seiner sarkastischen Art nicht im Entferntesten entspricht, und wenn man ihn erst kennen gelernt hat, sehr liebenswürdig erscheint.“

Erst unmittelbar vor Beginn der Vorlesungen, für welche er außer der Theorie der Oberflächen und Kurven wohl, um sich über die Dinge aussprechen zu können, mit denen sein Geist jetzt vollauf beschäftigt war, noch die Theorie der Differentialgleichungen angekündigt hatte, traf er in Königsberg ein und erhielt bald darauf statt des noch immer erhofften günstigen Bescheides von seiner Versetzung nach Berlin eine vertrauliche Anfrage des Ministers bezüglich der für eine ordentliche Professur in Breslau in Frage kommenden Mathematiker; Jacobi schlug in einem Schreiben vom 20. November Kummer und Richelot ex aequo vor, „indem ich mir nicht getraue, zwischen den Verdiensten und Leistungen dieser beiden Männer zu entscheiden“.

Die Methoden für die Störungsrechnungen, von denen Jacobi schon früher durch seinen Bruder Ostrogradzky, sowie persönlich Bessel Mitteilung gemacht und zu deren Ausführung die Berliner Akademie eine Unterstützung gewährt hatte, veranlaßten Clausen, wohl aus rein persönlichen Gründen, zu einer nicht sehr freundlichen Beurteilung derselben, und Schumacher, bei dem eine gewisse Gereiztheit Jacobi gegenüber schon seit einiger Zeit unverkennbar

war, schrieb darauf bezüglich am 31. Januar 1842 an Gauss: „Von Jacobis Methoden hat Clausen, da sie ihm als Geheimnis anvertraut waren, nicht viel mehr sagen können, als daß er nichts besonderes davon erwarte. Aus einzelnen Äußerungen schließe ich, daß sie zu den Methoden gehören, die Formeln oder Reihen geben, in welche man die numerischen Werthe substituiren muß, und daß dabei elliptische Transcendenten gebraucht werden. Es scheint nach Bessels Briefen, daß er, wenn er nicht einen geschickten Rechner findet, der ihm in die Hand arbeitet, wahrscheinlich die ganze Sache liegen lassen wird, und so würde dann (Jacobi's eigne Worte) die Mécanique céleste in dem état pitoyable bleiben, dans laquelle Laplace l'a laissée. Ich sage mit Absicht es scheint, denn Bessel drückt sich immer, wenn er von Jacobi spricht, etwas unbestimmt aus."

Der Jahresanfang brachte Jacobi die höchste Ehrenbezeugung, die einem Gelehrten zuteil werden konnte, indem er am ersten Stiftungstage der Friedensklasse den Orden pour le mérite erhielt.

Die Wintervorlesung über Differentialgleichungen hatte ihm zu einer kurzen vom 26. März datierten Bemerkung „De integratione aequationis differentialis $(A + A'x + A''y)\cdot(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x + C''y)\,dx = 0$" Veranlassung gegeben, in welcher er, durch eine einfachere, von Euler integrierte Differentialgleichung angeregt, zeigte, daß, wenn man die kubische Gleichung auflöst $(A - z)(B' - z)(C'' - z) - B''C'(A - z) - CA''(B' - z) - A'B(C'' - z) + A'B''C + A''BC' = 0$, und deren untereinander verschiedene Wurzeln mit λ, λ', λ'' bezeichnet, ferner $B'C'' - B''C' = D$, $C'A'' - C''A' = D'$, $A'B'' - A''B' = D''$, $B' + C'' = E$ setzt, das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung $[D - E\lambda + \lambda^2 + (D' + A'\lambda)x + (D'' + A''\lambda)y]^{\lambda'' - \lambda'} \cdot [D - E\lambda' + \lambda'^2 + (D' + A'\lambda')x + (D'' + A''\lambda')y]^{\lambda'' - \lambda} \cdot [D - E\lambda'' + \lambda''^2 + (D' + A'\lambda'')x + (D'' + A''\lambda'')y]^{\lambda - \lambda'} = C$ ist.

Schon vom folgenden Tage, vom 27. März 1842, ist wiederum ein Bruchstück seiner großen Entwürfe zu einem Gesamtwerke über Mechanik unter dem Titel „De motu puncti singularis“ datiert. Jacobi bemerkt darin zunächst, daß, wenn ein Punkt gezwungen ist, auf einer gegebenen Linie zu bleiben und von Kräften bewegt wird, welche beliebige Funktionen der Koordinaten des Punktes sind, die Bewegung desselben nur durch Quadraturen definiert ist; wird der Punkt der Bedingung unterworfen, auf einer Fläche $f(x, y, z) = 0$ zu bleiben, und gilt für die Kraftkomponenten X, Y, Z die Beziehung $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0$, so erhält man das Integral $\frac{1}{2}v^2 = \int(X dx + Y dy + Z dz) + c$, worin der Ausdruck unter dem Integral durch die Flächengleichung allein integrabel wird, während die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Punktes auf einer gegebenen Fläche allgemein auf die Form $\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1}$, $\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2}$, $\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1$, $\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2$ gebracht werden, worin $p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}$, $p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}$, $Q_1 = X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1}$, $Q_2 = X\frac{\partial x}{\partial q_2} + Y\frac{\partial y}{\partial q_2} + Z\frac{\partial z}{\partial q_2}$ ist. Völlig neu und von größter Tragweite ist aber der Satz, den er hier nur als speziellen Fall eines von ihm allgemein aufgestellten mechanischen Prinzips ausspricht, daß, wenn drei Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen vier Größen q_1, q_2, p_1, p_2 in der Form gegeben sind $dq_1 : dq_2 : dp_1 : dp_2 = \frac{\partial T}{\partial p_1} : \frac{\partial T}{\partial p_2} : \left[-\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1\right] : \left[-\frac{\partial T}{\partial q_2} + Q_2\right]$, in denen Q_1, Q_2 nur Funktionen von q_1, q_2 sind, und zwei Integrale mit zwei willkürlichen Konstanten α und β gefunden sind, mit deren Hilfe man p_1, p_2, $\frac{\partial T}{\partial p_1}$, $\frac{\partial T}{\partial p_2}$ durch q_1, q_2, α, β ausdrücken kann, so daß nur noch die eine Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen q_1, q_2 zu

integrieren bleibt $\frac{\partial T}{\partial p_2} dq_1 - \frac{\partial T}{\partial p_1} dq_2 = 0$, um die Bewegungskurve auf der Fläche zu bestimmen, dann stets die linke Seite dieser Gleichung mit dem Faktor $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\frac{\partial p_2}{\partial \beta} - \frac{\partial p_1}{\partial \beta}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha}$ multipliziert ein vollständiges Differential liefern also durch Quadraturen integrabel sein wird. „Haec propositio emanat e nova theoria multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium simultanearum applicandi, quam in alia commentatione expono.“ Gilt das Prinzip der Flächen, so kann es kommen, daß schon das eine durch dieses Prinzip gelieferte Integral das Problem auf Quadraturen zurückzuführen gestattet, und Jacobi zeigt für diesen Fall, daß die Bewegung eines Punktes auf einer Rotationsfläche vermöge einer nach der Meridianebene gerichteten und nur von der Lage des Punktes in dem Meridiane abhängigen Kraft zurückgeführt werden kann auf die Bewegung eines Punktes in der Meridianlinie, indem nur noch eine zur Achse senkrechte und der 3. Potenz der Entfernung des Punktes von der Achse umgekehrt proportionale Kraft hinzutritt; diese Bewegung ist somit durch Quadraturen definiert. Es folgt ferner leicht, daß, wenn sich ein Punkt auf einer Rotationsfläche bewegt, deren Masse Attraktionskraft besitzt und in allen Meridianebenen nach demselben Dichtigkeitsgesetz verteilt ist, die Bewegung des Punktes nur durch Quadraturen bestimmt ist, wenn der feste Körper ruht oder gleichförmig um die Achse rotiert. Als Beispiel wird die Bewegung eines Punktes auf einem homogenen Umdrehungsellipsoid behandelt, welches nach dem Newtonschen Gesetze anziehend wirkt, ferner die konischen Oszillationen des einfachen Pendels oder die Bewegung auf der Kugel. Jacobi hat weiter bemerkt, daß, wenn ein Punkt von einem festen Zentrum so angezogen wird, daß das Flächenprinzip gilt, aber nicht das Prinzip der lebendigen Kraft, das Problem doch jedesmal auf Quadraturen zurückgeführt werden kann, wenn die Intensität der Attraktion durch eine beliebige

homogene Funktion $(-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der Koordinaten ausgedrückt wird, und daß ferner die Bewegung eines Punktes auf einer gegebenen Kurve durch Quadraturen definiert wird auch dann, wenn den sollizitierenden Kräften, welche beliebige Funktionen der Koordinaten des Punktes sind, eine Kraft des widerstehenden Mediums hinzugefügt wird, welche gleich ist einer linearen Funktion des Quadrates der Geschwindigkeit oder einem Exponentialausdruck $a + be^{cv^2}$, gleichgültig, ob das Medium homogen ist oder die Dichtigkeit sich nach irgendeinem beliebigen Gesetze ändert. Ebenso wird die Bewegung des einfachen Pendels im widerstehenden Medium behandelt, und noch am Schlusse der Arbeit unter denselben Voraussetzungen die bekannten Formeln des ballistischen Problems entwickelt.

Jacobi vertieft sich nun wieder ganz in seine Studien über die Prinzipien der Mechanik und die Störungstheorie, kündigt für den Sommer 1842 eine Vorlesung über Differentialgleichungen an, welche die Fortsetzung der letzten Wintervorlesung bilden sollte, und beschäftigt sich zunächst fast ausschließlich mit den Vorarbeiten zu der beabsichtigten nächsten großen Wintervorlesung über analytische Mechanik, deren spätere Herausgabe die Grundlage aller Vorlesungen und Forschungen auf diesem Gebiete geworden ist. Seine Vorträge über Differentialgleichungen führen ihn zu immer erneuter Lektüre von Eulers Schriften; am 14. April schreibt er an Fuss in Petersburg:

„. . . Denken Sie, wie sehr Ihr großer Plan der Herausgabe der Werke Euler's an Ihre Person grade geknüpft ist, und daß es wahrscheinlich nie geschieht, wenn Sie es nicht thun. Ich habe in der letzten Zeit wieder ein anhaltendes Studium aus Euler's Integralrechnung gemacht und mich auf's Neue gewundert, wie frisch sich dieses über 70jährige Buch erhalten hat, während der gleichzeitige d'Alembert ganz unmöglich zu lesen ist. Der Grund davon scheint mir in seinen Beispielen zu liegen. Denn diese Beispiele spielen

nicht so bloß beiher und erläutern; sie sind der ganze Inhalt, den die allgemeine Proposition zu der Zeit hat. Wenn er partielle Differentialgleichungen etwa auf gewöhnliche zurückführt, so giebt er alle Fälle, soweit sie ihm zu Gebote stehen, in denen die gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Quadraturen sich zurückführen lassen, von diesen die Fälle, in denen die Quadraturen endlich werden, von diesen, in welchen sie algebraisch werden und aehnlich überall. Der Satz tritt da aus seiner abstracten Allgemeinheit heraus, er bekommt einen wirklichen Inhalt; es ist als eine Entdeckung zu betrachten, wenn man zu den Euler'schen Beispielen eines hinzufügen kann. Nur der allgemeine Satz zugleich mit den Beispielen, wie sie Euler giebt, und wie sich dieselben mit dem Fortschritt der Kunst reicher gestalten, ist der wahre Inhalt und deßhalb sind die Euler'schen Schriften die wahrhaft lehrreichen ..."

Während seiner Sommervorlesung über Differentialgleichungen wurde er durch die Übungen des Seminars wenig in Anspruch genommen; wiewohl Jacobi noch in seinem Berichte über die Tätigkeit des Seminars von Ostern 1839 bis Ostern 1840 mit Genugtuung die wissenschaftlichen Arbeiten in demselben besprechen und vor allem „die Arbeit des kenntnisreichen und talentvollen Borchardt, von dem wohl bald größeres zu erwarten ist", hervorheben konnte, war er im Sommer 1840 sowie im Winter 1840/41 nur in der Lage, elementarere Übungen mit den Mitgliedern des Seminars anzustellen, da, wie er dem Ministerium berichtete, „der wissenschaftliche Standpunkt der Studirenden nicht erlaubte, wie in den früheren Jahren, bis zu den schwierigeren Problemen vorzudringen." Dagegen war der Verkehr mit seinen früheren, noch in Königsberg weilenden Schülern, die zum Teil schon seine mathematischen Kollegen geworden waren, ein sehr reger, und es wurden zwischen ihnen mündlich und schriftlich die schwierigsten wissenschaftlichen Probleme erörtert. Auf eine Anfrage Richelots schreibt ihm Jacobi am

20. April, nachdem er schon im Prinzip seine Theorie des Multiplikators entworfen:

„Wenn ich die Abhandlung, die ich jetzt schreibe, auf die Differentialgleichungen anwende, welche Sie jetzt integriren, so ergiebt sich folgendes Theorem: Es seien $x, y, z, w, u, \ldots$ die Variabeln, X, Y, Z etc. irgend welche Functionen resp. bloß von x, y, z etc., welche aber nicht dieselben zu sein brauchen, wie beim Abel'schen Theorem. Nennt man X_1, Y_1, Z_1 etc. die Producte der Differenzen der Variabeln, wenn man resp. x, y, z etc. fortläßt, so kann man die Differentialgleichungen so darstellen: $dx:dy:dz \ldots = X_1\sqrt{X} : Y_1\sqrt{Y} : Z_1\sqrt{Z} : \ldots$ Man nehme an, es seien alle Integralien außer einem gefunden und vermittels derselben z, w, u etc. durch x und y und die willkührlichen Constanten ausgedrückt; es sei ferner $\varDelta$ die Determinante dieser Ausdrücke von z, w, u etc., wenn man sie bloß als Functionen der willkührlichen Constanten betrachtet; dann wird das letzte Integral $\int \frac{\varDelta}{\sqrt{Z}\cdot\sqrt{W}\,\sqrt{U}\ldots} \left\{\frac{Y_1\,dx}{\sqrt{X}} - \frac{X_1\,dy}{\sqrt{Y}}\right\} = \text{const.}$, wo, wenn man Z, W, U, Y_1, X_1 durch x und y vermittels der gefundenen Integralgleichungen ausdrückt, der Ausdruck unter dem Integral ein vollständiges Differential ist. Bei 3 Variabeln hat man die Gleichungen $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 0$, $\frac{x\,dx}{\sqrt{X}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{Y}} + \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}} = 0$; es seien M und N die beiden Factoren, so daß $(M + Nx)\frac{dx}{\sqrt{X}} + (M + Ny)\frac{dy}{\sqrt{Y}} + (M + Nz)\frac{dz}{\sqrt{Z}}$ gleich einem vollständigen Differential $d\Phi$ und $\Phi = \alpha$ das erste Integral wird. Dann ist $\varDelta = \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}} = \frac{\sqrt{Z}}{M + Nz}$, und es wird daher das zweite Integral $\int \frac{1}{M+Nz}\left\{\frac{(z-x)dx}{\sqrt{X}} + \frac{(z-y)dy}{\sqrt{Y}}\right\} = \text{const.}$ Sagen Sie mir gefälligst, ob der Satz sich von selbst versteht, oder

schwer zu verificiren ist und ob er Ihnen von Interesse scheint . . .“

Analoge Betrachtungen führen ihn nun unmittelbar zu neuen Überlegungen bezüglich des Abelschen Theorems, die er schon wenige Tage später am 5. Mai unter dem Titel „Demonstratio nova theorematis Abeliani“ aufzeichnet. Sind zwischen den n Variabeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ und der Variabeln t die Differentialgleichungen 1. Ordnung vorgelegt $\frac{d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \cdots + \frac{d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = 0$, $\frac{\lambda_1 d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \cdots + \frac{\lambda_n d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = 0, \ldots \frac{\lambda_1^{n-1} d\lambda_1}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \cdots + \frac{\lambda_n^{n-1} d\lambda_n}{\sqrt{f(\lambda_n)}} = dt$, worin $f(\lambda)$ eine Funktion $2n-1$. Grades in λ ist, und setzt man $N_\varkappa = (\lambda_\varkappa - \lambda_1) \ldots (\lambda_\varkappa - \lambda_n)$, so daß sich $\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\sqrt{f(\lambda_i)}}{N_i}$ ergibt, so können die unmittelbar ersichtlichen transzendenten Integrale durch ein algebraisches Integralsystem ersetzt werden, indem aus dem bekannten Lagrangeschen Satze, daß für eine Funktion $\psi(\lambda)$ vom $2n-2$. Grade $\sum \frac{\partial \frac{\psi(\lambda_\varkappa)}{N_\varkappa^2}}{\partial \lambda_\varkappa} = 0$ ist, durch Differentiation der obigen Differentialgleichungen leicht folgt, daß für jeden Faktor $m-\lambda$ von $f(\lambda)$ die Beziehung besteht $\sqrt{(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\ldots(m-\lambda_n)} \left\{\frac{\sqrt{f(\lambda_1)}}{(m-\lambda_1)N_1} + \cdots + \frac{\sqrt{f(\lambda_n)}}{(m-\lambda_n)N_n}\right\} = \text{const.}$, welche $2n-1$ algebraische Integrale darstellen, von denen $n-1$ hinreichen. Jacobi zeigt noch allgemein, daß $\int \sqrt{(m-\lambda_1)\ldots(m-\lambda_n)} \cdot \sqrt{(m_1-\lambda_1)\ldots(m_1-\lambda_n)}(m, m_1)dt$ einen algebraischen Wert erhält, wenn (m, m_1) den Entwicklungskoeffizienten von λ^{-1} in der Funktion $\frac{f(\lambda)}{(m-\lambda)(m_1-\lambda)}$ dividiert durch das Quadrat der n linearen λ-Faktoren bedeutet.

Jacobi mußte die Sommervorlesungen früher, als er beabsichtigt hatte, schließen, da er und Bessel am 15. Mai

das nachfolgende Schreiben des Kurators der Königsberger Universität Schön erhalten hatten:

„S. Majestät der König haben mir zu befehlen geruht, Ihnen, meine hochgeehrten Herren, den Wunsch zu äußern, daß Sie der auf den 23. k. M. bestimmten Versammlung der British Association in Manchester beiwohnen und zurück über Paris gehen mögen, und mich zugleich autorisirt, zur Deckung der Kosten dieser Reise Ihnen 3000 Thaler anzuweisen. Indem ich Ihnen, meine hochgeehrten Herren, dies ganz ergebenst mittheile, und der Überzeugung bin, daß Sie durch Erfüllung dieses Wunsches die Genugthuung gern gewähren werden, welche in dieser Reise für unser Vaterland liegt, benachrichtige ich Sie ganz ergebenst . . .“

Diesem ehrenvollen Auftrage kamen die beiden großen Forscher, welche damals die Zierden deutscher Wissenschaft bildeten, gern nach und traten die Reise bereits in den ersten Tagen des Juni an, während Richelot und Hesse angewiesen wurden, „für die mathematischen Vorlesungen auszuhelfen“. „Dem erlauchten Staatsmanne, welcher damals an der Spitze der Verwaltung der Provinz Preußen stand“, sagt Dirichlet, „schien es im Interesse der Wissenschaft wünschenswert, daß Bessel und Jacobi einmal der schon oft an sie ergangenen Aufforderung zur Teilnahme an der jährlich in England stattfindenden Gelehrtenversammlung Folge leisteten, und er stellte daher beim Könige den Antrag auf Bewilligung der Kosten zu einer solchen Reise . . .“

Am 11. Juli 1842 verließ Jacobi das Festland und reiste mit seiner Frau zunächst nach Manchester, um dort auf der British Association einen Vortrag „On a new general principle of analytical mechanics“ zu halten, dessen Inhalt er in der Pariser Akademie unter dem Titel „Sur un nouveau principe de la mécanique analytique“ publizierte, und in welchem er schon sein Prinzip vom letzten Multiplikator andeutet, ohne es jedoch noch allgemein auszusprechen; er führt als Beispiele, in denen man das letzte Integral durch Quadraturen er-

halten kann, die Planetenbewegung an, die Anziehung eines Punktes nach zwei festen Zentren und die Rotationsbewegung eines Körpers um einen festen Punkt, wenn der Körper nicht von beschleunigenden Kräften angegriffen wird, hebt hervor, daß er bei diesen Untersuchungen die Hamiltonschen Differentialgleichungen der Bewegung zugrunde legt, und stellt in Aussicht, das allgemeine Prinzip, sobald er nach Königsberg zurückgekehrt sein wird, zu veröffentlichen.

Auf der Rückreise von London besucht er wieder Paris und hält dort in der Akademie einen Vortrag, dessen Inhalt er unter dem Titel „Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps" veröffentlichte. Während bisher das Problem der drei Körper auf die Bewegung zweier von ihnen um den dritten oder um den Schwerpunkt aller drei zurückgeführt wurde, wodurch nicht nur die Symmetrie, sondern auch das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft und der Flächen verloren ging, spricht Jacobi zunächst ein ganz allgemeines Prinzip aus, das er auf das Problem der drei Körper angewandt hat. Wenn n Körper gegeben sind, und die Annahme erlaubt ist, daß der Schwerpunkt derselben in Ruhe bleibt, so erhält man hierdurch für die derselben Achse parallelen Koordinaten je eine lineare Gleichung und kann somit jede durch $n-1$ neue Variabeln linear ausdrücken. Da nun die hierdurch eingeführten $n(n-1)$ Konstanten nur diesen linearen Schwerpunktsbedingungen zu genügen haben, also noch $n(n-1)-(n-1)=(n-1)^2$ Konstanten willkürlich bleiben, so kann man diese so bestimmen, daß die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Produkte der ersten Ableitungen aus der transformierten lebendigen Kraft herausfallen, und also noch $(n-1)^2-\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ $=\frac{n(n-1)}{2}$ Konstanten willkürlich bleiben, über die man passend verfügen kann, nachdem die lebendige Kraft des vorgelegten Systems von n Körpern auf eine solche eines

Systems von $n-1$ Körpern, deren Koordinaten die neuen Variabeln sind, mit passend zuerteilten Maßen reduziert worden ist. Das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft liefert eine Gleichung, welche die Summe der lebendigen Kräfte der $n-1$ fiktiven Körper einer Funktion ihrer Koordinaten gleich macht, und die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen lassen erkennen, daß das Prinzip der Flächen auch für die Bewegung dieser $n-1$ Körper erhalten bleibt. Wendet man dies auf das Problem der drei Körper an, welches man somit auf die Untersuchung des Zwei-Körperproblems reduziert, so folgt aus den drei Flächenprinzipien, daß der gemeinsame Durchschnitt der Bahnebenen der beiden Körper konstant in einer festen Ebene, und zwar der Laplaceschen unveränderlichen Ebene des Systems bleibt, und daß die Neigungen der Ebenen dieser Bahnen gegen die feste Ebene genau bestimmt sind durch die Parameter dieser als variable Ellipsen betrachteten Bahnen. Wählt man nun als Variable des Problems die Neigungen der beiden Bahnen gegen die unveränderliche Ebene, die beiden radii vectores, die Winkel, welche sie mit dem gemeinsamen, in der unveränderlichen Ebene gelegenen Durchschnitt der beiden Bahnebenen bilden, und endlich den Winkel, welchen dieser Durchschnitt mit einer festen Geraden in dieser Ebene macht, so findet man, daß dieser letztere Winkel ganz aus dem System der Differentialgleichungen verschwindet und sich nach deren Integration durch eine Quadratur bestimmt, wonach also die Knoten aus diesen neuen Differentialgleichungen eliminiert sind. Die sechs Differentialgleichungen 2. Ordnung, welche die relative Bewegung der drei Körper ausdrücken, sind somit auf fünf Differentialgleichungen 1. Ordnung und eine 2. Ordnung reduziert, und daher die Ordnung des Systems der Differentialgleichungen des Problems der drei Körper erniedrigt.

Wiederum sah sich Clausen veranlaßt, die Tragweite dieser Arbeit von Jacobi zu beanstanden; am 13. September

schreibt Schumacher darüber an Gauss: „Clausen hat mir einen Aufsatz gebracht, der eigentlich zeigt (oder zeigen soll), daß bei Jacobi's Methode, die er in Paris der Akademie vorgetragen hat (sur l'élimination du noeud dans le problème de trois corps) nichts gewonnen ist, da statt der ersparten Glieder neue, von Jacobi nicht erwähnte hinzukommen. Dies ist in Lob des dabei verwandten Scharfsinnes eingewickelt, aber das Ganze kann das Motto aus Cicero's Briefen haben, de quo scribis, nihil est, und zeigt, daß Clausen, was ich nicht wußte, auch schalkhaft sein kann. Wenn Sie, mein theuerster Freund, diesen Aufsatz sehen mögen, so werde ich ihn Ihnen sogleich übersenden ...“; doch Gauss antwortete am 16. September, daß er jetzt keine Zeit habe und ihn gedruckt lesen werde, und am 25. September schreibt er ihm, daß ihm noch immer die Zeit fehle, „ihn mit der Aufmerksamkeit zu lesen, die er erfordert und verdient“.

Am 12. September war Jacobi von seiner Reise nach England und Frankreich zurückgekehrt und entwarf seinem Bruder in Petersburg von Königsberg aus eine kurze Schilderung derselben: „... In Paris ist jeder Winkel meiner Arbeiten besser gekannt, als ich je vermuthet hätte, eine große Aufmunterung, aber auch eine schwere Aufgabe, das Erworbene zu conserviren ... In Manchester sprach Faraday viel mit mir von Dir; er reiste ab, als die eigentliche Versammlung anfing, weil er menschenscheu sein soll ... Von allen Gelehrten, welche ich kennen gelernt, haben den bedeutendsten Eindruck auf mich gemacht Brewster und Arago ...“

Die letzten Ferientage vor Beginn seiner großen Vorlesung über analytische Mechanik benutzte Jacobi noch, um die Ausstellungen, welche Clausen an seinen letzten geometrischen und astronomischen Arbeiten zu machen hatte, zu widerlegen. Am 1. September 1842 hatte sich nämlich Schumacher mit der Mitteilung an Gauss gewendet: „Da

ich hoffe, daß Herr Prof. Weber noch etwas bei mir bleiben wird, bin ich so frei, Ihnen, mein theuerster Freund, beifolgenden Aufsatz von Clausen, der eine angebliche Erweiterung Ihres Theorems von Jacobi betrifft, und in dem Clausen zeigt, daß Jacobi sich geirrt hat, nicht durch W. sondern durch die Post zuzusenden. Er soll gleich in den Astr. Nachr. erscheinen, aber ich wünschte doch, daß Sie ihn vorher durchsehen möchten. Ich werde Sie gewiß nicht mit Sachen belästigen, die Ihnen Zeit und Mühe kosten, aber hier, denke ich, wird ein Blick Ihnen zeigen, wer Recht hat, und ich wage daher darum zu bitten, da ich nicht gern Clausen gegen Jacobi compromittirt sehen möchte. Hat Clausen Recht, wie es mir scheint, so ist es eine sehr nützliche Lection für Jacobi, der bei den größten Geistern immer zu verbessern und wenigstens zu erweitern sucht."

Diese wenig schönen Zeilen, welche wie fast stets bei Schumacher eine gewisse Gereiztheit und Unbehaglichkeit der erdrückenden Größe Jacobis gegenüber verraten, beantwortete Gauss am 5. September mit den Worten: „Indem ich Ihnen, mein theuerster Freund, hier den Aufsatz des Herrn Clausen zurückschicke, bemerke ich nur 1) daß ich seine Widerlegung der angeblichen Generalisirung meines Theorems völlig gegründet, 2) in der Entwicklung (obwohl ich nicht Buchstab für Buchstab nachgerechnet habe, was auch nicht nöthig ist) dem Gegenstande angemessen und ziemlich finde."

Daraufhin nahm Schumacher mit einer wahren Befriedigung die Arbeit von Clausen auf, welche die Richtigkeit des früher besprochenen Jacobischen Theorems über das geodätische Dreieck anzweifelte, und Jacobi sah sich daher veranlaßt, am 16. Oktober Schumacher eine kurze Note „Über einige merkwürdige Kurventheoreme" zu übersenden, worin er „einen einfachen Beweis für seinen — von Steiner schon 1839 als richtig anerkannten — Satz liefert, zumal er auf einem an sich sehr bemerkenswerten

Satz der Kurvenlehre beruht". Aus dem Mittelpunkt einer Kugel, lautet jener Satz, ziehe man mit den Krümmungshalbmessern einer im Raume gegebenen Kurve $\pi\zeta$ parallele Linien, welche die Kugelfläche in den Punkten der Kurve PZ schneiden, und gleichzeitig mit den an π und ζ gelegten Schmiegungsebenen der gegebenen Kurve parallele Ebenen, welche die Kugelfläche in den größten Kreisen PA und ZA schneiden, so ist der sphärische Inhalt des von der Kurve PZ und den Bogen größter Kreise PA und ZA gebildeten Dreiecks PAZ gleich dem der Kurve PZ gegenüberliegenden Winkel PAZ oder dem Supplement des Winkels der an π und ζ gelegten Schmiegungsebenen. Aus diesem Satze leitet er nun das früher von ihm bewiesene Theorem her, aus dem sich wiederum das Gausssche ergibt; aber es ist allgemeiner als das Gausssche, „weil, wie Herr Clausen gezeigt hat, nicht durch jede zwei in einem Punkte zusammenstoßende Kurven, in welchem ihre Krümmungshalbmesser dieselbe Richtung haben, sich eine Fläche legen läßt, auf welcher die beiden Kurven kürzeste Linien sind." In bezug auf diese Widerlegung schreibt nun Schumacher am 4. Dezember an Gauss: „In dem Stücke der Astr. Nachrichten, das jetzt gedruckt wird, werden Sie zwei neue Curventheoreme von Jacobi finden, die die Richtigkeit des von Clausen angegriffenen beweisen sollen", aber Gauss geht in seiner Antwort überhaupt nicht mehr darauf ein.

Um auch einen zweiten Angriff Clausens abzuwehren, sendet er am 31. Oktober eine Note an die Astronomischen Nachrichten, betitelt „Zusatz zu der Abhandlung: Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps", von der Schumacher am 10. November an Gauss berichtet: „Jacobi behauptet in Bezug auf Clausen Recht zu haben und hat mir einen Aufsatz, der dies beweisen soll, gesandt. Da ich Ihres Rathes entbehren muß, weil Sie mit der Inclination beschäftigt, nichts fremdes zugesandt haben wollen, so ersuchte ich Bessel die Sache scharf zu betrachten, und

Jacobi zu warnen, daß er nicht ein verzeihliches Versehen durch Paralogismen gut zu machen suche. Bessel hat mir geantwortet, Jacobi bestehe darauf, daß er Recht habe, er i. e. Bessel wolle aber alles noch einmal überlegen. So steht die Sache jetzt.“ Da aber Schumacher jedes eigne Urteil über die Arbeiten Jacobis abging, so blieb ihm nichts übrig, als auch diese Widerlegung aufzunehmen, und er schrieb am 1. Dezember an Gauss: „Sie werden in dem jetzt erschienenen Stücke der Astronomischen Nachrichten 1) Jacobi's Pariser Vorlesung, aber von ihm verändert, 2) Clausen's Bemerkungen, 3) Jacobi's Antwort darauf finden. Jacobi's Antwort bezieht sich vorzüglich darauf, ob man eine Quadratur eine Integration nennen dürfe oder nicht. Er sagt nein.“

Jacobi zeigt nämlich darauf bezüglich ganz allgemein, daß, wenn in irgendeinem mechanischen Probleme der Satz von der lebendigen Kraft $V = h$ und die drei Flächensätze gelten $u = \alpha$, $v = \beta$, $w = \gamma$, wo α, β, γ, h willkürliche Konstanten bedeuten, die drei Gleichungen $V = h$, $u = \alpha$, $v^2 + w^2 = \beta^2 + \gamma^2$ hinreichen, um die Ordnung des Systems um fünf Einheiten, oder wenn man die Zeit eliminiert, um sechs Einheiten zu verringern. Dafür, daß man durch drei Gleichungen die Ordnung um sechs Einheiten verringert, hat man drei Quadraturen zu leisten, wovon aber die eine von dem einen der drei Flächensätze übernommen wird, auf welchen man noch keine Rücksicht genommen hat. Die Zurückführung der elliptischen Bewegung eines Planeten sowie des Rotationsproblems auf Quadraturen ist unter diesem allgemeinen Satze enthalten.

Für das Wintersemester 1842/43 hatte Jacobi eine große Vorlesung über analytische Mechanik angekündigt, zerlegte dieselbe jedoch, nach Königsberg zurückgekehrt, in eine Vorlesung über die Integration der Differentialgleichungen und in eine über Mechanik des Himmels, da Dirichlet ihn, als er auf der Rückreise von Paris Berlin berührte, gebeten,

für Seidel und Heine, die beide im Winter nach Königsberg kommen wollten, diese letztere Vorlesung zu halten, an der auch in der Tat nur noch zwei andere Zuhörer teilnahmen, da Jacobi, wie Seidel erzählt, den andern selbst davon abriet, und ihnen andeutete, daß sie es wohl nicht vollkommen verstehen würden. Seidel hebt bei dieser Gelegenheit hervor, Jacobi habe sonst in der Regel — aber doch wohl nur in den elementaren Vorlesungen — weniger hohe Gegenstände behandelt, um leichter Zuhörer zu finden, dann sei er aber etwas nachlässig in seinem Vortrage gewesen, da der Stoff für ihn selbst zu geringes Interesse hatte.

Über diese Vorlesung, welche die Mechanik des Himmels behandelte, berichtet Seidel seinen Eltern: „Die himmlische Mechanik, über welche uns Prof. Jacobi liest, ist gewissermaßen die reine theoretische Astronomie, es werden jedoch in ihr mehr die großen Verhältnisse, die Bewegungen ganzer Sonnensysteme im Weltraum etc. betrachtet und die Veränderungen, die an denselben im Laufe der Jahrtausende eintreten. Es gehören hierher z. B. die von verschiedenen französischen Gelehrten, namentlich Poisson, geführten Untersuchungen darüber, ob unser Sonnensystem, wenn nicht Ursachen hinzukommen, die nicht in ihm selbst liegen, und von denen wir daher auch keinen Begriff haben können, für immer bestehen oder sich von selbst einmal auflösen und resp. zusammenstürzen wird etc., Untersuchungen, die indeß noch der Vollendung ermangeln. Da dabei in der Mechanik des Himmels alle wirkenden Kräfte strenge berücksichtigt werden, auch solche, von denen wir nur aus der Theorie Kenntniß haben, da sie zu gering sind, um sich in den Beobachtungen zu zeigen, wie z. B. die Anziehung der Fixsterne auf unser Sonnensystem, so werden diese Untersuchungen außerordentlich complicirt und würden daher in dieser Form nicht geeignet sein, den astronomischen Berechnungen zu Grunde gelegt zu werden. Das Hauptinteresse dieses Gegenstandes beruht daher in seiner Schwie-

rigkeit und in den interessanten mathematischen Betrachtungen, auf welche er führt."

Von der großen Vorlesung über die Integration der Differentialgleichungen besitzen wir eine Nachschrift Borchardts, welche Clebsch mit geringfügigen Abänderungen als Jacobis Vorlesungen über Dynamik im Jahre 1866 herausgegeben hat.

„Diese Vorlesungen werden sich mit den Vorteilen beschäftigen, welche man bei der Integration der Differentialgleichungen der Bewegung aus der besondern Form dieser Gleichungen ziehen kann. Es sollen nur diejenigen Probleme betrachtet werden, welche sich auf ein System von n materiellen Punkten beziehen, und bei welchen die Bewegung allein von der Konfiguration der Punkte und nicht von ihrer Geschwindigkeit abhängt." In der Einleitung hebt Jacobi hervor: „Der von Hamilton entdeckte Zusammenhang gibt auch neue Aufschlüsse über die Methode der Variation der Konstanten. Diese Methode beruht auf folgendem: Die Integrale eines Systems von Differentialgleichungen der Dynamik enthalten eine gewisse Anzahl willkürlicher Konstanten, deren Werte in jedem besondern Falle durch die Anfangspositionen und Anfangsgeschwindigkeiten der sich bewegenden Punkte bestimmt werden. Bekommen nun die letzteren während der Bewegung Stöße, so ändern sich dadurch nur die Werte der Konstanten, die Form der Integralgleichungen bleibt dieselbe. Bewegt sich z. B. ein Planet in einer Ellipse um die Sonne, und bekommt er während der Bewegung einen Stoß, so wird er sich nun in einer neuen Ellipse oder vielleicht auch in einer Hyperbel, jedenfalls in einem Kegelschnitt bewegen, die Form der Gleichung bleibt dieselbe. Treten nun solche Stöße nicht momentan auf, sondern werden sie kontinuierlich fortgesetzt, so kann man die Sache so ansehen, als ob die Konstanten sich kontinuierlich änderten, und zwar so, daß diese Änderungen die Wirkung der störenden Kräfte genau darstellen.

Diese Theorie der Variation der Konstanten wird in dem Verlauf unserer Untersuchung in einem neuen Lichte erscheinen . . .“

„Man erkennt die Notwendigkeit, die partiellen Differentialgleichungen zu studieren; aber seit 30 Jahren hat man sich nur mit den linearen partiellen Differentialgleichungen beschäftigt, während für die nicht linearen nichts geschehen ist. Für drei Variable hat bereits Lagrange das Problem absolviert, für mehr Variable hat Pfaff eine zwar verdienstliche aber unvollkommene Arbeit geliefert. Nach Pfaff muß man zur Lösung der partiellen Differentialgleichung zunächst ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen integrieren. Nach Integration derselben hat man ein neues System von Differentialgleichungen aufzustellen, welches zwei Variable weniger enthält, dieses wiederum zu integriren usw., und so gelangt man endlich zur Integration der partiellen Differentialgleichung. Hiernach hatte also Hamilton durch seine Zurückführung der Differentialgleichungen der Bewegung auf eine partielle Differentialgleichung das Problem auf ein schwierigeres zurückgeführt; denn nach Pfaff erfordert die Integration einer partiellen Differentialgleichung die Integration einer Reihe von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, während das mechanische Problem nur die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erfordert. Es war daher hier die umgekehrte Zurückführung von größerer Wichtigkeit, wonach eine partielle Differentialgleichung sich auf ein einziges System von Differentialgleichungen zurückführen läßt. Das erste Pfaffsche System stimmt nämlich mit dem, auf welches die Mechanik führt, überein, und es läßt sich nachweisen, daß die übrigen Systeme alsdann entbehrt werden können. So wie in diesem Falle kehrt sich die Zurückführung eines Problems auf ein anderes sehr häufig um, indem der Fortschritt der Wissenschaft das erste zum zweiten macht und umgekehrt. Das Wichtige in solchen

Zurückführungen ist der Zusammenhang, der zwischen zwei Problemen nachgewiesen wird. Der in Rede stehende Zusammenhang läßt erkennen, daß jeder Fortschritt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auch einen Fortschritt in der Mechanik herbeiführen muß. Ein tieferes Studium der Differentialgleichungen der Mechanik zeigt, daß die Anzahl der Integrationen sich immer auf die Hälfte zurückführen läßt, während die andere Hälfte durch Quadraturen ersetzt wird.“

„Es gibt ein merkwürdiges Theorem, welches zeigt, daß ein qualitativer Unterschied zwischen den Integralen stattfindet. Während nämlich einige Integrale nicht mehr Bedeutung haben als Quadraturen, gibt es andere, welche für alle übrigen zusammengenommen gelten können. Dies Problem läßt sich folgendermaßen aussprechen: Kennt man außer dem durch das Prinzip der lebendigen Kraft gegebenen Integral noch zwei Integrale der dynamischen Gleichungen, so kann man aus diesen beiden ein drittes finden. Ein Beispiel hiervon sind die sogenannten Flächensätze in bezug auf die drei Koordinatenebenen; gelten von diesen zwei, so läßt sich der dritte daraus ableiten. Hat man nach dem angeführten allgemeinen Satze aus zwei Integralen ein drittes gefunden, so läßt sich hieraus und aus einem der früheren ein viertes finden usw., bis man auf eins der gegebenen zurückkommt. Es gibt Integrale, welche bei dieser Operation das ganze System der Integralgleichungen erschöpfen, während bei andern sich der Zyklus früher schließt. Dieses Fundamentaltheorem ist schon seit 30 Jahren zugleich gefunden und verborgen. Es rührt nämlich von Poisson her und war auch Lagrange bekannt, der in dem erst nach seinem Tode erschienenen zweiten Teile der Mécanique analytique dasselbe als Hilfssatz brauchte. Aber dieser Satz ist immer in einer ganz andern Bedeutung genommen worden; er sollte nur zeigen, daß in einer Entwicklung gewisse Glieder unabhängig von der Zeit seien,

und es war keine geringe Schwierigkeit, in demselben seine heutige Bedeutung zu sehen. In diesem Satz liegt zugleich das Fundament für die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung."

Jacobi stellt nun zunächst die Differentialgleichungen der Bewegung auf, führt die Kräftefunktion ein, und beschäftigt sich sodann mit dem Prinzip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, wobei er hervorhebt, daß das Wort „Erhaltung" sich darauf bezieht, daß die Bewegung des Schwerpunktes durch dieselben Gleichungen dargestellt wird, als wenn keine Bedingungsgleichungen da wären. Eine weitere Vorlesung behandelt das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft, besonders auch für den Fall, daß die Kräftefunktion eine homogene Funktion der Koordinaten ist, überträgt dasselbe auf die Entfernungen der Punkte voneinander und schließt mit der Entwicklung der Bedingungen für die Stabilität des Weltsystems. Bei der Behandlung des Prinzips der Erhaltung der Flächenräume wird wieder hervorgehoben, daß zwei Flächensätze den dritten nach sich ziehen, und bei der Untersuchung der Lage der unveränderlichen Ebene nachgewiesen, daß, wie aus dem Satze der lebendigen Kraft die Stabilität des Weltsystems rücksichtlich seiner Dimensionen abgeleitet wird, das Prinzip der Flächen und die Existenz der unveränderlichen Ebene dazu benutzt werden kann, die Stabilität desselben rücksichtlich der Form seiner Bahnen zu beweisen, indem die Exzentrizitäten der Planetenbahnen sich nur zwischen gewissen Grenzen verändern können. Es folgt die Jacobi eigentümliche Behandlung des Prinzips der kleinsten Wirkung und die eingehende Erörterung des Begriffes eines Grenzwertes. Nach einer genauen Diskussion der Lagrangeschen Multiplikatoren wird das Hamiltonsche Integral und die zweite Lagrangesche Form der dynamischen Gleichungen besprochen, woran sich die Entwicklung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und die

Theorie des Prinzips des letzten Multiplikators anschließt, welche erst später in ausführlicher Darstellung von Jacobi veröffentlicht wurde.

Nach einer Zusammenstellung derjenigen Determinanteneigenschaften, welche in der Theorie des letzten Multiplikators benutzt werden, und einiger Sätze über die Variation der Determinanten wird die Anwendung auf die Bestimmung des Multiplikators für Systeme von Differentialgleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen gemacht, die Funktionaldeterminanten und ihre Benutzung zur Aufstellung der partiellen Differentialgleichung für den Multiplikator behandelt, die zweite Form der den Multiplikator definierenden Gleichung entwickelt und die Multiplikatoren der stufenweise reduzierten Systeme von Differentialgleichungen hergeleitet, sowie die Herstellung des Multiplikators bei Benutzung partikulärer Integrale erörtert. Zu der Aufsuchung des Multiplikators für ein freies System materieller Punkte werden als Beispiele die Anziehung eines Punktes nach einem festen Zentrum im widerstehenden Mittel und im leeren Raum durchgeführt. Jacobi schließt hieran die Herleitung des Multiplikators für die Bewegungsgleichungen unfreier Systeme in der ersten Lagrangeschen sowie in der Hamiltonschen Form und schreitet dann zur Aufstellung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung und ihrer Anwendung auf die isoperimetrischen Probleme. Er zeigt, daß die aus einer vollständigen Lösung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung abgeleiteten Integralgleichungen dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen wirklich genügen, betrachtet den Fall der freien Bewegung besonders und untersucht die Form der Hamiltonschen Differentialgleichung für den Fall, daß in der Kräftefunktion die Zeit nicht explizite vorkommt.

Lagranges Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen behandelt nun Jacobi eingehend und wendet

dieselbe auf die mechanischen Probleme an, welche nur von zwei Bestimmungsstücken abhängen, wozu er als Beispiele die freie Bewegung eines Punktes in der Ebene und die kürzeste Linie auf einer Oberfläche benutzt. Nach einer Reduktion der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung für diejenigen Probleme, in welchen das Prinzip der Erhaltung des Schwerpunkts gilt, wird die Hamiltonsche Methode zur Bestimmung der Bewegung eines Planeten um die Sonne benutzt, und die Lösung in Polarkoordinaten, zugleich aber auch durch Einführung der Abstände des Planeten von zwei festen Punkten entwickelt. Nachdem zum Zwecke der Behandlung mechanischer Probleme mittels elliptischer Koordinaten die geometrische Bedeutung derselben sowie die Anwendung derselben für die Bestimmung der Oberfläche des Ellipsoids und die Rektifikation seiner Krümmungslinien erläutert worden, behandelt Jacobi mit Hilfe derselben die kürzeste Linie auf dem dreiachsigen Ellipsoid, das Problem der Kartenprojektion und die Anziehung eines Punktes nach zwei festen Zentren. Es wird noch gezeigt, wie man durch Aufsuchung verschiedener vollständiger Lösungen der partiellen Differentialgleichung verschiedene Formen der Integralgleichungen des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems erhält, und auf diesem Wege ein Beweis für das Abelsche Theorem geliefert, und nunmehr geht Jacobi zu allgemeinen Untersuchungen bezüglich der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung und deren verschiedenen Integrationsmethoden über. Von den Sätzen über die simultanen Lösungen zweier linearen partiellen Differentialgleichungen werden Anwendungen auf die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung, insbesondere für den Fall der Mechanik, gemacht und zugleich der Satz von dem aus zwei gegebenen Integralen der dynamischen Differentialgleichungen herzuleitenden dritten Integral entwickelt. Nachdem endlich noch die beiden Klassen von Integralen behandelt worden, welche

man nach der Hamiltonschen Methode für die mechanischen Probleme erhält, und die ein Unterscheidungsmerkmal dafür liefern, ob der Poissonsche Satz zu neuen Integralen führt oder nicht, wird im Zusammenhange die Störungstheorie dargestellt.

Eine schwere Erkrankung hinderte Jacobi, seine Vorlesung zu Ende zu führen. „Bald nach der Rückkehr von seiner Reise nach London und Paris", sagt Dirichlet, „zeigten sich bei Jacobi die Symptome einer leider unheilbaren Krankheit — er schwebte längere Zeit in der größten Gefahr." Nach der Ansicht von Clebsch beabsichtigte er als Schluß der Vorlesung seine Methode der Integration nicht linear partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung vorzutragen, welche sich in einer der oben besprochenen, im Jahre 1838 verfaßten Aufzeichnungen vollständig ausgearbeitet unter seinen nachgelassenen Papieren vorgefunden hat. Clebsch hat in einem Anhange zur Dynamik von Jacobi unter dem Titel „Die Integration der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung" die Lücke zu ergänzen gesucht.

Noch vom Anfange des Winters besitzen wir eine mit dieser Vorlesung im engsten Zusammenhange stehende Aufzeichnung, die aus seinen hinterlassenen Papieren mit Zusätzen und Ergänzungen unter dem Titel „Über die Curve, welche alle von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien eines Rotationsellipsoids berührt" von Wangerin veröffentlicht wurde.

Die geodätischen Linien liefern zwischen je zwei ihrer Endpunkte nicht den kürzesten Weg auf der Oberfläche für die ganze Länge ihrer Ausdehnung, wenn die Oberfläche, auf der sie sich befinden, geschlossen ist, so daß sie sich spiralförmig um dieselbe herumwinden. „Dies ist nicht bloß auf das absolute Minimum zu beziehen, sondern es gilt ebenso auch für das relative, d. h. es wird in den Fällen, in welchen eine kürzeste Linie nicht mehr die

kürzeste zwischen ihren Endpunkten ist, nicht bloß überhaupt andere kürzere geben, sondern es werden sich auch solche darunter befinden, die der Kurve während des ganzen Laufes unendlich nahe bleiben." Auf der Kugel z. B. ist der größte Kugelkreis wirklich kürzeste Linie, wenn die Länge des Bogens nicht 180° erreicht; beträgt der Bogen gerade 180°, so lassen sich unendlich viele gleich große Bogen ziehen, und beträgt der Bogen mehr als 180°, so wird man einen kürzeren Weg erhalten, wenn man von seinen Endpunkten nach irgendeinem Punkte der Kugeloberfläche zwei Bogen größter Kreise zieht, die kleiner als 180° sind, und da man den Kugelpunkt unendlich nahe legen kann, so ergibt sich weder ein Minimum noch selbstverständlich ein Maximum.

Da die von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien sich noch in einem zweiten Punkte schneiden und somit im allgemeinen eine Kurve berühren, so scheint sich dadurch ein Widerspruch zu ergeben, daß diese Linien in den Raum, den sie umhüllen, nicht eindringen können, man also zwischen dem Ausgangspunkte und einem in diesem Raume befindlichen Punkt keine kürzeste Linie ziehen kann, während es doch zwischen je zwei Punkten immer eine kürzeste Linie gibt. Um diesen scheinbaren Widerspruch aufzuklären, untersucht Jacobi jene Berührungskurve für das Erdsphäroid, bei welchem die Exzentrizität als eine sehr kleine Größe angenommen und deren höhere Potenzen vernachlässigt werden. Der von Jacobi ausgesprochene Satz, daß die kürzesten Linien nur von dem gemeinschaftlichen Ausgangspunkte bis zu ihrem Berührungspunkte mit der Enveloppe wirklich relative Minima sind, wird von Wangerin bestätigt.

Noch in den Weihnachtsferien fühlte Jacobi sich ziemlich arbeitskräftig und nahm die durch die ungeheure wissenschaftliche Produktion unterbrochene Korrespondenz mit seinen Freunden wieder auf. Am 14. Januar 1843 schrieb ihm Lamé,

für den sich Jacobi bei der Besetzung einer Pariser Professur sehr interessierte: „... Une ère nouvelle datera, dans l'histoire des mathématiques, de vos recherches, de celles d'Abel, et surtout de l'ouvrage, où vous avez si bien resumé la belle création des transcendantes elliptiques. Ces recherches ont d'abord été regardées par plusieurs bons géomètres comme prouvant uniquement la puissance de génie et la prodigieuse sagacité de leurs auteurs, mais comme devant offrir peu d'applications utiles ...“

Aus demselben Monat stammt wahrscheinlich auch eine Aufzeichnung, die Heine unter dem Titel „Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird“ veröffentlicht hat, und welche Überlegungen enthält, die Jacobi zum Teil schon im Jahre 1839 angestellt hatte. Sind a, a_1, a_2 unbestimmte Zahlen, $l_0, m_0, l_1, m_1, l_2, m_2, \ldots$ gegebene Größen, ferner $a + l_0 a_1 + m_0 a_2 = a_3$, $a_1 + l_1 a_2 + m_1 a_3 = a_4$, ... so kann man a, a_1, a_2 durch a_i, a_{i+1}, a_{i+2} und umgekehrt in der Form ausdrücken $a = p_i a_i + q_i a_{i+1} + r_i a_{i+2}$, $a_1 = p_i' a_i + \cdots$, $a_2 = p_i'' a_i + \cdots$, und $a_i = P_i a + P_i' a_1 + P_i'' a_2$, $a_{i+1} = P_{i+1} a + \cdots$, $a_{i+2} = P_{i+2} a + \cdots$ Man sieht leicht, daß die Determinante des ersten linearen Gleichungssystems unverändert bleibt, wenn man den Index i um eine Einheit vermehrt, und sie wird daher, da sie für $i = 0, 1, 2$ den Wert 1 hat, stets diesen Wert haben. Wenn nun u_0, v_0, w_0 drei gegebene positive Größen sind, deren größte w_0 ist, so bestimme man l_0 und m_0 als die den Brüchen $\frac{v_0}{u_0}$, $\frac{w_0}{u_0}$ nächstkleineren ganzen Zahlen; setzt man dann $v_0 - l_0 u_0 = u_1$, $w_0 - m_0 u_0 = v_1$, $u_0 = w_1$, und bezeichnet ähnlich mit l_1 und m_1 die den Brüchen $\frac{v_1}{u_1}$, $\frac{w_1}{u_1}$ nächstkleineren ganzen Zahlen usw.; bestimmt man so allgemein aus u_i, v_i, w_i die Größen l_i und m_i als die den Brüchen $\frac{v_i}{u_i}$, $\frac{w_i}{u_i}$ nächstkleineren ganzen Zahlen und mit Hilfe derselben wieder u_{i+1},

v_{i+1}, w_{i+1}, so folgt $w_i > u_i$, $w_i > v_i$, mithin w_i immer als die größte der drei Zahlen u_i, v_i, w_i, und man erhält so mit Hilfe der den obigen analogen Beziehungen $u_i = p_i u_0 + p_i' v_0 + p_i'' w_0, \ldots$ und $u_0 = P_i u_i + P_{i+1} v_i + P_{i+2} w_i, \ldots$ in den Brüchen $\frac{P'_{i+2}}{P_{i+2}}, \frac{P''_{i+2}}{P_{i+2}}$, welche denselben Nenner besitzen, zwei Näherungswerte für die Größen $\frac{v_0}{u_0}$ und $\frac{w_0}{u_0}$. Jacobi entwickelt nun die reellen Wurzeln einer kubischen Gleichung durch kettenbruchähnliche periodische Algorithmen ähnlich, wie die quadratischen Irrationellen durch periodische Kettenbrüche charakterisiert sind, nachdem er bereits im Jahre 1839 Dirichlet und Borchardt mitgeteilt hatte, daß man bei $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{4}$ nach einigen unregelmäßigen Anfangsgliedern zuletzt wirklich auf Perioden geführt wird.

Noch am 5. Februar war er imstande, der Berliner Akademie einen „Bericht über neue Entwicklungen in der Störungsrechnung“ zu senden, in welchem er als Zweck derselben die Entwicklung der störenden Kräfte nach den Vielfachen der mittleren Anomalien bezeichnete, und den Mangel an Übersicht und Klarheit der Laplaceschen Entwicklungsmethode in betreff der Größen, welche man vernachlässigt, zu beseitigen suchte; „die Bestimmung der Koeffizienten durch doppelte mechanische Quadraturen, welche in vieler Hinsicht sich empfiehlt, ist eine ganz allgemeine Methode; man kann es gewissermaßen immer als etwas Übertriebenes ansehen, sich bei Behandlung eines besondern Problems einer allgemeinen Methode zu bedienen, und darf die Hoffnung nicht fahren lassen, es werde eine ganz bestimmte, grade für das besondere Problem passende Methode geben.“

Nun aber brach Jacobi, der sich schon seit Beginn des Jahres krank gefühlt, völlig zusammen. „Jacobi ist seit mehreren Wochen unpäßlich“, schreibt Bessel am

14. Februar 1843 an Gauss, „die nähere Veranlassung davon ist eine Erkältung, die an sich selbst wenig bedeutet und daher von uns für ein geringes Übel angesehen worden ist; allein sie hat ein länger vorhandenes weit ernsthafteres Übel deutlich hervortreten lassen — eine Harnruhr, die leider sehr oft zerstörend endigt.“ Jede ernstere Arbeit mußte zunächst aufhören, nur auf den beständigen mündlichen und brieflichen Verkehr mit Bessel, der sich jetzt viel mit Kugelfunktionen beschäftigte und zu den ältesten Arbeiten Jacobis aus dem Jahre 1826 seine Zuflucht nahm, wollte er nicht verzichten; „welch' liebenswürdige Abhandlung“, schreibt ihm Bessel am 28. März, „ist die in Crelle II. S. 223! Oben S. 225 findet sich eine kostbare Formel, welche alles Erforderliche leistet ... Also ist auch das Potential eines beliebigen Rotationssphäroids durch Ihre Formel in aller Schärfe auszudrücken.“

Dirichlet erhielt sogleich ausführliche Nachrichten über den wahren Charakter der Krankheit und wurde von den schwersten Besorgnissen für die Zukunft seines großen Freundes ergriffen. Am 26. März schreibt er ihm: „Da Sie als Reconvalescent auf schmale Kost gesetzt sein und auch nicht die Erlaubniß haben werden, viel zu arbeiten, so denke ich mir, daß der Umgang mit mir eine passende Nahrung für Sie sein würde, und frage daher bei Ihnen an, ob Sie nichts dagegen haben, daß ich in den bevorstehenden Ferien auf etwa 14 Tage nach Königsberg komme. Ich erbitte mir hierüber Ihren baldigen ganz freimüthigen Bescheid und füge nur noch hinzu, daß, wenn ich Ihnen jetzt nicht gelegen bin, ich dies nur als einen Aufschub betrachten werde und dann für nächsten Herbst auf einige privatissima am Strande der Ostsee rechne.“

Auf die freundliche Einladung Jacobis und dessen Frau reiste Dirichlet sogleich nach Königsberg und verweilte 14 Tage bei seinem Freunde, dem er nach seiner Rückkehr am 19. Mai schrieb: „Daß ich seit beinah 3 Wochen heim-

gekehrt, Ihnen noch nicht geschrieben und Ihnen und Ihrer verehrten Gattin für den überaus angenehmen und erquicklichen Aufenthalt in Ihrem Hause noch nicht gedankt habe, hat darin seinen Grund: Der erschöpfende Bericht des Herrn Prof. Cruse ist erst 8 Tage nach meiner Rückkunft hier eingetroffen; ohne Zeitverlust habe ich denselben Schönlein übergeben und von diesem erst gestern die beiliegende gutachtliche Äußerung erhalten, der ich nach mündlicher Mittheilung noch Folgendes beizufügen beauftragt bin: Schönlein ist der Meinung, daß Sie vor Ende August über die Alpen gehen, um sich in den folgenden 2 Monaten in Oberitalien zu acclimatisiren und den Winter im Süden zubringen. Er wünscht aber, daß Sie sich vor Ende oder vielmehr gegen die Mitte des Monats Juni hier einfinden. Außerdem hat er hinzugefügt, daß, wenn Sie hinsichtlich der zu unternehmenden Reise an Sn. Majestät den König ein Gesuch richten, Sie sich in demselben auf ihn berufen möchten . . .“

Einige Tage vorher hatte Jacobi seinem Bruder in Petersburg mitgeteilt, daß er schwer leide; „übrigens habe ich den ganzen Winter meine diesmal großen und schwierigen Vorlesungen über meine neuen Methoden der analytischen Mechanik gehalten. Auch geht es eigentlich mit dem Arbeiten ziemlich, aber bloß hier und da herumzuwühlen, wogegen ich den absolutesten Widerwillen habe, irgend etwas auszuarbeiten . . .! Dirichlets 16tägiger Aufenthalt ist mir eine große Erquickung gewesen . . . er hat etwa 60 Bogen Zahlentheorie von mir mitgenommen, um zu sehen, wie viel noch bis zur Herausgabe dabei zu thun ist; denn ich bin ganz außer Stande, so etwas jetzt auch nur anzusehen . . . Ich schicke für die Petersburger Akademie eine kleine Note mit, welche die ganze Theorie der Abelschen Transcendenten auf den Kopf stellt.“

Die seinem Bruder geschickte Note erschien in der Petersburger Akademie als „Extrait d'une lettre de Mr.

Jacobi à Mr. Hermite“ unter dem Titel „Note sur les fonctions Abéliennes“, in welcher er zeigt, daß, wenn $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x)$, $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Pi_1(x)$, X vom 5. oder 6. Grade und $\Pi(x) + \Pi(y) = u$, $\Pi_1(x) + \Pi_1(y) = v$ gesetzt werden, und man die hierdurch bestimmten Größen, wenn $v = 0$ mit x', y', wenn $u = 0$ mit x'', y'' bezeichnet, sich aus den hieraus folgenden Beziehungen $\Pi(x') + \Pi(y') + \Pi(x'') + \Pi(y'') = u = \Pi(x) + \Pi(y)$ und $\Pi_1(x') + \Pi_1(y') + \Pi_1(x'') + \Pi_1(y'') = v = \Pi_1(x) + \Pi_1(y)$, worin x und y algebraische Funktionen von x', y', x'', y'' sind, ergibt, daß die Umkehrungsfunktionen $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$ sich algebraisch durch die vier Funktionen $\lambda(u, 0)$, $\lambda(0, v)$, $\lambda_1(u, 0)$, $\lambda_1(0, v)$ ausdrücken lassen. Eine spätere hierauf bezügliche, ein wenig unklare Bemerkung Eisensteins, daß man, wie die sin am der Quotient von zwei Transzendenten ist, für die Abelschen Funktionen als Umkehrungsfunktionen den Quotienten von Quotienten betrachten müsse, berichtigt Jacobi in einer Nachschrift vom Oktober 1845, aus der Schumacher am 29. Dezember 1845 in einem Briefe an Gauss nichts weiter mitzuteilen weiß als: „in dem letzten Stücke von Crelle's Journal sehe ich einige Bemerkungen Jacobi's gegen Eisenstein, die eben nicht auf ein besonders freundschaftliches Verhältniß schließen lassen.“

Am 20. Mai suchte Dirichlet Humboldt in Potsdam auf, um ihn für die vom Könige zu bewilligende Reiseunterstützung zu interessieren, und Humboldt schreibt schon am 28. Mai an Jacobi:

„Bei dem Namen, den Sie edler Freund und College verherrlicht haben, bei dem europäischen Antheil an Ihren Leiden, bei den edlen menschlichen Gesinnungen des Königs, der sich erinnert, wie Ihr und unseres Bessels Auftreten in England und Frankreich im verflossenen Jahre den vaterländischen Ruhm erhöht und erweitert haben, ist es mir

leicht gewesen, Ihren Wunsch zu erfüllen. Ich erhielt gestern morgen (Sonnabend d. 27.) Ihre theuren Zeilen. Da wir hier wegen Anwesenheit des ganzen Mecklenburg-Schwerinschen Hofes wie der Leuchtenberge in großer Agitation leben, so konnte ich (obgleich im Schlosse wohnend) nur an den König schreiben, wie es mir mein Herz eingab. Es geschah in derselben Stunde; ich hatte einen sehr mäßigen Geldvorschlag gemacht, bis 1500 Thaler. Schon vor Tisch war die Bewilligung an den Staatsminister von Thiele abgegangen. Der König sagte mir am Abend, er berechtige Sie, bis auf zweitausend Thaler zu rechnen, es solle Ihnen ein Credit auf 2000 Thaler zur Italienischen Reise eröffnet werden, er habe größte Beschleunigung anbefohlen. Als ich beim Schlafengehen ihm nochmals dankte, setzte er hinzu: wie konnten Sie glauben, ich würde anders handeln? Über das Formelle des kleinen Finanzgeschäfts kann ich Ihnen nichts sagen, da Herr v. Thiele nicht hier ist, und ich den König gestern Abend nicht durch Fragen plagen wollte. Treten Sie ja bald, recht bald Ihre Reise an und empfangen Sie den Ausdruck meiner herzlichsten, sehnlichsten Wünsche. Ich fürchte die Post zu verfehlen. Sagen Sie unserm Bessel, dem ich tief verschuldet bin, die süßesten Worte von mir. Er und ich, wir wollen Ihren Muth stärken . . .“

Schon am folgenden Tage, den 29. Mai, schrieb der König aus Sanssouci an Jacobi:

„Mit lebhaftem Bedauern habe ich von Ihrem mißlichen Gesundheitzustande Kenntniß erhalten, zu meiner Beruhigung aber auch zugleich die Versicherung, daß Sie von dem Aufenthalte in einem milderen Klima Ihre gänzliche Wiederherstellung erwarten dürfen. In der Voraussetzung, daß Sie sich hierzu baldmöglichst entschließen werden, habe ich den Oberpraesidenten Bötticher autorisirt, Ihnen zur Bestreitung der Reisekosten mit den nöthigen Mitteln zu Hülfe zu kommen und wünsche den besten Erfolg dieser Reise. Friedrich Wilhelm.“

Der Entschluß Jacobis, dem Rate Schönleins zu folgen, war unmittelbar gefaßt, und die Abreise für den Anfang des Juli festgesetzt; schon die Aussicht auf einen längeren Körper und Geist stärkenden Aufenthalt gab Jacobi wieder Mut zur Arbeit und Lust zum Dozieren. Wiewohl er für den Sommer gar keine Vorlesungen mehr angekündigt, konnte Seidel doch am 27. Mai seinen Eltern berichten: „Prof. Jacobi wird uns nun doch noch ein Privatissimum lesen, und zwar kann ich sagen, daß dies recht eigentlich mir zu Ehren geschieht, obwohl auch Heine es hören wird; er wird nämlich darin die Grundzüge seiner Methoden zur Bestimmung der Störungen in den Bewegungen der Himmelskörper geben, und überhaupt diejenigen Sachen, von welchen er wünscht, daß ich sie nachher weiter ausarbeite und zum Druck redigire. Man kann dies daher kein eigentliches Colleg nennen, sondern er giebt ihm nur diesen Titel, um wenigstens der Form nach auch in diesem Semester an der Universität thätig zu sein; die Stunde ist jetzt auf Montag 3—4 festgesetzt, in seinem Hause, doch so, daß er sich nicht allzusehr an diese Stunde bindet, so wie er auch der Regel nach länger als bloß 1 Stunde vortragen wird."

Am 29. Mai sandte er eine Arbeit an Crelle betitelt „Über die Entwicklung des Ausdrucks $\left(a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta - \vartheta')] + a'^2\right)^{1/2}$", deren Inhalt im wesentlichen im folgenden Jahre in dem Giornale Arcadico unter dem Titel „Sopra le funzioni di Laplace, che risultano dallo sviluppo dell' espressione $\left(a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta - \vartheta')] + a'^2\right)^{-\frac{1}{2}}$" reproduziert wurde. Von der Beziehung ausgehend

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\eta}{A + iB\cos\eta + iC\sin\eta}$$

beweist Jacobi den von Legendre gegebenen Satz, daß, wenn

$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa' \cos\varphi + a'^2}} = \frac{1}{a} + X_1 \frac{a'}{a^2} + X_2 \frac{a'^2}{a^3} + \cdots$, und P_n dieselbe Funktion von ω wie X_n von φ ist, die Entwicklung gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{a^2 - 2aa'[\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta - \vartheta')] + a'^2}} =$$

$\frac{1}{a} + P_1 X_1 \frac{a'}{a^2} + P_2 X_2 \frac{a'^2}{a^3} + \cdots$, worauf die Untersuchungen von Laplace über die Entwicklung der Funktionen zweier Winkel beruhen, und leitet hieraus nach jetzt allgemein bekannten funktionentheoretischen Methoden durch Reihenentwicklung die Beziehung her $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos m\eta\, d\eta}{(\cos\omega + i\sin\omega\cos\eta)^{n+1}}$

$$= (-1)^m \frac{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)}{\Pi(n)\,\Pi(n)} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\omega + i\sin\omega\cos\eta)^n \cos m\eta\, d\eta$$

$$= (-1)^m 2^{-n} \frac{\Pi(n-m)}{\Pi(n)\,\Pi(n)} \sin^m\omega \frac{d^{n+m}(p^2-1)^n}{dp^{n+m}}, \text{ worin } p = \cos\omega$$

und $n \geqq m$ ist.

Ein von Bruns veröffentlichtes Bruchstück aus dem Nachlasse Jacobis stammt aus dieser Zeit, schließt sich in seinem 1. Teile der ebenerwähnten Arbeit an, und beschäftigt sich weiter mit der Entwicklung der Störungsfunktion, für welche er die der störenden Kräfte nicht nach den Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen ausführen und deren Koeffizienten auch nicht, was bisher in wenig naturgemäßer Weise geschehen, durch doppelte mechanische Quadraturen bestimmen will. Er findet, wenn E und E' die beiden exzentrischen Anomalien und ϱ die gegenseitige Distanz der beiden Planeten bezeichnet,

$$\varrho = \sqrt{\begin{aligned}&a + b\cos E + c\sin E + d\cos E' + e\sin E' + f\cos E\cos E' + g\cos E\sin E' \\ &+ h\sin E\cos E' + i\sin E\sin E' + k\cos 2E + l\cos 2E'\end{aligned}},$$

worin $a, b, \ldots$ auszurechnende Zahlenwerte sind, und erhält die Störungen der beiden Planeten durch die Integrale

$$\int (\partial a + \partial b \cos E + \partial c \sin E + \cdots) \frac{dt}{\varrho^3}, \quad \int \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial E} \partial E\, d\, t,$$

$\int \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\partial E'} \partial E' dt$ ausgedrückt, worin ∂a, ∂b, ... die Variationen der Größen a, b, ..., und daher durch die Variationen der Elemente, multipliziert in Zahlenwerte, darzustellen sind. Das Problem, die unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen nach den Vielfachen der beiden mittleren Anomalien zu entwickeln, zerlegt er in zwei Teile, indem er diese Entwicklung zuerst in den exzentrischen Anomalien zu machen und dann diese nach den Besselschen Methoden in die mittleren umzusetzen sucht, und stellt zum Zwecke der Entwicklung der Integrale neue, „auf einem merkwürdigen und sehr allgemeinen, aus der Theorie der elliptischen Transzendenten entlehnten, Prinzipe beruhende Approximationsformeln“ auf. Jacobi berührt hier schon früher von ihm behandelte interessante Fragen über die Zurückführung von Doppelintegralen auf einfache und fügt in bezug auf die nach zwei Winkeln fortschreitenden Entwicklungsformen die Bemerkung hinzu: „Ich habe im vorigen Sommer einen solchen verallgemeinerten Algorithmus (ein kettenbruchähnlicher Algorithmus, welcher auf die Berechnung der Coefficienten der nach zwei Winkeln fortschreitenden Entwicklung Anwendung findet) auf die Kubikwurzeln ganzer Zahlen angewendet und die Algorithmen in den freilich nicht zahlreichen Beispielen, die ich berechnete, periodisch gefunden; zu gleicher Zeit erhält man dadurch die Auflösung der Gleichung $\left(x+y\sqrt[3]{n}+z\sqrt[3]{n^2}\right)\left(x+\alpha y\sqrt[3]{n}+\alpha^2 z\sqrt[3]{n^2}\right)$ $\left(x+\alpha^2 y\sqrt[3]{n}+\alpha z\sqrt[3]{n^2}\right)=1$ in ganzen Zahlen. Eine Badereise hinderte mich, diese interessante Untersuchung zu verfolgen, und jetzt bin ich ganz davon abgekommen.“

Noch kurz vor seiner Abreise aus Königsberg sandte er am 12. Juni seine letzte Arbeit von dort aus an

Crelle, betitelt „Über die zur numerischen Berechnung der elliptischen Funktionen zweckmäßigsten Formeln", zu der er durch Aufstellung von Tafeln zum Zwecke seiner Störungsrechnungen geführt worden. Er fügt zu den Formeln, die er in den Fundamenten aufgestellt, hier noch solche, welche zur Berechnung einzelner Werte oder von Tafeln vorzugsweise bequem sind, und leitet u. a. aus $tg\,\frac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}-x\right)$ $=\frac{(q-q^3)\sin 2x-(q^6-q^{10})\sin 4x+(q^{15}-q^{21})\sin 6x+\cdots}{1-(q+q^3)\cos 2x+(q^6+q^{10})\cos 4x-\cdots}$, indem er $q=b^8$ setzt, die Entwicklung her: $\frac{1-\sqrt{\varkappa'}}{1+\sqrt{\varkappa'}+\sqrt{2(1+\varkappa')}}$ $=\frac{q-q^3-q^{15}-\cdots}{1-q^6-q^{10}-\cdots}=\frac{\Sigma\pm b^{(8h\pm 3)^2}}{\Sigma\pm b^{(8h\pm 1)^2}}$. Es werden sodann rasch konvergierende Ausdrücke für die ganzen Integrale 2. Gattung hinzugefügt, und endlich noch gezeigt, daß man bei Berechnung der elliptischen Integrale mit Vorteil die Gaussschen Tafeln anwenden kann, in welchen für einen in einer Kolumne als Argument gegebenen Wert von $\log x$ der Wert von $\log(1+x)$ in der anderen Kolumne sich findet.

Am 24. Juni zeigte Dirichlet Jacobi an, daß auch seine Frau den Winter in Italien zubringen werde, und am 3. Juli konnte Jacobi seinem Bruder zu seiner großen Freude melden: „Das Beste bei der Sache ist aber ein ausgezeichneter Begleiter, der mir geworden ist, ein junger, liebenswürdiger, talentvoller, unabhängiger und sehr vermögender Mathematiker Namens Borchardt, welchen ich gestern promovirt habe, und welcher dazu besonders nach Königsberg gekommen war. Dirichlet wird den ganzen Winter mit seiner Familie ebenfalls in Italien zubringen."

Am 9. Juli trennte sich Jacobi schweren Herzens von seiner Familie, bei der er seine Mutter zurückließ. Er hielt sich zunächst einige Wochen in Berlin auf, wo er Schönlein konsultierte und viel mit seinen Freunden verkehrte, und trat in den ersten Tagen des August seine Reise in

den Süden an. „... Aber zwei der interessantesten Tage", schreibt er seiner Frau aus Baden-Baden am 5. August, „habe ich in Gotha zugebracht mit dem dortigen Astronomen Hansen, vor dessen Charakter mir Bessel immer bange gemacht. Wir sind nämlich in der Theorie der himmlischen Störungen Nebenbuhler, freilich in der Art, daß er immerfort die umfassendsten Arbeiten darüber publicirt, und ich zu meinen Publicationen noch immer nicht gekommen bin. Es gab daher viele interessante Berührungspunkte; er entwickelte gegen mich große Freundlichkeit und Herzlichkeit; wenn mir irgend etwas auf meiner Reise zustieße, sollte ich zu ihm kommen und bei ihm wohnen, es wären die glücklichsten Tage seines Lebens gewesen ... Borchardt bekam, als er nach Gotha kam, einen schweren Ohnmachtsanfall ..."

Er und Borchardt trafen mit Dirichlet und Frau in Freiburg zusammen und reisten über den Splügen nach Chiavenna, besuchten den Comer See, den Lago Maggiore, Mailand, Genua, wo sie am 13. September eintrafen, und von wo aus Jacobi Bessel mitteilte, daß sich seine Gesundheit bedeutend gebessert habe, und von dort nach Florenz, wo Jacobi mehrere Wochen verweilte. „Heute Abend", schreibt Frau Dirichlet ihrer Schwester, „sind wir bei Jacobi und Borchardt auf Cigarren und Wiener Flügel eingeladen, mit obligatem Mondschein; sie haben eine Terrazza nach dem Arno ... Die Soirée bei Borchardt sehr magnifique ... Jacobi reist auf Verkündigungen, womit er sehr geneckt wird ..." Diese Bemerkung bezog sich auf Jacobis Besuch der Naturforscherversammlung in Lucca, von der er seiner Frau eine kurze Schilderung gab: „... Von namhaften Gelehrten, die mich interessirten, waren nur Melloni, Morsotti, Matteucci, Carlini, Bianchi da. Ich hatte die Kühnheit einmal eine Vorlesung in französischer Sprache zu improvisiren; es schien mir Sache der Artigkeit irgend eine Mittheilung zu machen, und etwas

aufzuschreiben hatte ich weder Zeit noch Ruhe. Man erkannte dies auch durch Beifallklatschen an, als ich auftrat. Bei den mancherlei Ehrenbezeigungen, die mir hier widerfahren, ist es eine unliebliche und abkühlende Bemerkung, daß vielleicht in ganz Italien nicht ein einziger ist, der auch nur eine Zeile von meinen Arbeiten gelesen hat; sie sprechen es alle den Franzosen nach, und mein ganzer Ruhm, da man die alte Legendre'sche Geschichte nicht mehr kennt, rührt von den viel verbreiteten Comptes rendus her, welche die Pariser Akademie von ihren Sitzungen herausgiebt, und worin meine Arbeiten häufig citirt werden ... Bei mir kommt nun noch die ewige Verwechslung mit Moritz hinzu: 'Monsieur, nous avons ici dans notre Musée un jeune homme, qui s'est beaucoup occupé de vos procédés de dorure', 'Pardon, Monsieur, je ne suis pas moi, je suis mon frère' ... Den letzten Tag in Lucca und auf der Fahrt nach Pisa beschlossen wir, daß auch Borchardt dort mit einer Vorlesung debutiren sollte; es wurden daher 2 Tage in Pisa dazu von ihm angewandt, einen französischen Auszug aus seiner Doctorarbeit zu machen, während ich mich von dem trouble in Lucca erholte und einmal wieder für mich einige mathematische Formeln kritzelte. Ich ließ Borchardt allein nach Lucca zurückfahren, wo er alles vortrefflich abmachte."

Am 16. November traf Jacobi in Rom ein.

„Als Jacobi, von einer gefährlichen Krankheit erfaßt, auf Anraten der Ärzte zu seiner Wiederherstellung das mildere Klima Italiens aufsuchen mußte", sagt Kummer in seiner Gedächtnisrede auf Dirichlet, „ergriff Dirichlet, der schon seit längerer Zeit eine Reise nach Italien beabsichtigt hatte, die Gelegenheit, mit Jacobi zusammen einen Winter in Rom zu verleben, und reiste im Herbste des Jahres 1843 mit seiner ganzen Familie dahin ab. Da zugleich auch unsere Kollegen Herr Steiner und Herr Borchardt diesen Winter in Rom zubrachten, so war die

deutsche Mathematik in dieser Zeit dort sehr glänzend und vielseitig vertreten ... Das gemeinschaftliche Interesse der Erkenntnis der Wahrheit und der Förderung der mathematischen Wissenschaften blieb die feste Grundlage des freundschaftlichen Verhältnisses, in welchem Jacobi und Dirichlet hier zusammen lebten. Sie sahen sich fast täglich und verhandelten miteinander allgemeinere oder speziellere wissenschaftliche Fragen, deren geistvolle Erörterung gerade durch die Verschiedenheit der Standpunkte, von denen aus beide das Gesamtgebiet der mathematischen Wissenschaften überschauten, ein stets neues und lebendiges Interesse behielt. Jacobi, der durch die wunderbare Fülle seines Geistes nicht minder als durch die Tiefe seiner mathematischen Forschungen und den Glanz seiner Entdeckungen sich überall die ihm gebührende Anerkennung zu erwecken wußte, genoß damals einen weit ausgebreiteteren Ruf als Dirichlet, der die Kunst, sich selbst geltend zu machen, nicht besaß, und dessen hauptsächlich nur die schwierigsten Probleme der Wissenschaft behandelnde Schriften einen weniger ausgebreiteten Kreis von Lesern und Bewunderern hatte."

Der erste Brief Jacobis aus Rom an seine Frau ist vom 9. Dezember 1843 datiert und schildert in lebendigen Farben den dortigen Aufenthalt; Steiner ist sein steter Begleiter bei der Besichtigung der Kunstsammlungen, mittags treffen sie mit Borchardt zusammen, abends wird der Tee bei Dirichlet genommen. „Endlich kam noch unser hiesiger Leibmathematiker, der Abbé Tortolini, der das in meinen Augen große Verdienst hat, alle meine Arbeiten zu kennen, und garnicht weiß, wie er seine Freude und Verehrung an den Tag legen soll, auch mir alle italienischen Werke, nach denen ich frage, gleich schenkt, so daß Richelot mit Neid erfüllt werden würde, wenn er hört, daß ich so die beiden Bände Fagnano, Ruffini's Werk über die Gleichungen, Mascheroni's Anmerkungen zu

Euler's Integralrechnung, Bücher, die ich mir lange gewünscht, unter andern geschenkt bekommen habe ... Borchardt trägt am Abend italienische Lieder vor, wirkt auch bei öffentlichen Concerten mit ... Die Vergolder hier sind ganz untröstlich, daß ich nicht Moritz bin. Man kann wirklich sagen, daß populärer berühmt jetzt nicht so leicht jemand ist ..."

In allen Kreisen der römischen Gesellschaft genoß der große Mathematiker das verehrungsvollste Entgegenkommen; auch zum Papste Gregor XVI wurde er befohlen.

„Von den Mathematikern, welche ich auf meiner Reise kennen lernte", schreibt er am 16. Januar 1844 an Bessel, „war nicht der uninteressanteste der Pabst, bei dem Dirichlet und ich eine Audienz von über einer halben Stunde hatten, die der 79jährige heitere und rüstige Mann stehend absolvirte. Da Sie eine Schwäche für gekrönte Häupter haben (wie denn Herr von Goethe schon richtig in einem Carmen sagt: Aus der Welt ist derzumalen Übermacht nicht zu verbannen. Mir gefällt es zu verkehren mit Gescheuten und Tyrannen), so werden Sie unsere Bewunderung gewiß theilen, wenn Sie hören, daß er nicht nur von Newton, Kepler, Copernicus, Laplace mit großer Theilnahme sprach, sondern genau anzugeben wußte, daß sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Cuben der mittleren Entfernungen verhalten. Es war interessant, daß er von Copernicus mit der größten Bewunderung sprach, doch schien er sein System für noch nicht streng bewiesen zu halten, sondern wollte, daß es dieses wäre, nur zugestehen, wenn man eine Parallaxe eines Fixsternes entdeckt hätte. Es war ihm und mir daher interessant, ihm sagen zu können, daß ein berühmter Landsmann von mir durch jahrelange unermüdliche und scharfsinnige Arbeit eine solche entdeckt und nach dem einstimmigen Urtheile aller Astronomen (beim Pabst muß man immer auf Autoritäten zurückgehen) außer Zweifel gestellt hätte. Dieselbe Gunst

wie Copernicus schien bei ihm Galilei noch nicht zu theilen, vermuthlich weil in der neuesten Zeit wieder vielfältig seine Geschichte zum Angriff auf die Päbste benutzt worden. Er führte sogar mit einer Art von sehr unpatriotischem Triumphe an, Kepler sei dem Galilei in Entdeckung der Umdrehung der Sonne um ihre Axe um 15 Jahre zuvorgekommen. Auch Halley und die Kometen ließ er nicht unerwähnt und citirte viele lateinische Verse zu Newton's Ehre; als ich ihm erzählte, daß der Astronom und ehemalige sächsische Premierminister v. Lindenau in Rom sei, war er so ungalant gegen Sachsen, ein dictum Kepler's zu citiren, daß ihm eine astronomische Wahrheit lieber als das Kurfürstenthum Sachsen sei. Damit Sie aber nicht glauben, daß sich Gregor XVI bloß mit Anwendungen beschäftigt, so sprach er auch über die verschiedenen Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes, wie die Beweise durch Proportion zwar einfacher, aber den Kindern die anderen mit Constructionen weit einleuchtender seien. Kurz Sie werden es billigen, wenn ich einem so einsichtigen Mann voll Verehrung die Hände küßte, während Dirichlet als Katholik einige so ungeschickte Versuche machte, ihm die Füße zu küssen, daß der Pabst es nicht dazu kommen ließ."

Jacobi fühlte, daß sich sein Gesundheitszustand während des Aufenthaltes in Rom wesentlich besserte, und er dachte mit einer gewissen Angst und Verzagtheit an eine etwaige Rückkehr nach Königsberg; da erhielt er am 9. Februar eine Mitteilung aus Berlin, die ihn in freudige Aufregung versetzte. „Ich erhalte soeben", schreibt er seiner Frau, „von Dr. Philipp, Schönlein's Gehülfen, einen Brief, der folgende Worte enthält: Ich bin von Schönlein beauftragt, E. H. zu melden, daß jetzt kein Grund Ihrerseits mehr vorhanden ist, die Rückkehr nach Königsberg zu fürchten, da bei dem Könige Ihre Versetzung nach Bonn eine fast beschlossene Sache. Erst vor einigen Tagen hätte der König

über diese Angelegenheit mit ihm gesprochen und dabei geäußert, er sei nicht egoistisch genug, um Sie in Berlin zurückzuhalten, woselbst das Klima nach Schönlein's Dafürhalten, wenn auch weniger ungünstig, wie das Königsberger, doch gewiß nicht so wohlthätig auf Ihren Zustand einwirken würde wie das Klima in Bonn. Herr von Humboldt wird wohl schon E. H. von dieser Entscheidung des Königs Kenntniß gegeben haben. — Da ich von dieser Sache nicht mehr als Du weiß, so bin ich dadurch sehr überrascht worden, aber angenehm, da ich etwas Königsbergmüde bin . . .“

Mit der Besserung seines körperlichen Befindens erwachte auch sogleich wieder die Lust zu erneuter wissenschaftlicher Arbeit. „Er schrieb“, sagt Dirichlet, „nicht nur während der fünf Monate seines Aufenthaltes in Italien außer mehreren kleinen Aufsätzen, welche in einer wissenschaftlichen Zeitschrift in Rom selbst erschienen, eine wichtige sehr umfangreiche für das Crellesche Journal bestimmte Abhandlung, sondern unternahm auch die Vergleichung der im Vatikan aufbewahrten Handschriften des Diophantus, mit welchem er sich seit längerer Zeit angelegentlich beschäftigt hatte.“

Am 7. März 1844 veröffentlichte er im Giornale Arcadico eine „Sulla condizione di uguaglianza di due radici dell' equazione cubica, dalla quale dipendono gli assi principali di una superficie del second' ordine“ betitelte Arbeit, in welcher er auf das Hauptachsenproblem der Flächen 2. Grades näher eingeht, wonach man durch die Substitutionen $p = \alpha x + \beta y + \gamma z$, $p' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$, $p'' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$ den Ausdruck $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy$ in $Gp^2 + G'p'^2 + G''p''^2$ transformieren kann, und wofür Kummer gezeigt hat, daß sich der Ausdruck $(G' - G'')^2 \cdot (G'' - G)^2 (G - G')^2$ in die Summe von sieben Quadraten ganzer Funktionen der Koeffizienten $A, B \ldots$ umwandeln läßt. Um die Natur dieses Resultats besser hervortreten

zu lassen, drückt Jacobi die Basis eines jeden dieser sieben Quadrate als Funktion der Größen G, G', G'' und der Substitutionskoeffizienten aus, woraus sich das Resultat unmittelbar ergibt, indem jeder der sechs Basisausdrücke gleich ist $(G' - G'')(G'' - G)(G - G')$ multipliziert mit einer Funktion der Substitutionskoeffizienten.

In demselben Journal lieferte er am 16. März eine kurze Inhaltsangabe seines in Lucca gehaltenen Vortrages unter dem Titel „Sul principio dell' ultimo moltiplicatore, e suo uso come nuovo prinzipio generale di meccanica", in welchem er das weittragende Theorem verkündet hatte, dessen Ausführung den Gegenstand einer späteren großen Arbeit im Crelleschen Journal bildet: Wenn $dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$ vorgelegt und M irgendeine Größe, welche der Gleichung $\frac{\partial (MX)}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0$ genügt, wenn ferner für das Differentialgleichungssystem alle Integrale mit Ausnahme eines gefunden, und man benutzt die Integralgleichungen $u = \alpha$, $u_1 = \alpha_1, \ldots u_{n-2} = \alpha_{n-2}$, worin $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-2}$ willkürliche Konstanten bedeuten, zur Elimination der Variabeln, so daß $u_i = \alpha_i$ die Gleichung zwischen den Variabeln $x, x_1, \ldots x_{n-i}$ ist, welche zur Elimination von x_{n-i} dient, so wird der Multiplikator der letzten Differentialgleichung $X_1 dx - X dx_1 = 0$ durch den Ausdruck $\mu = \frac{M}{\frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_2}}$ gegeben sein, worin sich vermöge der gefundenen Integrale die Größen X, X_1, μ durch die Variabeln x, x_1 ausdrücken lassen; für die Hamiltonsche Form der Differentialgleichungen der Mechanik ist $M = 1$, und daraus folgt die Anwendung des letzten Multiplikators zur Herstellung des letzten Integrales.

Durch die Briefe seines Hausarztes Professor Cruse wurde Jacobi in Italien auf dem Laufenden bezüglich der Vorkommnisse an der Universität und des Befindens der Seinigen

erhalten und durfte sich, wenn auch hin und wieder nicht unbedeutende Erkrankungen seiner Kinder ihn beängstigten, doch im allgemeinen ruhigen Gemütes nicht bloß der Arbeit, sondern auch dem Genusse der Natur und der Kunst hingeben, und besprach in vielen und ausführlichen hochinteressanten Briefen mit staunenswertem Verständnis die Kunstschätze Roms. Am 11. April schildert er seiner Frau in lebendigen Farben die Tollheiten des römischen Karnevals, „nur Borchardt ging ganz in diesen Wogen auf und unter; es war wirklich ein Vergnügen, einen Menschen zu sehen, dem die Götter gewährt haben, über die gewöhnliche Zeit so jung zu bleiben — denn er wurde in dieser Zeit 27 Jahr. Er konnte garnicht begreifen, wie man einen andern Gedanken haben könnte . . .“

Ende April ging nun Jacobi in Begleitung von Steiner nach Neapel, wo er drei Wochen verblieb, um all die herrlichen Punkte der näheren und weiteren Umgegend aufzusuchen, verweilte auf der Rückreise noch einige Tage in Rom, mußte sodann wegen stürmischen Wetters und seine Gesundheit gefährdender Seekrankheit einen Teil des Weges nach Genua zu Lande zurücklegen und gelangte über Genf, Basel, Straßburg nach Frankfurt. Von hier aus schreibt er am 13. Juni seiner Frau: „Einen Tag vor meiner Abreise nach Neapel zeigte Melloni mir und Steiner die Hauptexperimente in seinen berühmten Wärmeentdeckungen, wo er in der Wärme das der Reflexion, Brechung und den Farben des Lichtes etc. etc. analoge nachweist, und hätte ich gewünscht, mehr von diesen Dingen zu verstehen . . . In Rom holte ich noch einiges Versäumte nach, meine Zeit wurde aber sehr dadurch verkürzt, daß mich Kaselowski noch einmal malte, obgleich mir das frühere Bild jetzt viel besser gefiel . . .“

Ende Juni traf Jacobi wieder in Berlin ein, und Gauss, dem von einem Freunde über das Befinden Jacobis Bericht erstattet war, schrieb am 7. Juli an Schumacher: „Seiner

Erzählung nach sollen Jacobi's Gesundheitsumstände durch dessen Reise doch nicht gründlich gebessert sein. Wissen Sie vielleicht Näheres darüber?" worauf Schumacher am 16. Juli antwortete: „Erst vor wenigen Tagen erhielt ich einen Brief von Humboldt, aus dem ich Ihnen, in Bezug auf Ihre Jacobi betreffende Anfrage, folgende Stelle, ohne indiscret zu sein, glaube mittheilen zu dürfen: — Jacobi ist herrlich geheilt. Ich glaube, er bleibt hier. Da er dem Könige doch sehr viel kosten muß (2500—3000 Thl., fast soviel wie ein Schelling'scher Philosoph oder Missionär), so ist es rühmlicher, das Ornament in der Hauptstadt zu besitzen. Er ist heiter und miles gloriosus, neben sich im Triumvirate nur noch 2 anerkennend — Gauss und Cauchy, tout le reste lui paraît de la vermine — Ich liebe diese Ausschließungen nicht."

Während sich nun Jacobi in Berlin aufhielt, verkehrt er viel mit Eisenstein, den er in jener Zeit zu schwärmerischer Verehrung hinriß, und der im Juli an Stern schreibt: „Ich habe Jacobi schon mehrmals besucht, man kann herrlich mit ihm umgehen: er ist im Vertrauen der directe Gegensatz von Gauss. Er wird in kurzer Zeit zum Jubilaeum der Universität nach Königsberg reisen und dann mit seiner Familie wiederkommen ... Die Reste der 8^{ten}, 12^{ten} und auch 5^{ten} Potenzen, welche fertig sind, arbeite ich jetzt aus. Dies ist ein Feld, auf dem ich mich ganz frei bewegen kann, denn hier hat selbst Jacobi nichts, wie er mir gesteht ... Auch Jacobi ist ganz meiner Ansicht, daß die Theorie der allgemeinen complexen Zahlen erst durch eine vollständige Theorie der höheren Formen ihre Vollendung erhalten kann ... Ich habe nicht eher geruht, als bis ich meinen geometrischen Beweis des Reciprocitätsgesetzes, der Ihnen so viel Spaß gemacht hat, und der auch, beiläufig gesagt, Jacobi außerordentlich gefällt, von dem Lemma befreit habe, von dem er noch abhängig war."

In der Sitzung der Berliner Akademie am 15. Juli

1844 las Jacobi „Über die Ordnung eines Systems von Differentialgleichungen“, doch wurde dieser Vortrag nicht veröffentlicht; er gab den Inhalt einer aus seinem Nachlaß von Borchardt publizierten Aufzeichnung „De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque“. Jacobi nennt in dieser ein nicht kanonisches oder nicht normales System gewöhnlicher Differentialgleichungen ein solches, in dem die Werte der höchsten Differentialquotienten nicht aus denselben hergeleitet werden können, in welchem Falle die Anzahl der durch die vollständige Integration eingeführten Konstanten oder die Ordnung des Systems immer kleiner ist als die Summe der höchsten Ordnungen der Differentialquotienten, und es soll nun die Ordnung des Differentialgleichungssystems bestimmt werden, ohne durch Differentiation und Elimination das System auf ein kanonisches zurückzuführen. Sind $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\ldots u_n = 0$ gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen x_1, $x_2, \ldots x_n$ und der unabhängigen Variabeln t, $h_\varkappa^{(i)}$ die höchste Ordnung, zu der sich in der Gleichung $u_i = 0$ die Differentationen der Variabeln $x_\varkappa$ erheben, bezeichnet man ferner mit H das größte der $1 \cdot 2 \ldots n$ Aggregate $h_1^{(i_1)} + h_2^{(i_2)} + \cdots + h_n^{(i_n)}$, welche erhalten werden, wenn man für $i_1, i_2, \ldots i_n$ beliebige unter sich verschiedene der Indices $1, 2, \ldots n$ nimmt, so wird H die Ordnung des Systems der vorgelegten Differentialgleichungen oder die Anzahl der willkürlichen Konstanten sein, welche die vollständige Integration derselben einführt. Diesem schon in einer früheren Aufzeichnung ausgesprochenen Satze gibt er hier noch eine andere Form: Bezeichnet man mit $u_\varkappa^{(i)}$ den partiellen Differentialquotienten von u_i genommen nach dem höchsten hierin vorkommenden Differentialquotienten der Variabeln $x_\varkappa$, der also von der Ordnung $h_\varkappa^{(i)}$ ist, und werden von allen Gliedern der Determinante $\sum \pm u_1' u_2'' \ldots u_n^{(n)}$ nur diejenigen $\pm u_1^{(i_1)} u_2^{(i_2)} \ldots u_n^{(i_n)}$ zurückbehalten, in denen die Summe der Ordnungen der Differentialien der einzelnen Variabeln, nach denen in den einzelnen $u_1, u_2, \ldots u_n$ die partielle

Differentiation geschehen ist, den größten Wert H erhält, so wird, wenn das Aggregat der zurückbleibenden Ausdrücke der Determinante mit $(\sum \pm u_1' u_2'' \ldots u_n^{(n)})$ bezeichnet wird, die Ordnug des Systems der Differentialgleichungen $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots u_n = 0$ kleiner sein als H, wenn $(\sum \pm u_1' u_2'' \ldots u_n^{(n)}) = 0$, und es wird die Ordnung dem höchsten Werte H gleich sein, wenn diese Gleichung nicht statthat.

Indem er, wie schon früher, die erste Form der Bestimmung so gestaltet, daß, wenn n^2 Größen $h_\varkappa^{(i)}$ in ein quadratisches Schema von n Horizontal- und n Vertikalreihen geordnet sind, aus allen $1.2 \ldots n$ Verbindungen von n zugleich in verschiedenen Horizontal- und Vertikalreihen gelegenen Größen die gesucht werden, für welche die Summe der n Zahlen den größten Wert hat, reduziert er die Lösung der Aufgabe auf die Aufstellung des Kanons, d. h. einer solchen quadratischen Figur, in welcher die Maxima der verschiedenen Vertikalreihen zugleich in verschiedenen Horizontalreihen stehen, und führt die Auffindung des Kanon wiederum auf das Problem zurück, für n^2 Größen $h_\varkappa^{(i)}$, worin die Zahlen i und $\varkappa$ die Werte $1, 2, \ldots n$ annehmen, die kleinsten n positiven Größen $l', l'', \ldots l^{(n)}$ zu finden von der Art, daß, wenn $h_\varkappa^{(i)} + l^{(i)} = p_\varkappa^{(i)}$ gesetzt, und für jedes $\varkappa$ der größte unter den Ausdrücken $p_\varkappa', p_\varkappa'', \ldots p_\varkappa^{(n)}$ ausgewählt und mit $p_\varkappa^{(i_\varkappa)}$ bezeichnet wird, die Indices $i_1, i_2, \ldots i_n$ alle untereinander verschieden sind.

Am 20. Juli schreibt Jacobi seiner Frau aus Berlin: „Ich darf wohl jetzt meine Versetzung nach Berlin an die Akademie der Wissenschaften mit 3000 Thaler Gehalt (mit Erlaubniß, ohne Verpflichtung an der Universität zu lesen) als ein fait accompli ansehen, indem mir heute der Finanzminister, an dem es noch hing, sagte, daß er nichts einzuwenden hätte und wohl heute die Sache unterzeichnet.“ In der Tat erging auf Grund eines ärztlichen Gutachtens des Geheimrats von Walther, der sich im Gefolge des

Königs von Bayern in Rom befunden und dringend die Versetzung Jacobis aus Königsberg wünschte, am 20. August 1844 aus dem Schlosse Erdmannsdorf an die Staatsminister Eichhorn und Flottwell die Kabinettsorder: „In wohlwollender Berücksichtigung der leidenden Gesundheit des Professor Dr. Jacobi, welche dessen Aufenthalt in Königsberg nach dem Urtheil der Aerzte zur Zeit gefährlich macht, will ich demselben gestatten, bis zur völligen Wiederherstellung in Berlin zu wohnen, damit er daselbst ganz der Wissenschaft leben und an den Vorlesungen der Universität nur in soweit Theil nehmen möge, als er dies selbst mit seinen körperlichen Kräften und seinen wissenschaftlichen Beschäftigungen für verträglich hält. Mit Rücksicht auf die größere Theuerung Berlin's und die durch die Kränklichkeit des p. Jacobi herbeigeführten außerordentlichen Ausgaben, will ich demselben zu seinem Gehalt, welches er aus den Fonds der Königsberger Universität fortzubeziehen hat, für die Dauer seines Aufenthaltes eine jährliche Unterstützung von 1000 Thalern bewilligen, welche auf das Extraordinarium der General-Staatskasse anzuweisen ist. Sollte sich eine passende Gelegenheit finden, den p. Jacobi zu Berlin oder Bonn bei der Universität anzustellen, so haben Sie, der Staatsminister Eichhorn, zu meiner Entschließung zu berichten."

Jacobi reiste darauf nach Königsberg zurück, und schon am 11. September konnte Schumacher an Gauss berichten: „daß Jacobi in Berlin bleibt, wissen Sie ... Als mir Jacobi seinen Canon arithmeticus gab, sagte er, er habe ihn eigentlich Canon genannt, weil er von einem Canonier berechnet sei, dem auch die lange Liste von Rechnungs- und Druckfehlern zur Last falle." Während der 14 Tage, die Jacobi noch in Königsberg verweilte, blieb er im regsten persönlichen Verkehr mit Bessel und nahm die lange unterbrochene Korrespondenz mit Freunden und Schülern wieder auf; besonders interessierte ihn der auf

seinen Rat von Rosenhain unternommene Versuch, von der Theorie der ϑ-Funktionen mit zwei Variabeln aus nach Entwicklung der Periodenrelationen zu den Umkehrungsfunktionen der hyperelliptischen Integrale zu gelangen: „Ich halte es für das Gerathenste“, schreibt ihm Rosenhain am 3. September, „zu diesem Zwecke das Abel'sche Theorem auf Doppelintegrale auszudehnen, worüber Sie einen Fingerzeig in Ihrer Recension von Legendres traité gegeben haben.“

Am 14. September wurde Jacobi in Königsberg von zahlreichen Freunden und Kollegen ein Abschiedsessen gegeben, auf welchem sein großer und berühmter Freund und Kollege Bessel die Festrede hielt:

„Nachdem Sie, geliebter Freund, 18 Jahre unter uns gewesen sind, scheiden Sie jetzt von uns. So lange Zeit ist nicht erforderlich, um sich gegenseitig kennen zu lernen. Bald nach Ihrem Anfange haben wir das Herz kennen gelernt, dessen einer Schlag einen mathematischen Gedanken, der andere einen freundlichen ins Leben rief. Seine wahre Natur hat sich nicht verbergen können, wenn Sie auch ehrlich bemüht gewesen sein mögen, diese mit unkenntlichmachender Hülle zu umgeben. Erlauben Sie mir, daß ich die wissenschaftliche Laufbahn, die Ihren Königsberger Aufenthalt verherrlicht, mit wenigen Worten zu bezeichnen versuche. Sie hat hier ihren Anfang. Aber wie der Schneesturz, der sich fortreißend vergrößert, rissen Sie die Masse, die, bis Sie in ihre Nähe kamen, geruht hatte, mit sich fort. Schon ein Jahr nach Ihrem hiesigen Erscheinen kamen die elliptischen Transzendenten in Bewegung, und was als festgewachsener, undurchdringlicher Fels erschienen war, folgte, zertrümmert und seine innerste Beschaffenheit enthüllend, Ihrem Laufe. Schon im Jahre 1827 machten Sie die Entdeckung, die, wenn sie Ihre einzige geblieben wäre, Ihren Namen unsterblich machen würde. Schon 1829 waren Ihre neuen Grundlagen der elliptischen Funktionen erschienen,

und Legendre, ein starker Vorgänger von Ihnen, ein sehr starker! folgte willig Ihrem Siegeszuge. Sie haben nicht aufgehört, diese reiche Fundgrube auszubeuten, durch und durch haben Sie sie zugänglich gemacht, so zugänglich, daß viele Sie haben begleiten können. Weit entfernt, Begleiter zurückzuweisen, haben Sie ihnen am geeigneten Orte zugerufen: Suchet hier, hier ist noch ein Schatz geborgen! und dankbar erkannten die Findenden die Weisung. Der reiche Mann ist freigebig mit Schätzen, weil er sich des nie fehlenden Überflusses bewußt ist.

Jeder der Theile des großen und mächtigen Reiches der Mathematik muß zur Unterstützung aufgeboten werden, wenn neuer Boden gewonnen werden soll. Daß die Hilfsmittel, die jeder Teil darzubieten vermochte, zu Ihrer Verfügung stehen mußten, ehe Sie die Erfolge erlangen konnten, welche die elliptischen Funktionen Ihnen dargeboten haben, das brauche ich keinem zu sagen. Aber daß Ihre Spur in allen Teilen der Mathematik durch gleich große Erfolge bezeichnet wird, das darf ich hier nicht verschweigen, um nicht durch die besondere Erwähnung der elliptischen Funktionen ein Mißverständniß zu erzeugen. Sie haben die 27 vorhandenen Bände des Crelleschen Journals durch nicht weniger als 70 Abhandlungen geziert, welche in gleichem Maße die Analysis, die Zahlentheorie, die Geometrie, die Mechanik bereichern. Wer eine dieser Abhandlungen studierte, ohne die andern zu kennen, der würde schwören, daß der Gegenstand der einen der letzte Zweck aller Ihrer Anstrengungen wäre.

Gelehrsamkeit begnügt sich mit der Kenntnis des Vorhandenen; Talent entdeckt Lücken im Vorhandenen und weiß sie zu füllen. Ihre Königsberger Geschichte gleicht der Geschichte der andern Geometer der neueren Zeit. Euler, Lagrange, Gauss, Jacobi — alle fangen mit üppiger Fruchtbarkeit an; die Früchte, die sie liefern, zeugen von der Kraft des Bodens, dem sie entsprossen sind; aber

bald, wenn sorgsame Pflege veredeln soll, was die Natur schon edel und in Fülle erzeugt, vermindert sich die Menge der Früchte, während die, die zur Reife gelassen werden, eine größere erlangen. So ist der Verlauf in allen ähnlichen Fällen, deren beide Perioden sich übrigens nach Individualität und Umständen mit verschiedener Deutlichkeit sondern. Sie, Jacobi, werden noch Vieles und Großes liefern, aber dennoch wird Ihre Königsberger Periode sich von der Berliner unterscheiden. Sie haben oft mit Begeisterung von Lagranges Turiner Abhandlungen gesprochen, wie sie die Grundlagen alles Späteren von Wichtigkeit enthalten. So werden auch Ihre Königsberger Abhandlungen das ausschließliche Eigentum Königsbergs bleiben.

Ich muß endigen — eine ereignisreiche Geschichte kann nicht in wenige Worte zusammengedrängt werden; ich hoffe nicht zu denen zu gehören, die keine Gelegenheit gehabt hätten, Sie während 18 Jahren zu erkennen. Zwar haben sich die Grenzen Ihres mathematischen und meines astronomischen Lebens verhältnismäßig selten berührt, aber an einigen Punkten ist dies doch geschehen, und dieser Berührung verdanke ich das Vorrecht, die jetzigen Abschiedsworte an Sie zu richten. Keiner ist hier, der nicht Ihren Abgang betrauerte, jeder wünscht, daß er und unser liebes Königsberg in Ihrer Erinnerung lebendig bleiben möge; daß Ihr Wohl ihn für seinen Verlust entschädigen möge! Zum Zeichen dieses herzlichen Wunsches leeren wir unsere Gläser für den, der der mathematische Stolz Königsbergs ist, für den, der unsere Freuden teilte, unsern Kummer tragen half — Jacobi, unser unvergeßlicher Jacobi lebe hoch!"

Darauf erhob sich Richelot:

„Hochverehrter Mann! Sie erlauben, daß ich Ihnen im Namen Ihrer Schüler, sowohl der in dieser Versammlung anwesenden, als jener übrigen, welche in verschiedenen Gegenden dieser Provinz nur durch die Pflichten ihres Amts von diesem Feste abgehalten werden konnten, oder

in noch entferntern Orten unsers Vaterlandes, ja des Auslands, die tiefste Errinnerung an die Zeiten ihrer ersten mathematischen Begeisterung in Königsberg bewahren — Ihnen, unserm unvergeßlichen Lehrer, unserm hohen Vorbilde, in dieser schönen Stunde die tiefste Verehrung ausdrücke.

Wenn der pflichtgetreue und tüchtige Universitätslehrer durch regelrechte und wichtige Vorlesungen die studierende Jugend in die Wissenschaft einführt, so erntet er den Dank und die Hochachtung seiner Schüler; wenn aber das Genie, selbst in den verschiedensten Richtungen auf stets neue Entdeckungsbahnen hingerissen, und vertieft in die Fülle seiner selbstgeschaffenen Theorien, es nicht verschmäht, seine ihm so teuere Zeit, seine edle Kraft für die Ausbildung anderer zu opfern, so heftet sich, wie die Geschichte lehrt, an sein unsterbliches Andenken ein zweiter Ruhm, der, eine Schule gebildet zu haben. — In diesem Sinne haben Sie, innigst Verehrter, in einer Reihe von 18 Jahren hier gewirkt, Sie haben einer Schule als Meister vorgestanden.

Wer von uns könnte es je vergessen, mit wie bereitwilliger Hingebung, mit welcher liebenswürdigen humoristischen Vortragsweise Sie hier in weitern wie im engsten Kreise unterrichtet, tiefstes Verständnis eröffnet, Aufgaben gestellt, schon für geringe Leistungen sich interessiert, zu neuem Kampfe angefeuert, die Freude des Sieges mit rein menschlicher Teilnahme mitempfunden haben.

Hierin besteht nun daher der Hauptverlust, welchen unsere seit drei Jahrzehnten in verschiedenen Wissenschaften so auffallend hervorragende Universität betrauert; eine Schule wird ihres Meisters beraubt. Ihre Schüler, verehrtester Lehrer, stimmen alle in demselben Dank, und in demselben Gefühl der tiefsten Verehrung überein, welches meine schwachen Worte nur unvollkommen ausdrücken, allein sie glauben mit mir es nicht besser und Ihnen angenehmer äußern

zu können, als wenn sie sich aufs neue, wie auch getrennt durch Raum und Zeit, verbrüdern in dem Vorsatze, ihr Ziel wie bisher weiter zu verfolgen, und mit aller Kraft das hier angefangene Werk zu fördern.

Ich ergreife daher mit Dankgefühl, Wehmut und mit Hoffnung dieses Glas und rufe dem scheidenden Meister im Namen aller seiner Schüler ein Vivat zu."

Wenige Wochen später schreibt Hesse an Jacobi: „Es giebt nun keine preußische Universität mehr, deren Lehrer der Mathematik in dem kommenden Monat nicht das Geburtsfest ihres Lehrers und Meisters feiern. Wenn die Wünsche in Erfüllung gehen, die einer derselben im Herzen trägt, so genießen noch viele nach ihm aus derselben Quelle Wohlthaten, die, so lange das Leben dauert, nicht vergessen werden. Preußen bleibt noch lange durch Ihre Thätigkeit die erste Macht des Geistes in Europa."

Jacobi als Mitglied der Akademie in Berlin von Oktober 1844 bis zu seinem Tode am 18. Februar 1851.

Kaum war Jacobi mit seiner Familie nach Berlin übergesiedelt, als Bessel wenigstens am Anfange den gewohnten brieflichen Verkehr wieder aufzunehmen begann, der zunächst Fragen der Störungstheorie zum Gegenstande hatte, welche Jacobi schon seit langer Zeit immer von neuem beschäftigten. „Hier kommt der erste der angedrohten Briefe!", schreibt ihm Bessel am 10. Oktober 1844, „ich habe Ihnen hier gesagt, daß Ihre Umsiedlung Ihnen nicht den Vortheil gewähren würde von den Erzählungen meiner mathematischen Leiden — glücklicherweise selten — frei zu werden."

Bei der zahlreichen Familie Jacobis, der mit fünf minderjährigen Kindern Königsberg verlassen hatte, und dem ungleich teureren Leben in Berlin brachte ihm die Gehaltserhöhung keine wesentliche materielle Verbesserung in seiner Stellung, und er suchte bereits im November um einen Zuschuß von 300 Talern nach zum Ersatz für die in Königsberg verloren gegangenen Naturaleinkünfte, zumal da ihm der vom Könige gewährte Zuschuß von 1000 Talern nicht lebenslänglich gewährt worden sondern jederzeit wieder entzogen werden konnte; in der darauf ergangenen Kabinettsorder heißt es: „Dagegen kann Ich Mich zu einer Erhöhung der demselben für die Dauer seines einstweiligen Aufenthaltes in Berlin gewährten jährlichen Unterstützung nicht bewogen finden", und eigenhändig

fügt der König der ihm vorgelegten Kabinettsorder noch hinzu: „Sollte übrigens in Jahr und Tag sich ergeben, daß seine Collegia gegen alle Erwartung ohne brillantes pecuniäres Resultat sein sollten, dann bin ich nicht abgeneigt, ihm durch ein Geldgeschenk zu Hülfe zu kommen.“

An die letzten mündlichen Besprechungen und die jetzt fortgesetzte Korrespondenz mit Bessel sich anschließend veröffentlicht Jacobi zunächst in den Astronomischen Nachrichten eine bereits aus Berlin vom 17. November datierte Arbeit „Über eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen“, in welcher er zunächst zeigt, wie man für lineare Systeme, bei welchen die Koeffizienten der Unbekannten sehr klein sind gegen die Koeffizienten derselben in der Diagonale, sehr rasch zu angenäherten Werten für die Unbekannten gelangen kann. Bei den in der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Systemen, bei denen die Koeffizienten symmetrisch zur Diagonale immer gleich sind, werden aber in der Regel mehrere außerhalb der Diagonale befindliche Koeffizienten so bedeutende Werte annehmen, daß der Erfolg der angegebenen Näherungsmethode dadurch vereitelt wird, und er zeigt nun, wie man durch Wiederholung einer leichten Rechnung die Gleichungen in andere umformen kann, in welchen jener Übelstand weniger hervortritt, so daß zuletzt die Gleichungen eine Form erhalten, welche die Anwendung jener Näherungsmethode gestattet; zugleich gibt er eine Substitution an, durch deren Wiederholung immer der einflußreichste von den außerhalb der Diagonale befindlichen Koeffizienten fortgeschafft wird, und in dem zuletzt erhaltenen Systeme von Gleichungen einerseits die Summe der Koeffizienten in der Diagonale, die Summe der Quadrate aller Koeffizienten und die Summe der Quadrate der ganz konstanten Glieder dieselbe wie in dem ursprünglichen Systeme ist, andererseits die Summe der Quadrate der in der Diagonale befindlichen Koeffizienten vermehrt, die Summe

der Quadrate der außerhalb der Diagonale befindlichen Koeffizienten um dieselbe Größe, nämlich um die doppelte Summe der Quadrate der in den einzelnen Transformationen zerstörten Koeffizienten, vermindert ist. Die Methode wird noch auf solche lineare Gleichungssysteme ausgedehnt, bei denen die symmetrisch gelegenen Koeffizienten nicht einander gleich sind.

Während des Winters hielt Jacobi an der Universität noch keine Vorlesungen, und wenn er auch Dirichlet, der durch Krankheit in Florenz zurückgehalten war, zweimal wöchentin je zwei Stunden an der Kriegsschule vertrat, so gewann er doch freie Zeit zur Fertigstellung einiger längst entworfenen Arbeiten sowie zur Korrespondenz mit seinen Freunden. Am 2. Januar 1845 schreibt er an Bessel: „Sie wissen, daß ich manchmal die müßige Neugierde habe, bei Differentialgleichungen, die man nicht integriren kann, wenigstens wissen zu wollen, wieviel Integrale absolut nöthig sind, um die übrigen durch Quadraturen zu finden. Bei der Bewegung eines Planeten in einem widerstehenden Mittel braucht man nur eines; die drei andern Integrationen kann man dann immer durch Quadraturen abmachen; die Dichtigkeit des Mediums ist hierbei eine beliebige Function der Entfernung von der Sonne, der Widerstand eine beliebige Potenz der Geschwindigkeit oder noch allgemeiner $v^m e^{a v^2}$, wo a eine Constante ist ... Wenn Sie Richelot und Hesse sehen, erzählen Sie ihnen, daß ich neulich wieder einen großen Brief von l'Hermite gehabt, der die von mir vor 16 Jahren im Crelle ohne Beweis mitgetheilten Theilungsformeln der elliptischen Transcendenten endlich bewiesen ...“ Auch mit seinem früheren Hausarzte Cruse blieb er in laufender Korrespondenz, da dieser von den „Oscillationen seines Allgemeinbefindens“ unterrichtet sein wollte, ihm aber auch, da Jacobi sehr um den immer schlechter werdenden Zustand Bessels besorgt war, regelmäßig Nachrichten über das Befinden seines Freundes zukommen ließ; „bei Bessel“,

schreibt ihm dieser am 3. Januar, „ist zu den früheren asthmatischen Anfällen jetzt Wassersucht getreten.“

Das Verhältnis Jacobis zu Eisenstein wurde bisweilen durch Eigentümlichkeiten des jungen genialen Mathematikers getrübt und bildete häufig den Gegenstand der Korrespondenz zwischen Gauss und Schumacher; ein Brief von Gauss vom 5. Januar 1845, welcher geflissentlich die Nennung der Personen vermeidet, ist von allgemeinerem Interesse: „Ihre Antwort auf den Vorwurf, daß die Mathematik kein moralisches Element enthalte, nemlich die, daß auch die Moral kein mathematisches habe, ist vortrefflich. Jener Einwurf ist ungefähr ebenso, als wenn man die Malerkunst verwerfen wollte, weil mit dem Pinsel keine Musik gemacht werden könne, wogegen man denn auch mit dem Violinbogen nicht gut malen kann. Übrigens ist der Haß gegen die exacten Wissenschaften bei Personen, die draussen stehen, nichts neues. Ein langes Gebell des Chateaubriand, im Genie du Christianisme, finden Sie im Auszuge in den Göttinger Gelehrtenanzeigen. Es mag wahr sein, daß Menschen, die bloß Mathematiker sind, gewisse specifische Fehler haben; aber das ist nicht Schuld der Mathematik, sondern gilt von jeder exclusiven Beschäftigung ... Man könnte selbst solch' müßigem Hin- und Herreden noch beifügen, daß wenn eine gewisse exclusive Beschäftigung oft mit gewissen specifischen Fehlern verbunden ist, sie dagegen auch fast immer von gewissen andern specifischen Fehlern frei ist.“

Der Winter 1844/45, in dem Jacobis Gesundheitszustand wieder viel zu wünschen übrig ließ, war ganz seiner Störungstheorie und der Fertigstellung der Arbeit über den letzten Multiplikator gewidmet. In den Osterferien, am 22. April 1845, schreibt er an Seidel: „Ich bin jetzt dabei, die Arbeit über die Säcularstörungen, für die ich Ihnen herzlich danke, behufs des Druckes durchzusehen. Es erscheint mir dabei wünschenswerth, noch mehr Zahlen zu

haben, als Sie dort geben, da es bei Erläuterung einer neuen Methode durch ein Zahlenbeispiel zweckmäßig ist, die Hauptresultate auch der Zwischenmomente zu geben... Mein Gesundheitszustand hat mich diesen Winter sehr melancholisch gemacht. Zu meinem alten nie ganz verschwindenden, wenn auch in mäßigen Schranken gehaltenen Übel kam ein Schwindel, der mich erfaßte, wenn ich auch nur eine Viertelstunde arbeiten wollte, wenn ich mich auch bei gänzlichem Müßiggange vollkommen wohl fühlte. Jetzt mit der eingetretenen warmen Witterung geht es mir viel besser..."

Aber der Beginn des Semesters, in welchem er über die Fundamente der Theorie der elliptischen Funktionen sowie über Algebra und Einleitung in die Analysis des Unendlichen vor einer relativ großen Zuhörerzahl las, zwang ihn zunächst, die Störungsrechnungen bis zu den Herbstferien zurückzulegen; am 21. Mai schreibt er seinem Freunde Leers in Königsberg: „Ich lechze nach Wärme, leide viel an Kopfschmerzen, lese täglich eine Stunde vor 30 und 40 Zuhörern elliptische Transcendenten und Algebra. Die Zuhörer bezahlen aber nicht, sonst wäre ich ein reicher Mann." Jede irgendwie freie Zeit verwendet er auf die große Multiplikatorarbeit, von der er den ersten Teil bereits am Ende 1844 Crelle gegeben, und aus welcher er eine Zusammenstellung der auf dynamische Probleme bezüglichen Resultate unter dem Titel „Nouveau principe de la dynamique" der Petersburger Akademie überschickte.

Die Korrespondenz mit seinen alten Freunden und Schülern, von denen ihm besonders Hesse lieb und sympathisch war, wurde in ihrem früheren Umfange wieder aufgenommen; Jacobi hatte vor seiner Abreise nach Italien Hesse ein noch nicht druckfertiges Manuskript von etwa 30 Druckbogen, welches seine Untersuchungen über Flächen 2. Grades und die Attraktion der Ellipsoide enthielt, zur endgültigen Ausarbeitung übergeben, konnte aber Hesses sehr gründ-

liche Ausarbeitung des ersten Teiles nicht mehr benutzen, weil er seine Absicht, ein Lehrbuch der analytischen Geometrie zu veröffentlichen, wieder aufgegeben hatte, und wünschte daher, daß Hesse den Inhalt seines Manuskriptes zu einzelnen Aufsätzen verarbeite. Am 29. Mai 1845 schrieb er ihm:

„Vielleicht ginge es, daß Sie aus der Arbeit über Doppelintegrale irgend etwas isoliren, und unabhängig von anderem darstellen können; z. B. die Anziehung des zwischem dem Ellipsoid und einem geraden Doppelkegel enthaltenen Stückes auf die Spitze, oder was Sie sonst meinen. Ich bin jetzt dafür, alles so viel wie möglich in kleine selbständige Abhandlungen zu theilen. So möchte ich in einer Abhandlung nur das zusammenstellen, was zur Anziehung der Ellipsoide in meiner directen Methode oder vielmehr in der Methode, die sich nur einfacher Substitutionen bedient, analytisch und synthetisch nothwendig gebraucht wird, wozu ich auch den Anfang gemacht, was aber wohl noch mehrere Jahre aufgeschoben werden wird. Auch müßte ich das darauf Bezügliche noch aus meinen Manuscripten haben. Schreiben Sie mir doch darüber, ob Sie eine Abhandlung isoliren und so fertig machen zu können glauben, daß ich sie sogleich drucken lassen kann . . .“

Die Herausgeber der Werke Hesses führen weiter aus: „Hesse erklärte sich zur isolierten Bearbeitung jenes speziellen Attraktionsproblems bereit, während er über die Angängigkeit einer ähnlichen Behandlung des allgemeinen Attraktionsproblems der Ellipsoide für einen innern und äußern Punkt und der bezüglichen Doppelintegrale Zweifel äußerte“ — „auch würde ich für die so lehrreichen Behandlungsweisen des Problems der Hauptaxen mit den historischen Notizen . . . nichts aequivalentes an die Stelle zu setzen haben“, schreibt Hesse an Jacobi am 27. Juni 1845. Über das weitere Schicksal des Manuskriptes, das auf Borchardts Veranlassung Hesse im Jahre 1862 an Clebsch

sandte, welcher Hesse dringend zur Herausgabe rät, „um die vielen schönen Gedanken darin zu retten", ist nichts bekannt.

Der Einfluß Jacobis in den leitenden wissenschaftlichen Kreisen Berlins wurde sehr bald ein ganz bedeutender; überall trat er bei dem Könige und den Ministern für seine ausgezeichneten mathematischen Freunde sowie für die neue Generation jugendlicher mathematischer Kräfte ein; am 8. Juli richtete er an den Minister die Bitte um Erhöhuung des Gehaltes für Steiner:

„Ew. Excellenz erlaube ich mir, einen ganz gehorsamen Antrag in Bezug auf den Professor an hiesiger Universität Jakob Steiner vorzulegen.

Jakob Steiner, Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften, einer der ausgezeichnetsten Universitätslehrer und eine der originellsten und bedeutendsten wissenschaftlichen Persönlichkeiten, ist in Utzisdorf im Kanton Bern geboren; drosch, säete und pflügte bis zu seinem 19. Jahre, wie es seine Kräfte erlaubten und sein Stand als Bauer es mit sich brachte, und hatte bis zu diesem Alter nichts als Lesen und den Katechismus gelernt. Da trieb ihn ein unbezwinglicher Wissensdrang zu dem muthigen Entschluß, ohne Mittel und Empfehlungen zu dem ehrwürdigen Pestalozzi zu gehen, der ihn mit gutmüthigem Edelsinn unentgeltlich in seine Anstalt aufnahm und ihn im Schreiben, Rechnen und den Anfangsgründen der Mathematik unterrichtete. Nach dem interessanten Zeugniß Pestalozzis 'zeigte er dort bald vorzügliche Talente für Mathematik und bahnte sich mit eisernem Fleiße einen Weg zur Selbstbildung für dieses Fach', und bereits nach anderthalb Jahren konnte er an der Anstalt selbst als Lehrer fungiren. Die in der Pestalozzischen Anstalt in Ausübung gebrachte Methode, die mathematischen Wahrheiten als Gegenstand freier Anschauung zu behandeln, ergriff seine lebhafte Phantasie, und schon damals strebte er in dem jedesmaligen Gegenstande seiner Forschung bis zu dem Grundgedanken vorzudringen, von dem aus sich die

Sache wie von selber entfalten und ihre wahre Synthesis erhalten werden könnte.

Bei dieser Richtung in die Tiefe und auf das Ganze fühlte Steiner bald den Mangel, an dem die Pestalozzische Anstalt unterging; die Freude an der Methode hatte vergessen lassen, daß der wissenschaftliche Stoff fehlte. In der Hoffnung, einen solchen in reichster Fülle überliefert zu erhalten, wandte sich Steiner nach $4^1/_2$ jährigem Aufenthalte bei Pestalozzi nach Heidelberg und von da i. J. 1821 nach Berlin. Aber der mathematische Universitätsunterricht war noch damals in höchst betrübter Verfassung, wenig geeignet, seine Hoffnungen zu erfüllen, und so fand er sich ganz seinem eigenen Genius überlassen, der ihn glücklicher Weise mit Sicherheit zu einem ruhmvollen Ziele führte.

Bei dem Mangel an wissenschaftlichen Hülfsmitteln konnte es nicht fehlen, daß die ersten Resultate von Steiners Forschungen mit bereits bekannten zusammentrafen. Er hatte das ganze in alter und neuer Zeit aufgeführte Gebäude der synthetischen Geometrie aus eigner Kraft zu reproduciren; aber bald ging er über die bekannten Grenzen hinaus, und erst als er überzeugt war, wirklich neues zu geben, trat er damit an die Öffentlichkeit. Bereits seine ersten Publicationen machten großes Aufsehn; sie gingen sogleich übersetzt in die franz. mathem. Zeitschriften über und trugen wesentlich dazu bei, den Ruf des eben (i. J. 1826) gestifteten Crelleschen mathematischen Journals zu begründen, in welchem sie erschienen. In seinem 1832 publicirten Buche „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“ war er bemüht, von wenigen räumlichen Eigenschaften aus nach einem einfachen Schematismus über das ganze Heer auseinander gerissener geometrischer Sätze eine klare Übersicht zu gewinnen, jedem seine besondere Stellung im Verhältniß zu den übrigen anzuweisen, in das frühere Chaos Ordnung zu bringen, alle Theile naturgemäß ineinandergreifen und sich zu wohl-

begränzten Gruppen vereinigen zu lassen. Indem er so den Organismus aufdeckte, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt miteinander verbunden sind, hat er nicht bloß die geometrische Synthese gefördert, sondern auch für alle anderen Zweige der Mathematik ein Muster einer vollkommenen Methode und Durchführung aufgestellt.

Während dieser ersten Arbeiten hat Steiner hier in Berlin seine Existenz nur mühsam durch Privatstunden fristen können, bis er zuletzt einen sicheren Unterhalt durch eine Lehrerstelle an der Klödenschen Gewerbeschule erhielt So kostbare Kräfte mußten aber ganz der Wissenschaft erhalten werden. Auf eine an Ew. Excellenz seeligen Vorgänger, Hr. v. Altenstein, von mir gerichtete Vorstellung wurde Steiner mit dem Belaß seines an der Schule bezogenen Gehaltes von 700 ℔ als außerordentlicher Professor an die Berliner Universität versetzt.

Der besondere Bildungsgang Steiners, die dadurch herbeigeführte Combination einer ausgezeichneten pädagogischen Methode mit dem Vollgehalte der Wissenschaft, sein lebendiger und begeisternder Vortrag, befähigten ihn vorzüglich, Lehrer der Mathematik heranzubilden, und so hat er in einer längern Reihe von Jahren segensreich als Universitätslehrer gewirkt. Fortwährend hat er dabei durch zahlreiche, hier und in Frankreich publicirte Arbeiten das Gebiet der synthetischen Geometrie mit neuen Entdeckungen erweitert, und seine Methoden und mit ihnen seinen Ruf immer weiter ausgebreitet. Als ich nach Rom kam, fand ich seine Arbeiten in das Italienische übersetzt. Ich bitte Ew. Excellenz den Schluß des Berichtes hierher setzen zu dürfen, welcher vor 4 Jahren der Pariser Univers. d. Wiss von ihren 3 ausgezeichnetsten Mathematikern, den Hrr. Cauchy, Sturm und Liouville über eine umfassende Schrift Steiners vom Größten und Kleinsten abgestattet wurde. 'Mit gleichem Glück', heißt es, 'behandelt er die

zusammengesetztesten Aufgaben; die Verkettung der Sätze ist bei ihm so natürlich, daß es oft genügt, sie bloß auszusprechen, und es unnütz wird, regelrechte Beweise hinzuzufügen. Wie von selber fließen die Theoreme, eines aus dem anderen, so daß man am Ende die schönen, am Schlusse des Werkes zusammengestellten Sätze mit Staunen fast evident vor sich liegen sieht, die auch den geschicktesten Mathematikern, wenn man sie ihnen vom übrigen Werke isolirt darböte, große Schwierigkeiten machen würden. Steiner hat vielleicht in früheren Werken schwerere Probleme gelöst, Theoreme von originellerer Neuheit entdeckt, wie z. B. in seinen schönen Untersuchungen über die Epicycloiden; aber nirgends hat er einfachere, elegantere, besser verkettete Beweise geben können, und sie verdienen, unmittelbar als eine nothwendige Ergänzung in die geometrischen Lehrbücher aufgenommen zu werden.' Ich füge hinzu, daß Steiner in diesen Arbeiten theils der synthetischen Geometrie Gebiete aufschließt, welche bisher nur durch andere Methoden zugänglich schienen, theils aber auch seine Forschungen bis zu Punkten ausdehnt, welche für andre Methoden vorläufig noch unerreichbar sind. Wie bedeutend aber auch die von Steiner publicirten Arbeiten sind, so bilden sie doch nur einen verhältnißmäßig geringen Theil der Resultate, welche er während eines arbeitsamen Lebens in seinen Manuscripten niedergelegt hat, und deren Verarbeitung er noch beabsichtigt.

Zu den 700 ℛ als Professor hat Steiner seit einigen Jahren noch das jährliche Gehalt von 200 ℛ als Akademiker erhalten. Aber die ihm verordnete Pflege seiner Gesundheit macht eine jährlich wiederkehrende, mit Reisen verknüpfte Badekur nöthig, deren Kosten verbunden mit dem theuern Leben in Berlin seine Mittel übersteigen, und durch eine außerordentliche Subvention nur unvollkommen ersetzt würden. In dem Interesse der Wissenschaft erlaube ich mir daher, an Ew. Excellenz den ganz gehorsamen Antrag zu richten:

Ew. Excellenz wolle das Universitätsgehalt des Prof. Steiner hochgeneigtest durch eine Zulage von 300 ⁄ß auf 1000 ⁄ß erhöhen.

Die Ertheilung eines angemessenen Gehaltes an einen Universitätslehrer von solcher Genialität, Wirksamkeit und Celebrität ist auch ohne Rücksicht auf seine Gesundheitsverhältnisse nur dem großartigen Schutze entsprechend, welchen durch Ew. Excellenz hohe Vermittlung der preußische Staat den Pflegern wahrer Wissenschaft angedeihen läßt. Unter den genannten Umständen aber habe ich es für meine besondere Pflicht gehalten, Ew. Excellenz diesen Antrag zu unterbreiten, welchen ich Ihnen dringend ans Herz lege, und für dessen hochgeneigte Gewährung die heutigen und kommenden Mathematiker, die von Steiner gelernt haben und von ihm lernen werden, Ihnen Dank sagen werden.“

Und ebenso warm vertrat er überall das Interesse Dirichlets.

„Dieses Mißverhältnis der äußern Anerkennung“, sagt Kummer, „und der wissenschaftlichen Bedeutung Dirichlets wurde von keinem richtiger erkannt als von Jacobi, und kein anderer war zugleich geschickter und tätiger, dasselbe auszugleichen und seinem Freunde auch in weiteren Kreisen die verdiente Anerkennung zu verschaffen. Seiner Tätigkeit ist es hauptsächlich zuzuschreiben, daß Dirichlet unserer Akademie erhalten wurde, als im Jahre 1846 die Badensche Regierung ihn für die Universität Heidelberg zu gewinnen beabsichtigte. Zwei Briefe, die er in dieser Angelegenheit an Alexander von Humboldt und an Se. Majestät den König gerichtet hat, geben in wenigen starken und treffenden Zügen eine lebendige Darstellung von Dirichlets wissenschaftlicher Größe und von dem unersetzlichen Verluste, welcher die exakten Wissenschaften in Preußen, die Akademie, die Universität und besonders auch ihn selbst treffen würde, wenn Dirichlet unser Vaterland verlassen sollte.“

Seinem Einfluß ist es wohl auch wesentlich zu danken, daß Dirichlet im Jahre 1845 für die Wahl zum Ritter des Ordens pour le mérite in Frage kam, da selbst Gauss in einem Briefe vom 9. Juli an Humboldt zwar Dirichlet vorschlägt, aber die Bemerkung hinzufügt, daß, wenn er von allen andern Rücksichten ganz frei wäre, er Eisenstein in dieselbe Linie mit Dirichlet stellen würde.

Endlich vollendete er am 26. Juli 1845 seine große Arbeit, deren ersten Teil er schon vor einem Jahre abgeschlossen, und welche jetzt unter dem Titel „Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi" im Crelleschen Journal erschien.

Jacobi stützt seine Untersuchung auf das Fundamentallemma, daß, wenn $A, A_1, A_2, \ldots A_n$ die Größen bezeichnen, welche in der Funktionaldeterminante $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ resp. mit $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}$ multipliziert sind, $\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial A_n}{\partial x_n}=0$, oder die Funktionaldeterminante in der Form darstellbar ist $\frac{\partial (fA)}{\partial x}+\frac{\partial (fA)}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial (fA)}{\partial x_n}$, und liefert den Beweis für dasselbe in mehrfacher Form. Um die Definition des Multiplikators zu geben, geht Jacobi von der linearen partiellen Differentialgleichung $X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$ aus, deren voneinander unabhängige Lösungen mit $f_1, f_2, \ldots f_n$ bezeichnet werden; dann existiert immer ein Faktor M von der Art, daß $M\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+\cdots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ $=\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ ist, und dieser Faktor genügt der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial (MX)}{\partial x}+\frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n}=0$, und umgekehrt. M wird der Multiplikator der Differentialgleichung $X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$

oder auch des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems $dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n$ genannt, und gezeigt, daß, wenn die n Integralgleichungen des totalen Systems in der Form gegeben sind $\Pi_1 = 0, \Pi_2 = 0, \ldots \Pi_n = 0$, welche von $x, x_1, \ldots x_n$ und den n willkürlichen Konstanten $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ abhängen, der Multiplikator die Form annimmt $M = \frac{1}{X} \frac{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \Pi_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \Pi_n}{\partial \alpha_n}}$. Als wesentliche Eigenschaft des Multiplikators wird hervorgehoben, daß, wenn M ein Multiplikator der partiellen Differentialgleichung $X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ ist, die allgemeine Form desselben $\Pi \cdot M$ sein wird, worin Π eine beliebige Lösung der Differentialgleichung bedeutet, daß man somit aus zwei Multiplikatoren durch Division eine Lösung der Differentialgleichung erhält. Setzt man den Multiplikator der Einheit gleich, so folgt aus dem obigen Ausdruck für M, daß, wenn $n+1$ Funktionen $X, X_1, \ldots X_n$ der Gleichung genügen $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0$, die $n+1$ Größen $X, X_1, \ldots X_n$ als Partialdeterminanten von bestimmten n Funktionen betrachtet werden können.

Nachdem er gezeigt, wie aus einem bekannten Multiplikator eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems die Determinante der Funktionen hergeleitet wird, welche vermöge der Integralgleichungen in die Anfangswerte der Variabeln übergehen, geht er dazu über, den Multiplikator auch durch eine gewöhnliche Differentialgleichung $X \frac{d \log \mu}{dx} + \frac{\partial X}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0$ zu definieren, und daraus den Satz herzuleiten, daß nach vollständiger Integration des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems $\frac{dx_1}{dx} = X_1, \ldots \frac{dx_n}{dx} = X_n$, wenn $x_1, \ldots x_n$

durch x und die willkürlichen Konstanten $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ ausgedrückt sind, $\log \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} = \int \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right) dx$ ist, wenn die Größe unter dem Integral selbst durch x und die willkürlichen Konstanten ausgedrückt wird. Wie man nun bei einer Funktion von mehreren unabhängigen Variabeln die partiellen Differentialquotienten von dem vollständigen Differential unterscheidet, worin alle Variabeln von einer von ihnen und zwar unbestimmt abhängen, so wird, wenn n Funktionen von $n + m$ Variabeln vorgelegt sind, außer deren Partialdeterminanten, in denen alle Variabeln als unabhängig angesehen werden, die vollständige Determinante in Betracht kommen, indem man die Anzahl m der Variabeln als unbestimmte Funktionen der n übrigen betrachtet, und es gilt dann in dieser Form der Satz, daß die Differentialgleichung $X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + \cdots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n} = 0$ mit einem solchen Multiplikator versehen werden kann, daß die eine Seite der Gleichung die vollständige Funktionaldeterminante wird oder die Determinante bestimmter n Funktionen der Variabeln $x, x_1, \ldots x_n$, in denen x als unbestimmte Funktion der Variabeln $x_1, \ldots x_n$ betrachtet wird, und daß daher, wenn für das System $dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n$ ein singuläres System von Integralgleichungen existiert, welches $n - 1$ willkürliche Konstanten einschließt, durch Elimination dieser Konstanten aus den n Integralgleichungen eine Gleichung hervorgeht, welche den Multiplikator des Systems der vorgelegten Differentialgleichungen unendlich macht.

Jacobi geht nunmehr zum Gebrauche des neuen Multiplikators zum Zwecke der Integration der Differentialgleichungen und zu dem Prinzip des letzten Multiplikators über, indem er zunächst die Frage nach der Bildung des Multiplikators von Differentialgleichungen, welche durch Transformation aus den vorgelegten abgeleitet sind, aus dem der primären aufwirft,

und zeigt, daß, wenn in die Differentialgleichungen $\frac{dx}{dt} = X$, $\frac{dx_1}{dt} = X_1, \ldots \frac{dx_n}{dt} = X_n$, worin $X, X_1, \ldots X_n$ beliebige Funktionen von $x, x_1, \ldots x_n$ sind, und für welche M einen Multiplikator bezeichnet, statt $x, x_1, \ldots x_n$ neue Variable $w, w_1, \ldots w_n$ eingeführt werden, ein Multiplikator des transformierten Systems $\frac{dw}{dt} = W, \cdots \frac{dw_n}{dt} = W_n$ durch $\varDelta . M$ dargestellt wird, wenn

$$\varDelta = \frac{1}{\sum \pm \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}} = \sum \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right),$$

worin die Klammern die Größen x durch die w ausgedrückt andeuten. Hieraus leitet er nun sein Fundamentaltheorem in der Theorie des Multiplikators her: Sei M ein Multiplikator des Systems $dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$, und seien m Integrale gefunden $w = \alpha$, $w_1 = \alpha_1$, $\ldots w_{m-1} = \alpha_{m-1}$, mit Hilfe deren alle Variabeln $x, x_1, \ldots x_n$ durch die willkürlichen Konstanten $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$ und durch Funktionen $w_m, w_{m+1}, \ldots w_n$ der Variabeln $x, x_1, \ldots x_n$ ausgedrückt werden, so bestehen, wenn man $W_i = X \frac{\partial w_i}{\partial x} + X_1 \frac{\partial w_i}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial w_i}{\partial x_n}$ setzt, zwischen den Variabeln $w_m, w_{m+1}, \ldots w_n$ die Differentialgleichungen $dw_m : dw_{m+1} : \cdots : dw_n = W_m : W_{m+1} : \cdots : W_n$, und deren Multiplikator wird sein $\varDelta . M$, worin $\varDelta = \sum \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w_m}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_{m+1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_{n-m}}{\partial w_n}\right) \cdot \left(\frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-m+2}}{\partial \alpha_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{m-1}}\right)$. Wählt man $w_m = x$, $w_{m+1} = x_1, \ldots w_n = x_{n-m}$, so folgt, daß, wenn $w = \alpha$, $w_1 = \alpha_1$, $\ldots w_{m-1} = \alpha_{m-1}$ m Integrale der Differentialgleichungen $dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$ und M ein Multiplikator derselben ist, und man aus diesen Gleichungen $x_{n-m+1}, \ldots x_n$ durch $x, x_1, \ldots x_{n-m}, \alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$ ausdrückt, der Multiplikator des reduzierten Systems $dx : dx_1 : \cdots : dx_{n-m}$

$= X : X_1 : \cdots : X_{n-m}$ durch

$$M \,.\, \sum \pm \left(\frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-m+2}}{\partial \alpha_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{m-1}}\right)$$

$$= M \left\{ \sum \pm \frac{\partial w}{\partial x_{n-m+1}} \frac{\partial w_1}{\partial x_{n-m+2}} \cdots \frac{\partial w_{m-1}}{\partial x_n} \right\}^{-1}$$

dargestellt ist.

Hieraus ergibt sich nun unmittelbar der Satz vom letzten Multiplikator, nach welchem, wenn M ein Multiplikator des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems $dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n$ ist, und durch Integration und sukzessive Elimination alle Integralgleichungen $\Pi = \alpha$, $\Pi_1 = \alpha_1$, $\ldots \Pi_{n-2} = \alpha_{n-2}$ mit Ausnahme einer gefunden sind, worin Π_i eine Funktion der Variabeln $x, x_1, \ldots x_{n-i}$ und der willkürlichen Konstanten $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}$ ist, die letzte Integralgleichung durch $\displaystyle\int \frac{M(X_1\,dx - X\,dx_1)}{\frac{\partial \Pi}{\partial x_n}\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial x_2}}$ $=$ cst. dargestellt ist, an welchen Satz sich noch mannigfache Spezialisierungen und Umformungen desselben knüpfen. Es schließt sich hieran die Betrachtung des Multiplikators eines Differentialgleichungssystems beliebiger Ordnung, welches er auf ein simultanes System 1. Ordnung zurückführt; es wird weiter in einfacher Weise gezeigt, daß man für ein lineares Differentialgleichungssystem den Multiplikator stets durch Quadraturen ausdrücken kann, und an Eulersche Beispiele anschließend diejenigen linearen und nicht linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung zwischen zwei Variabeln behandelt, deren Multiplikator man finden kann.

Nun geht Jacobi zur Aufstellung derjenigen Sätze über, die er kurz zuvor der Pariser Akademie mitgeteilt hatte; indem er zeigt, wie für ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem, welches mit Hilfe der vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung, in welcher die abhängige Variable nicht vorkommt, integriert wird, der Multiplikator gefunden werden kann, und ähnliche Beziehungen für das Pfaffsche Problem erörtert, wird er auf die Differentialglei-

chungen der Dynamik geführt; er weist nach, daß man für dieselben in der ersten Lagrangeschen Form den Multiplikator finden kann, welcher für die Hamiltonschen Differentialgleichungen den Wert 1 annimmt, und folgert daraus seinen berühmten Satz von der Herleitung des letzten Integrales eines mechanischen Problems. Diesen Satz bezeichnet er als ein neues allgemeines Prinzip der Mechanik, wie er es auch im Bulletin de l'académie impériale de St. Pétersbourg genannt, und wendet dasselbe auf die Bewegung eines nach einem und zwei festen Zentren angezogenen Punktes, auf das Problem von drei auf derselben Geraden sich bewegenden Massenpunkten, welche sich gegenseitig anziehen, und auf die Rotation eines durch einen Stoß angetriebenen Körpers um einen festen Punkt an. Schwieriger, aber doch durchführbar gestaltet sich die Anwendung seines Prinzips auf die Bewegung eines freien Systems materieller Punkte im widerstehenden Medium für ein beliebiges Widerstandsgesetz, wofür er unter anderem findet, daß, wenn die Bewegung in einem homogenen Medium vor sich geht, dessen Widerstandskraft der Geschwindigkeit direkt proportional ist, und die sollizitierenden Kräfte nur von den Koordinaten abhängen, nach Auffindung aller Integrale zwischen den Größen $x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i'$ zuletzt t durch irgendeine Koordinate ohne neue Quadraturen ausgedrückt werden kann; die Anwendung hiervon auf die Bewegung eines Kometen um die Sonne im Widerstand leistenden Äther für schon früher bezeichnete Widerstandsgesetze läßt erkennen, daß, wenn ein Integral bekannt ist, die drei übrigen durch Quadraturen erhalten werden können. Endlich wird noch die Bedeutung des Multiplikators für die isoperimetrischen Differentialgleichungen erörtert, und die Form desselben bestimmt.

In betreff der von ihm in dieser Arbeit gemachten Anwendung auf das Problem von drei in einer Geraden befindlichen sich anziehenden Punkten fand sich noch eine von Wangerin unter dem Titel „Problema trium corporum

mutuis attractionibus cubis distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium“ veröffentlichte Notiz in Jacobis hinterlassenen Papieren, in welcher dieser zeigt, daß das Problem nur von einer einzigen Quadratur abhängt, und diese an sich einfache Zurückführung auf Quadraturen zu einigen allgemeinen Bemerkungen über die Wahl des Zeichens der unter dem Integral vorkommenden Quadratwurzel benutzt.

Mit Beginn der Herbstferien suchte Jacobi nun zunächst die Seidel schon in den Osterferien angekündigte Fertigstellung seiner Störungsarbeit auf Grund der Rechnungen seines ausgezeichneten Schülers zu beenden. Vom 9. August 1845 datiert er seine Arbeit „Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säkularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen“ und gibt hierdurch eine Anwendung der Theoreme, die er in seiner letzten Arbeit über die Methode der kleinsten Quadrate auseinandergesetzt hatte.

Es handelt sich hier um ein lineares Gleichungssystem von der Form

$$\{(a,a)-x\}\alpha+(a,b)\beta+(a,c)\gamma+\cdots+(a,p)\pi=0,$$
$$\cdots(p,a)\alpha+(p,b)\beta+\cdots+\{(p,p)-x\}\pi=0,$$

dessen in Zahlen gegebene Koeffizienten, symmetrisch zur Diagonale gelegen, einander gleich sein sollen, und worin $\alpha, \beta, \ldots \pi$ die Unbekannten darstellen; da nun die Determinante verschwinden muß, so erhält man eine Gleichung n. Grades in x, und zu jeder Lösung derselben sind die Verhältnisse der Größen α, β, ... bestimmt, und die Größen selbst, wenn noch die Bedingung $\alpha^2+\beta^2+\cdots+\pi^2=1$ hinzugenommen wird. Für die zu zwei Lösungen x', x'' zugehörigen Werte α', β', ... α'', β'', ... ergibt sich leicht die Beziehung $\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\cdots+\pi'\pi''=0$, woraus Cauchy gefolgert hat, daß alle Lösungen jener Gleichung n. Grades reell sind. Bildet man die linearen Ausdrücke $p_1=\alpha'q_1+\alpha''q_2+\cdots+\alpha^{(n)}q_n$,

$\ldots p_n = \pi' q_1 + \pi'' q_2 + \cdots + \pi^{(n)} q_n$, woraus $q_1 = \alpha' p_1 + \beta' p_2 + \cdots + \pi' p_n, \ \ldots q_n = \alpha^{(n)} p_1 + \beta^{(n)} p_2 + \cdots + \pi^{(n)} p_n$ folgt, so ergibt sich $p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2 = q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_n^2$ und somit $\alpha'^2 + \alpha''^2 + \cdots + \alpha^{(n)2} = 1, \ \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \cdots + \alpha^{(n)}\beta^{(n)} = 0$, und analoge Gleichungen, welche die Beziehung $x' q_1^2 + x'' q_2^2 + \cdots + x^{(n)} q_n^2 = (a, a) p_1^2 + 2(a, b) p_1 p_2 + 2(a, c) p_1 p_3 + \cdots + (b, b) p_2^2 + 2(b, c) p_2 p_3 + \cdots + (c, c) p_3^2 + \cdots$ liefern. Man drückt ebenso leicht die ersten Differentialquotienten aller Wurzeln der Gleichung n. Grades nach den Koeffizienten der linearen Gleichungen genommen durch die Werte der Unbekannten aus, während die Differentialquotienten jeder der Unbekannten nach den Größen (a, b), (b, c), ... sich aus ihren ersten Differentialquotienten nach den Größen (a, a), (b, b), ... zusammensetzen lassen. Jacobi stellt nun zunächst die numerischen Gleichungen, von welchen die Säkularstörungen der Exzentrizitäten und Längen der Perihelien der Bahnen der Planeten abhängen, in der in bezug auf die Diagonale symmetrischen Form auf, und bemerkt, daß im allgemeinen die Zahlenkoeffizienten in der Diagonale beträchtlich größer sind als die übrigen, und daß, wenn dieses nicht der Fall, die Gleichungen auf zweckmäßige Weise transformiert werden können, indem man mittels einfacher linearer Substitutionen immer für zwei der Unbekannten zwei andere Größen einführt, so daß in jedem nach und nach durch diese Transformation erhaltenen System die Summe der Quadrate der außerhalb der Diagonale befindlichen Koeffizienten um die Summe der Quadrate aller in den einzelnen Transformationen vernichteten Koeffizienten kleiner geworden ist als in dem ursprünglich gegebenen System von Gleichungen, während die Summe der Quadrate der in der Diagonale befindlichen Koeffizienten sich um dieselbe Größe vermehrt hat. Alle einzelnen außerhalb der Diagonale befindlichen Koeffizienten werden sich daher durch wiederholte Anwendung der angegebenen Transformation unendlich verkleinern lassen. Für den Fall sehr

kleiner Größen 1. Ordnung außerhalb der Diagonale erörtert nun Jacobi auf Grund der oben aufgestellten Formeln ein Verfahren für die Auflösung des linearen Systems durch sukzessive Annäherung, ohne jene Gleichung n. Grades bilden und auflösen zu müssen, zeigt, wie die Variationen berechnet werden, welche die Systeme der Werte der Unbekannten durch die Änderung der zugrunde gelegten Werte der Planetenmassen erfahren, und vergleicht endlich alles mit den von Leverrier gefundenen Resultaten.

Seine wissenschaftliche Korrespondenz war in den Herbstferien äußerst rege, und besonders der Briefwechsel mit Hermite und Rosenhain war es, der ihn wieder zu seinen Studien in der Theorie der elliptischen und Abelschen Funktionen zurückführte. Schon in einem Briefe vom Januar 1843 hatte Hermite seine Resultate über die Auflösung der Teilungsgleichungen der hyperelliptischen Funktionen 1. Ordnung Jacobi mitgeteilt und in einem weiteren Schreiben vom August 1844 einen Beweis für den von Jacobi aufgestellten Ausdruck von $\sin \mathrm{am}\,(u, \varkappa)$ durch $\sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ auf den Charakter der sin am gegründet, durch den Quotienten zweier stets konvergierender Reihen ausdrückbar zu sein, welche unverändert bleiben oder nur einen konstanten Faktor annehmen, wenn das Argument um gewisse konstante Größen vermehrt wird. Hermite gibt endlich noch die von Jacobi schon früher gefundenen Ausdrücke der hyperelliptischen Funktionen von zwei Variabeln durch solche mit einer Variabeln und liefert noch einige von den Jacobischen verschiedene Beweise für die Ausdrückbarkeit der elliptischen Integrale 2. und 3. Gattung durch das 1. Gattung mit Hilfe von ϑ-Funktionen und Darstellungen von deren Additionstheoremen.

Jacobi teilt ihm am 6. August 1845 mit, daß der in dem Briefe vom August 1844 angedeutete Weg zum Beweise der Formeln für die inverse Transformation genau der

von ihm befolgte sei, und daß er noch einen dritten Beweis in seinen Vorlesungen in Königsberg vorgetragen habe, welcher auf der Zerlegung von $\frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)}$ in einfache Brüche beruht; auch die Formel für die Entwicklung des Produktes $H(x + a_1)H(x + a_2) \ldots H(x + a_n)$ habe er ähnlich wie Hermite schon früher gefunden.

„Mais ce qui auparavant ne m'est jamais venu dans l'esprit, c'est votre idée ingénieuse et très originale de faire ressortir de ces mêmes principes le théorème d'Abel, tant qu'il s'applique aux fonctions elliptiques ... En cherchant à tirer la transformation directe des propriétés des fonctions Θ, sans faire usage de leur décomposition en facteurs infinis, vous avez pensé savamment aux cas plus généraux, où probablement l'on se doit résigner à l'impossibilité d'une décomposition en facteurs.“ Jacobi spricht sodann von seiner bekannten Relation zwischen Produkten von vier ϑ-Funktionen, die er in seinen Vorlesungen gegeben, und aus der die Additionstheoreme der elliptischen Funktionen der drei Gattungen und vieles andere unmittelbar folge; er erwähnt ferner das analytische Faktum, daß man jede ϑ-Funktion auf eine andere reduzieren kann, für welche der Modul von $q < e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$, und geht auf den Satz von der Vertauschung des Argumentes und Parameters für die elliptischen Integrale 3. Gattung ein.

„Feuilletant mes anciens papiers, j'y ai trouvé la démonstration de quelques théorèmes, par lesquels on donne aux formules d'addition des intégrales Abéliennes de la seconde et de la troisième espèce une forme analogue à celle sous laquelle les formules d'addition des intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce ont été présentées par Legendre, ce qui contribue à rendre de plus en plus parfaite l'analogie entre les fonctions Abéliennes et elliptiques ... Comme je n'ai étudié avec soin que les intégrales, qui ont sous le signe une racine carrée, je ne saurais dire, si la formule

générale dont je suis parti en prenant deux courbes quelconque I et II, comporte la même généralité que le théorème générale d'Abel. Par vos travaux sur ce théorème pris dans toute sa généralité vous serez mieux que moi à même d'un juger.“ Die hier erwähnte von Jacobi angewandte Transformation ist im geometrischen Sinne äquivalent der Beziehung der Punkte einer Kurve, deren Koordinaten sich als rationale Funktionen eines Parameters darstellen lassen, auf die Punkte einer Geraden mit Hilfe dieses Parameters. Er schließt mit den Worten: „Ne soyez pas fâché, monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches: Comme vous dûtes commencer par où je finis, il y a nécessairement une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre ...“

Durch die Korrespondenz mit Hermite angeregt, der zuerst in Frankreich selbsttätig und schöpferisch in die Theorie der elliptischen und Abelschen Transzendenten eingriff, verfaßte er noch einige kürzere, aber höchst interessante Arbeiten, von denen die erste vom 25. August 1845 „Über die Additionstheoreme der Abelschen Integrale zweiter und dritter Gattung“ betitelt ist. Wenn $R = \alpha_1 x^{2n} + \alpha_2 x^{2n-1} + \cdots + 1$, V eine ganze Funktion von x von n. Grade mit dem höchsten Koeffizienten 1 ist, und man bildet mit einer Konstanten a den Ausdruck $x V^2 - a^2 R = (x - x_1) \ldots (x - x_{2n+1}) = x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n+1}$, so ist nach dem Abelschen Theorem für $m = 0, 1, 2, \ldots n - 1$: $\int \frac{x_1{}^m d x_1}{\sqrt{x_1 R(x_1)}} + \cdots + \int \frac{x_{2n+1}^m d x_{2n+1}}{\sqrt{x_{2n+1} R(x_{2n+1})}} = 0$ mit gehörig bestimmten Wurzelzeichen, worin die Anfangs- und Endgrenzen der Integrale die beiden Systeme der Wurzeln zweier Gleichungen von der angegebenen Form sind, in denen sich a und die Koeffizienten von V verändert haben, während R ungeändert geblieben ist. Entwickelt man $\varDelta = \frac{1}{\sqrt{xR}} \log \frac{\sqrt{x}\, V + a\sqrt{R}}{\sqrt{x}\, V - a\sqrt{R}}$ nach fallenden Potenzen

von x, so daß $A = \frac{A_0}{x^{n+1}} + \frac{A_1}{x^{n+2}} + \cdots$, so findet Abel
$\int \frac{x_1^{n+i} dx_1}{\sqrt{x_1 R(x_1)}} + \cdots + \int \frac{x_{2n+1}^{n+i} dx_{2n+1}}{\sqrt{x_{2n+1} R(x_{2n+1})}} = A_i$ und $A_0 = 2\sqrt{x_1 x_2 \ldots x_{2n+1}}$. Jacobi liefert nun zur Bestimmung von A_i die folgende Methode: Man entwickle den Ausdruck $(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_{2n+1} z^{2n+1})^{-\frac{1}{2}}$ nach aufsteigenden Potenzen von z, setze in dem Koeffizienten von z^i für b_1, $b_2, \ldots$ die Größen $a_1 + \alpha_1$, $a_2 + \alpha_2, \ldots$, entwickle alle Produkte und Potenzen dieser Binome und multipliziere jeden Term, der den Faktor enthält $\alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} \ldots$, noch mit $\frac{a^{2(\mu_1 + \mu_2 + \cdots) + 1}}{2(\mu_1 + \mu_2 + \cdots) + 1}$, so wird der Ausdruck, welchen man erhält, der Wert von $\frac{1}{2} A_i$. Nachdem Abel für die Integrale 3. Gattung die Beziehung

$$\int \frac{dx_1}{(\alpha - x_1)\sqrt{x_1 R(x_1)}} + \cdots + \int \frac{dx_{2n+1}}{(\alpha - x_{2n+1})\sqrt{x_{2n+1} R(x_{2n+1})}} = A(\alpha)$$

gefunden, entwickelt Jacobi durch Einführung von Größen, welche von neuen transzendenten Gleichungen abhängen, eine merkwürdige Form dieses Ausdruckes, welche für $n = 1$ unmittelbar das bekannte Additionstheorem der elliptischen Integrale 3. Gattung liefert.

Noch in denselben Tagen schrieb er, durch diese Untersuchungen über das Abelsche Theorem veranlaßt, eine zweite Note „Über die Darstellung einer Reihe gegebener Werte durch eine gebrochene rationale Funktion“, in welcher er auf die von Cauchy gegebene Verallgemeinerung der Lagrangeschen Interpolationsformel zurückkommt, welche eine gebrochene Funktion, deren Zähler und Nenner resp. vom $n - 1$. und m. Grade sind, für eine Reihe von $n + m$ gegebenen Werten derselben darstellt, und sich für $m = 0$ auf die Lagrangesche Funktion reduziert. Jacobi teilt verschiedene Darstellungsweisen hierfür mit, weil „die Darstellung gegebener Werte durch gebrochene

rationale Funktionen in der Theorie der Abelschen Transzendenten von so großer Wichtigkeit ist". Das wesentlichste Theorem, zu welchem Jacobi hierbei gelangt, sagt aus, daß, wenn die rationale Funktion für $x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1}$ die Werte $u_0, u_1, \ldots u_{m+n-1}$ annehmen soll, und es ist $f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{m+n-1})$,

$$R_p = \frac{x_0^{\,p} u_0}{(x_0 - x) f'(x_0)} + \cdots + \frac{x^p_{m+n-1} u_{m+n-1}}{(x_{m+n-1} - x) f'(x_{m+n-1})},$$

$$w_p = \frac{x_0^{\,p}(x_0 - x) u_0}{f'(x_0)} + \cdots + \frac{x^p_{m+n-1}(x_{m+n-1} - x) u_{m+n-1}}{f'(x_{m+n-1})},$$

so wird, wenn die gesuchte Funktion u mit $\frac{N(x)}{D(x)}$ bezeichnet wird, $-\frac{1}{f(x)} \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\Sigma \pm R_0^{(0)} R_1^{(1)} \ldots R_m^{(m)}}{\Sigma \pm w_0^{(0)} w_1^{(1)} \ldots w_{m-1}^{(m-1)}}$, wenn man nach Bildung der beiden Determinanten in jedem ihrer Terme resp. $R_{\alpha+\beta}$ und $w_{\alpha+\beta}$ für $R_\alpha^{(\beta)}$ und $w_\alpha^{(\beta)}$ setzt; durch eine bestimmte Regel kann auch der Zähler unmittelbar aus dem Nenner gebildet werden.

In den Herbstferien verweilte Jacobi in Berlin, um sich wieder ungestört der Fortsetzung seiner Arbeiten widmen zu können; aber auch seine Familienverhältnisse machten seine Anwesenheit wünschenswert: „Sie werden wohl wissen", schreibt er seinem Freunde Leers am 13. Oktober, dem er einen Kupferstich von einer wundervollen Statue des Sophokles verehrte, die er oft im neuen Museum des Lateran während seiner Anwesenheit in Rom bewundert hatte, „daß nach 3 Knaben meine Frau mich jetzt mit der dritten Tochter beschenkt hat."

Um zunächst einen größeren Zuhörerkreis in Berlin um sich zu versammeln, hatte Jacobi nur eine größere Vorlesung über Differential- und Integralrechnung angezeigt, die er vor 23 Zuhörern hielt, trat aber zugleich auch im Laufe des Winters den wissenschaftlichen und künstlerischen Kreisen Berlins näher. „Jacobis sind mir", schreibt eine Dame aus dem Mendelssohn-Dirichletschen Kreise, „ein

überaus angenehmer Gewinn; sein überlegner Geist zeigt sich in jeder Art, und da er uns gern zu haben scheint, benimmt er sich gegen uns aufs Liebenswürdigste; unter Anderm kann man nicht mit mehr Verständniß Musik hören als er.“ Auch der Briefwechsel mit seinen Königsberger Freunden und Fachgenossen Bessel und Neumann nahm wieder einen regeren Verlauf; letzterem schreibt er am 5. Dezember:

„Da die Akademie grade ihre zweimonatlichen Ferien hatte, als mir Ihr ehrenvoller Auftrag zu Theil wurde, so konnte Ihre Arbeit erst am 20. October derselben vorgelegt werden. Inzwischen hatte ich sogleich von Encke amtliche Kenntniß von ihrem Einlaufen nehmen lassen. Da Poggendorff mir von den Herren am gründlichsten die Ampère'schen Vorstellungen zu kennen schien, so ersuchte ich ihn, die Vorlegung der Arbeit mit einigen berichtenden Worten zu begleiten, wozu er sich auch die Formeln von mir geben ließ, damit ihm das Verständniß der im Auszug mitgetheilten Resultate leichter würde. Der Bericht fiel wohl mehr aus Ungeschick als Unwissenheit so schwach aus, daß keiner der andern Herrn Physiker auch nur die geringste Vorstellung von dem genre Ihrer Arbeit erhielt; ich glaube, über ein chinesisches Werk hätte ich ihn besser gemacht. Freilich scheint ihm auch Ihre Arbeit ziemlich chinesisch zu sein; er hat nicht einmal die erste Zeile verstanden. In diesem Gegenstande scheinen auch die technischen Ausdrücke noch nicht so festzustehen oder bekannt zu sein, so daß ich glaube, daß Sie mit einigen umständlichen Erklärungen es wohl hätten wesentlich unsern Physikern und so weit wenigstens erleichtern können, daß sie den Inhalt der Sätze hätten verstehen können. Es wäre wohl sehr gut, wenn wir in Ermangelung Ihrer selbst einen Ihrer Schüler hier hätten, welcher den Dolmetsch abgeben könnte, und insofern wäre es wünschenswerth, daß Kirchhoff herkäme. Außer Geschichte der Physik bei Poggen-

dorff glaube ich sonst nicht, daß er hier was profitiren könnte, wenn er nicht Chemie lernen will. In Betreff einer Unterstützung werden Sie sich wohl an Humboldt wenden müssen, wenn Eichhorn dafür keinen Fonds hat, oder auch könnte Humboldt Ihr Schreiben wegen Kirchhoff, falls Sie noch solches beabsichtigen, bei Eichhorn unterstützen, obschon sie Todfeinde sind. Was Sie selbst betrifft, so denken Sie nur nicht, daß irgend etwas Persönliches gegen Sie im Spiele ist, sondern es ist nur nicht das nothwendig erforderliche Feuer für die Sache, um die Geldhindernisse zu beseitigen. Von Bessel höre ich nichts, also wird es ihm wohl etwas leidlicher gehen . . . Die Akademie hat auf meinen Antrag beschlossen, Ihre Abhandlung in extenso zu drucken . . .“

Im Dezember dieses Jahres veröffentlichte Jacobi noch eine kurze „Über einige die elliptischen Funktionen betreffenden Formeln“ betitelte Note, in welcher er aus der früher gewonnenen Beziehung $F(x) = e^{-\tau u^2} \frac{\Omega\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{\Omega(u)^n}$, worin $x = \sin\operatorname{am}(u, \varkappa)$, $\int\limits_0^u (1 - \varkappa^2 x^2) du = E(u)$, $\int\limits_0^u E(u) du = \log \Omega(u)$, τ eine Konstante und $F(x)$ den rationalen Nenner der Substitution bedeutet, welche eine Transformation der n^{ten} Ordnung ergibt, eine Relation zwischen den Koeffizienten der Entwicklung von $\log F(x)$ nach steigenden x-Potenzen, den Entwicklungskoeffizienten von u^n nach steigenden Potenzen von x, den von $\varkappa$ abhängigen Entwicklungskoeffizienten von x^2 nach steigenden u-Potenzen und den den letzteren analog aus λ gebildeten Größen herleitet; ähnliche Relationen liefert die Multiplikation, woraus wieder bekannte Formeln von Eisenstein folgen.

Das neue Jahr 1846 begann er, von allen Seiten dazu gedrängt, am 3. Januar mit einem in der Singakademie gehaltenen Vortrage „Über Descartes' Leben und seine

Methode, die Vernunft richtig zu leiten und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen", der auch in französischer Übersetzung im Liouvilleschen Journal erschien.

Nach einer meisterhaften historischen Entwicklung des Lebens von Descartes, wie er sie schon in ähnlicher Weise am 27. Oktober 1837 in der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg entworfen hatte, schildert er die Vielseitigkeit in den Schöpfungen dieses großen Gelehrten: „Bald widmet er sich den abstraktesten mathematischen Untersuchungen, bald macht er physikalische Experimente, bald erforscht er die Tiefen der Mechanik, in der er das heute dieses ganze Gebiet beherrschende Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten erfunden hat." Jacobi untersucht die verschiedenen Forschungsmethoden Descartes' und stellt die der Mathematik entlehnte an die Spitze: „Auf Befragen, ob es denn kein Mittel gäbe, sich vor trügerischen Scheingründen zu bewahren, nannte er seine aus dem Schoße der Mathematik gezogene Methode. In mehreren Privatunterhaltungen begeistert er den Kardinal von Bérulle für diese Methode und ihre verschiedenen Anwendungen, welche auch auf Verbesserung des materiellen Wohles der Menschheit abzwecken; denn er geht schon damals darauf aus, durch Vervollkommnung der Mechanik den Effekt der menschlichen Arbeitskräfte zu erhöhen, was heute eine die Welt umgestaltende Wirklichkeit geworden." Ein Jahr, nachdem Jacobi diese Worte gesprochen, erschien „Die Erhaltung der Kraft" von Helmholtz, und es war nach Du Bois-Reymonds Zeugnis Jacobi der einzige Berliner Gelehrte, der die ungeheure Tragweite dieser Arbeit klar erkannte, während noch alle Physiker und Mathematiker sich zu derselben ablehnend verhielten. Jacobi geht sodann zur Besprechung der einzelnen Werke von Descartes über: „Sein erstes großes Werk, das die protestantischen Theologen der Utrechter Universität als atheistisch und staatsgefährlich verfolgten, enthielt vier verschiedene Werke: die Abhandlung

über die Methode, seine Vernunft richtig zu leiten und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen, die Dioptrik, die Meteore und die Geometrie; in den drei letzten Werken wollte er ein Beispiel seiner Methode geben, an einem rein mathematischen, einem rein physikalischen und einem gemischten Gegenstande. Seine Geometrie hat die mathematischen Wissenschaften umgestaltet, die Geometrie von der Herrschaft und Partikularität der Figuren befreit und sie zu einem Gegenstande des allgemeinen Kalküls gemacht.“ Jacobi schließt mit den schönen Worten: „Sein ‘cogito ergo sum’ ist der Ausgangspunkt der neueren Philosophie geworden, es ist die Inschrift des Paniers, mit welchem die neue Wissenschaft vorwärts dringt. Der Mensch weiß, was sein Wesen ist, die Nebel der Scholastik zerreißen, die Sonne des Gedankens geht auf über einer neuen Welt, und in ihrem Lichte wandeln wir noch heute. Es ist nicht der wilde, unbewußte Drang, welcher sich dem Staate und der Religion gegenüberstellt, es ist die ruhige Sicherheit des sich selbst bewußten Geistes, welcher in ihnen und mit ihnen die Aufgabe der Menschheit lösen will.“

Diesen Vortrag, der in Berlin großes Aufsehen erregt hatte, übersandte er dem Minister Eichhorn, der ihm am 23. Januar schrieb: „Ew. Wohlgeboren danke ich verbindlichst für die Aufmerksamkeit, welche Sie mir durch Übersendung Ihrer am 3. d. M. ‘Über Descartes Leben etc.’ gehaltenen Vorlesung erwiesen haben. Ich habe die Schrift mit dem lebhaftesten Interesse gelesen, nicht sowohl wegen der von Ihnen angedeuteten Übereinstimmung meiner in Königsberg gesprochenen Worte mit den Grundsätzen des Descartes, als weil darin über theologische Zeloten und politische Strudelköpfe ein Urtheil gesprochen ist, welches ähnlichen Geistern unserer Zeit zum Correctiv dienen könnte, wenn ihnen die Methode, die Vernunft richtig zu leiten, und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen, zugänglich wäre . . .“

Nachdem er noch am 5. Januar der Berliner Akademie eine nicht weiter veröffentlichte Untersuchung „Über die Zerfällung ganzer Zahlen in vier komplexe Faktoren“ vorgelegt, beschäftigte er sich in den Weihnachtstagen viel mit der ihm von Neumann übersandten fundamentalen Arbeit, deren große Bedeutung er erkannte, deren Studium ihm jedoch mancherlei Schwierigkeiten physikalischer Natur bereitete.

„Theuerster Freund“, schreibt er ihm am 6. Januar 1846, „da Ihre physikalischen Collegen hier so beschäftigt sind, daß sie die Correctur beim besten Willen, wie ich glaube, nicht mit der wünschenswerthen Sorgfalt hätten ausführen können, und Sie mich nun einmal mit der Sache beehrt hatten, so hatte ich, obgleich vielleicht der Unpassendste, aber der am meisten Zeit hat, mich derselben unterzogen. Die Aenderungen, die ich vorgenommen und die Ihnen falsch oder unpassend scheinen, werden Sie leicht verändern können . . . Das Ds im Nenner bei partiellen Differentialien, wenn im Zähler ein anderes d steht, wie $\frac{d^2E}{Ds\,dt}$, ist ferner unerlaubt, auch hier nicht nöthig. Wo es nöthig werden sollte, muß man auch im Zähler zwei verschiedene Charakteristiken schreiben ΔdE. Aber hier sind ja nur gewöhnliche partielle Differentialien, und das Draht- und Wegelement wird erst später unterschieden. Dagegen habe ich das Ds als Factor immer beibehalten, damit man gleich weiß, daß es vom Draht ist. Am fürchterlichsten war für mein Auge DsE, was ganz wie ein Product dreier Factoren aussieht; aber Sie lachen über solche Pedanterieen . . . Ich werde für Sie 25 Exemplare abziehen lassen und noch besonders sogleich ein Exemplar an Weber schicken, der neulich hier war und sich sehr für die Arbeit interessirte . . . Poggendorff hat vor einigen Tagen über Kirchhoff's Abhandlung einen überaus rühmenden Vortrag gehalten. Weber lernte sie hier kennen, und es scheint, daß das

Aufheben, das er davon gemacht, P. das Verständniß eröffnet und ihn in Feuer gesetzt hat. R. meinte zwar, das könne sich jeder selber machen, wenn er es braucht; P. meinte aber, das sei nicht der Fall, er würde es selbst jetzt noch nicht machen können; Weber habe vor einigen Jahren 3 Tage bei ihm gesessen und sich mit dem leichtesten particulären Falle, bis er ihn herausgekriegt, gequält. P. sagte in der Akademie, die Abhandlung sei so knapp geschrieben, daß zu befürchten steht, sie würde auf die Physiker nicht den Eindruck, den sie sollte, machen. Dies war in so fern naiv, als es ganz sein Fall gewesen zu sein scheint. Ich würde mich mehr für Kirchhoff's Herkommen interessiren, wenn ich wüßte, was er hier holen soll. Für dasselbe Geld wie hier könnte er ein Jahr in Paris leben, und das scheint mir doch für ihn erheblicher. Der Antrag für die Mittel dazu könnte natürlich nur durch Humboldt direct an den König gehen, daß dieser Eichhorn sagte, das Geld zu geben . . . Es ist jetzt eine curiose Zeit, die man am klügsten thäte, vorübergehen zu lassen, ohne Reactionen zu provociren, und sich auf das zu beschränken, worüber man sich in seiner amtlichen Stellung nach seinem Gewissen, wenn man dazu aufgefordert wird, erklären muß . . .“

Am 13. Januar antwortet ihm Neumann auf die Kirchhoffsche Arbeit bezüglich:

„Was Poggendorff und Kirchhoff betrifft, so beurtheilen Sie das Sachverhältniß richtig, indeß muß ich doch bemerken, daß der Inhalt dieser in Rede stehenden Anmerkung die Ohm'schen Gesetze vervollständigt und ihnen erst eine ganz allgemeine Anwendbarkeit giebt, obgleich er eine einfache Folgerung aus der Ohm'schen Theorie ist. Unter den Physikern wird Kirchhoff grade durch diesen unwesentlichen Theil seiner Abhandlung Renommée erhalten, weil er von häufiger Anwendung ist . . . Ich habe natürlich in dem Seminarbericht Kirchhoff's Arbeiten sehr

hervorgehoben, auch die gedruckte nachgeschickt — die Folge war, daß der Minister sich garnicht über die Arbeiten des Seminars äußert, sondern sich nur freut über den guten Fortgang des Seminars . . .“

Der Druck der Neumannschen Arbeit macht Jacobi, der sich in diese Untersuchungen physikalisch-mathematischer Natur hineinzuarbeiten bestrebt ist, mancherlei Schwierigkeiten. Er schreibt Neumann am 28. Januar:

„Da ich wünschte, daß Ihre Abhandlung bald in's Publicum käme, so wollte ich sie in den Band der Akademie für 1844 bringen lassen. Jetzt ist dies nicht mehr nöthig... Ich bitte Sie also, wenn auch nicht unnöthig die Rücksendung zu verzögern, doch mit aller Muße und Sorgfalt den Abdruck durchzusehen, damit ich überzeugt sein kann, daß Sie die gemachten Aenderungen auch wirklich bemerkt haben und sie Ihnen recht sind . . . Die Abhandlung wird, wie Poggendorff will, in die physikalische Abtheilung kommen. Ich hatte ihn damit geneckt, daß ich sie in die mathematische Klasse bringen wollte, weil ich daraus, daß er (offenbar aus Zeitmangel) einen so schlechten Bericht darüber gemacht, geschlossen, daß sie nicht zur Physik gehöre . . . Indem ich Ihren Sommaire genauer jetzt angesehen, habe ich mich überzeugt wie werthvoll derselbe ist, und wie sehr Sie Recht haben, ihn vordrucken zu wollen. Obgleich, wenn er nun allein gedruckt worden wäre, er wohl nicht so hätte gewürdigt werden können. Da ich keine andere Überschrift wußte, habe ich Vorbericht darüber setzen lassen. Vielleicht fällt Ihnen ein besonderes Wort ein . . . Darum Gott befohlen.“

Die interessante Antwort Neumanns vom 5. Februar lautete:

„Gewiß ist ε ein Begriff! und wenn meine Abhandlung einiges Verdienst hat, so ist es dies, den Begriff dieser Größe als das eigentliche physikalische Problem aller Inductionserscheinungen hingestellt zu haben. Aber er ist in

tiefe Mysterien noch verhüllt, er bezieht sich auf den geheimnißvollen Zusammenhang, in welchem alle Körper, wie sie auch außer einander liegen, unter einander stehen; wird ihre Spannung gestört, so entsteht, wenn die sonstigen Bedingungen erfüllt sind, ein elektrischer Strom. Dieses Mysterium fühlen zu lassen, gab ich in § 2 die verschiedenen Definitionen der inducirten elektrischen Kraft durch lebendige Kraft, Druck etc. Ein Wort für ε weiß ich nicht ... Das Potential habe ich allerdings in einem etwas allgemeineren Sinne genommen; ich denke dies aber auch an einer Stelle der Abhandlung angedeutet zu haben. Ich gebe folgende Definition: das Potential eines Systems von Kräften, welche nach einem beliebigen Gesetz auf ein Element wirken, in Beziehung auf dieses Element ist die Function der drei rechtwinkligen Coordinaten desselben, deren erste partielle Differentialquotienten die mit diesen parallelen Componenten der Kraft darstellen, mit welcher das System der Kräfte auf das Element wirken und deren zweite partielle Differentialquotienten summirt gleich Null sind. NB. Nicht jedes System von Kräften hat ein Potential, z. B. das System von Kräften eines ungeschlossenen Stromes hat kein Potential. Das Potential eines Systems beliebiger Kräfte bezogen auf ein System von Elementen ist die Summe der Potentiale des Kräftesystems in Beziehung auf alle Elemente. Noch muß ich bemerken, daß die Kräftesysteme der geschlossenen elektrischen Ströme, welche nach einem Gesetze wirken, in welchem die Richtungen der Ströme vorkommen, sich mittelst der durch ihre Curven gelegten Oberflächen o und ω immer ersetzen lassen durch andere Kräftesysteme, welche nach dem Newton'schen Gesetze $\frac{1}{r^2}$ wirken, was wohl immer der Fall sein wird, wenn das gegebene System der Kräfte ein Potential hat ..."

Die weiteren von Neumann und Kirchhoff in den Monatsberichten der Berliner Akademie sowie in den Poggen-

dorffschen Annalen veröffentlichten Arbeiten gaben noch bisweilen Gelegenheit zur Korrespondenz zwischen Neumann und Jacobi. „Die Benennung Kegelöffnung der Curve in Bezug auf den Punkt", schreibt Jacobi an Neumann, „habe ich auf Dirichlet's Vorschlag angenommen, ich wünsche, daß sie Ihren Beifall hat. ... Bei Ihrer Definition vom Potential kann dieselbe noch eine willkührliche Constante enthalten, da es nur Differentialbedingungen zu genügen hat. Multiplicirt man also, wie bei Ihnen, mit einem Raumelement und summirt, so kann noch der Draht mit einer willkührlichen Constanten multiplicirt hinzukommen, so daß die Sache nicht ganz bestimmt ist... Schreiben Sie mir darüber einige Worte und bedenken Sie immer, daß ich nur nach flüchtigem Anblick urtheilen kann, also darauf gänzlich gefaßt bin, etwas Verkehrtes gesagt zu haben... Als Weber hier bei P. den Monatsbericht mit Ihrer Inhaltsangabe flüchtig sah, äußerte er, daß er von seinen unipolaren Untersuchungen zurückgekommen sei. ... D. sagte mir neulich, er habe zu seiner Freude ein Problem gelöst, mit dem er sich lange beschäftigt, die Verbreitung der Elektricität auf einem rechtwinkligen Parallelepipedum; die Form der Entwicklungen schreitet nach einfachen, doppelten, dreifachen etc. Integralen fort... Der Vortrag von P. in der Akademie über Kirchhoff's Abhandlung bezog sich nur auf die letzten Zeilen in der Anmerkung, und da meinte P. R., P. hätte zu viel Aufhebens davon gemacht, was wohl der Fall war. Von der eigentlichen Abhandlung sprach P. gar nicht."

Zunächst gestattete das Befinden Jacobis diesem nur kleinere, mehr ergänzende Untersuchungen seiner früheren Arbeiten auszuführen; am 14. Februar veröffentlichte er eine kurze Note „Über den Wert, welchen das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - A\cos\varphi - B\sin\varphi}$ für beliebige imaginäre Werte

von A und B annimmt", und findet, unter der Annahme, daß die Funktion unter dem Integral nicht unendlich wird, also $\varDelta = ab' - a'b \gtrless \sqrt{a'^2 + b'^2}$, worin $A = a + a'i$, $B = b + b'i$, daß, wenn $(ab' - a'b)^2 > a'^2 + b'^2$, das Integral verschwindet, während es, wenn $(ab' - a'b)^2 < a'^2 + b'^2$, den Wert $\frac{2\pi}{\sqrt{1 - A^2 - B^2}}$ annimmt mit positivem Werte des reellen Teiles der Wurzelgröße; er ermittelt auch für ganze positive r die Werte der allgemeineren Integrale $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos r\varphi \, d\varphi}{1 - A\cos\varphi - B\sin\varphi}$ und $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin r\varphi \, d\varphi}{1 - A\cos\varphi - B\sin\varphi}$ als einfache algebraische Funktionen der Größen $D = a + b' + (a' - b)i$ und $D' = a - b' + (a' + b)i$.

Nicht bloß eignes schlechtes Befinden drückte Jacobi nieder, sondern auch die überaus traurigen Nachrichten von dem Gesundheitszustande seines verehrten alten Freundes Bessel raubten ihm alle Ruhe; er schreibt ihm in dieser Zeit öfter, ohne eine Antwort von ihm abzuwarten, und teilt ihm alles mit, was ihn bekümmert. Eisenstein hatte in dieser Zeit durch verschiedene Dinge seinen und Dirichlets sowie Steiners Unwillen in hohem Grade erregt. „Wir haben hier einige Noth mit Eisenstein", schreibt er am 23. Februar an Bessel, „... da mündliche Vorstellungen nichts helfen, so habe ich ihn (zuerst in meinem Leben) publice getadelt, was einen guten Effect gemacht zu haben scheint. Gauss ist uns ganz unbegreiflich, der ihn, der noch keinen einzigen Satz fand, sondern nur anderer Sätze sinnreich bewiesen oder bloße Durchführungen fremder Gedanken gemacht, wie Weber sagt, augenblicklich sich selbst gleichgestellt hat ..."

Schon am 17. März wurde Jacobi schwer von der Todesnachricht Bessels getroffen. „Hier ist niemand", schreibt ihm Neumann am 20. März, „der von Bessel auf eine ihm würdige Weise sprechen kann; Sie werden es

in der Academie thun, und weil Sie es allein können, gern thun",

und in bezug auf die früheren Bemerkungen Jacobis bezüglich der Arbeit Neumanns fügt dieser hinzu:

„Ob es am Ende doch nicht besser wäre, die Definition des Potentials zu unterlassen? Was eigentlich hervorzuheben wäre, liegt in meiner Definition nur versteckt; es ist dies, daß es Kräftesysteme giebt, welche in Bezug auf ein Element, auf welches sie wirken, kein Potential haben, wohl aber in Bezug auf bestimmte Systeme von Elementen, und daß in diesem Falle statt jenes Kräftesystems sich ein anderes substituiren läßt, welches auch in Bezug auf ein Element ein Potential hat. Das Potential dieser substituirten Kräfte steht unter der Gauss'schen Definition $\sum \frac{m}{\varrho} \cdots$ Für Kirchhoff hat das Concilium 200 ₰ Reisestipendium bewilligt und wird später beim Minister antragen, seinerseits auch 200 ₰ zuzulegen. Ob Kirchhoff wohl, wenn es glückt, mit 400 ₰ eine Reise nach Paris machen und sich $^1/_2$ Jahr dort aufhalten kann? . . ."

Da Jacobi sich für Kirchhoff in hohem Grade interessierte und ihn am liebsten in seine Nähe gezogen hätte, so beeilte er sich am 2. April Neumann zu antworten:

„In Bezug auf Kirchhoff sind Poggendorff und Magnus der auf eigne Erfahrungen begründeten Meinung, daß falls er etwa in Paris etwas zu arbeiten beabsichtige, er dies dort nicht erreichen würde, sondern daß es für ihn das zweckmäßigste wäre, sich hier in der Chemie noch zu vervollkommnen, wozu er in K. gar keine Gelegenheit hat, hier aber eine außerordentliche hätte, indem ihm Rose's und Magnus' Zuvorkommenheit von großer Hülfe sein könnte. Dabei solle er sich eine eigne experimentelle Arbeit mitbringen, zu der er hier durch Apparate unterstützt werden könnte. Paris könnte er sich dann in einem Aufenthalte von 6 Wochen ansehen. Übrigens wäre es wohl gut

für Kirchhoff, wenn Sie privatim über ihn an Schulze schrieben in Bezug auf das, was ihm vom Ministerium gewährt werden soll. Sie müssen einmal von ihrer Gewohnheit abstrahiren und sich zu dieser extraordinären Leistung bequemen . . .“

Inzwischen hatte sich das recht schlechte Verhältnis von Jacobi zu Eisenstein ein wenig gebessert, und es ist interessant, die Auffassung des jugendlichen Eisenstein aus einem vom 20. April datierten und an Stern gerichteten Schreiben dieses bisweilen krankhaft erregten und in seiner Gesundheit schon nervös zerrütteten, genialen Mathematikers kennen zu lernen:

„Es wäre meine Pflicht gewesen, auf Ihren herzlichen liebevollen Brief, der mir die größte Freude bereitet hat, sogleich zu antworten. Aber theils ist meine Faulheit an der Verzögerung schuld, theils hatte ich gar keine rechte Lust, auf die fatale Geschichte mit Jacobi wieder zurückzukommen. Das ganze Räthsel ist, daß es Jacobi verdrießt, daß ich nicht sogleich, nachdem ich von seinen Arbeiten über Kreistheilung erfahren hatte, öffentlich seine Priorität anerkannt habe, während ich doch Gauss so oft anführe. Daß ich nun dies unterlassen habe, daran ist bloß meine unschuldige Einfalt Schuld, da ich mich um dergleichen Aeußerlichkeiten nicht kümmerte, sondern nur an die Wissenschaft selbst dachte; durch Gauss habe ich nun einmal meine mathematische Bildung erlangt, seine Leistungen sind mir geläufig, und deshalb führe ich ihn an; die Arbeiten von Jacobi sind mir erst zugänglich geworden, seit ich ihn persönlich kenne, d. h. seit er hier in Berlin ist. Muß man denn wirklich alles durchkramen, ehe man drucken läßt; ich glaubte, daß, wenn man sich mit dem Crelle'schen Journal au fait erhält, man genug thut. Inzwischen kann Jacobi selbst unmöglich daran glauben, daß ich ihm seine Sachen gestohlen habe, denn er hat eben auf diese meine früheren Arbeiten hin vor $^5/_4$ Jahren den

Antrag zu meiner Doctorernennung bei der Breslauer Facultät gestellt. Übrigens gebührt in den Beweisen der Reciprocitätssätze weder mir noch Jacobi die Priorität, sondern Gauss; aber gedruckt sind die Beweise zuerst von mir erschienen; am Ende hat doch Jacobi auch nur gesagt, daß er die Beweise gefunden habe, Gauss hat dasselbe aber schon viel früher gesagt, Theoria residuorum biquadr. und schon an einem viel früheren Orte: demonstrationes et ampliationes novae etc. etc. — hic aqua haeret ... Schon einige Zeit, ehe ich Ihren Brief erhielt, hatte ich ein Manuscript fertig, worin ich Jacobi in höchst gemäßigter Weise antworte und die Untersuchungen vereint zusammenstelle, welche ich in früherer Zeit über Kreistheilung angestellt hatte; denn was ich damals herausgab, war kaum die Hälfte dessen, was ich herauszugeben beabsichtigte, bis mir Jacobi in die Quere kam. Ich habe es aber aufgegeben, dieses Manuscript wenigstens für jetzt drucken zu lassen, denn einmal ist Jacobi außerdem ganz freundlich gegen mich, bis auf die allerletzte Zeit, wo ich ihn selten besuche, was aber an mir und nicht an ihm liegt, und dann darf ich ihn mir auch jetzt nicht erzürnen, weil ich meine Habilitation hier beabsichtige, wobei er mir einerseits nutzen andererseits aber auch sehr schaden kann ..."

Für den Sommer 1846 hatte Jacobi eine Vorlesung über die allgemeine Theorie der Oberflächen und Linien doppelter Krümmung angekündigt, die er vor zwölf Zuhörern hielt; noch vor Beginn derselben legte er am 7. Mai der Akademie eine „Über den Eulerschen Beweis der merkwürdigen Eigenschaften der Pentagonalzahlen" betitelte, aber in den Monatsberichten nicht veröffentlichte Untersuchung vor, deren Ausführung er am 12. Mai unter dem Titel „Beweis des Satzes, daß jede nicht fünfeckige Zahl ebenso oft in eine gerade als ungerade Anzahl verschiedener Zahlen zerlegt werden kann" dem Crelleschen Journal übergab, und in welcher er einen rein arithmetischen Beweis gab für den von

Euler aus der Entwicklung des Produktes $(1 \pm q)(1 \pm q^2) \cdot (1 \pm q^3) \ldots$ in eine Reihe hergeleiteten Satz, daß jede Zahl, welche nicht die Form $\frac{1}{2}(3i^2 \pm i)$ einer fünfeckigen Zahl hat, ebensooft in eine gerade als in eine ungerade Menge anderer voneinander verschiedener Zahlen zerlegt werden kann, Zahlen dagegen von der Form $\frac{1}{2}(3i^2 \pm i)$ in eine gerade Menge einmal mehr oder weniger als in eine ungerade zerlegt werden können, und zwar das eine oder das andere, je nachdem i gerade oder ungerade ist. Jacobi bezeichnet, wenn eine Größe P auf alle mögliche Arten aus anderen, welche unter sich und von Null verschieden sind und aus der Zahl gegebener Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ genommen werden sollen, durch Addition zusammengesetzt wird, ohne dabei ein Element wiederholt anzuwenden, den positiven oder negativen Überschuß der Anzahl derjenigen Zusammensetzungen, in welchen die Zahl der angewandten Elemente gerade ist, über die Anzahl derjenigen, in welchen diese Anzahl ungerade ist, mit $(P, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ und beweist den folgenden Satz: Es seien b_0 und a positive Größen, ma ein die Größe b_0 übertreffendes Vielfaches von a; es sei $b_0, b_1, b_2, \ldots$ eine abnehmende arithmetische Reihe mit der konstanten Differenz $-a$ und $a, a_1, a_2, \ldots$ eine beliebige wachsende arithmetische Reihe; ferner sei $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$, so wird das Aggregat $(b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) + \cdots + (b_{m-1}, a, a_1, \ldots a_{m-1})$ verschwinden, außer wenn b_1 einer der Größen $s_{i-1} + 2s_i$ oder $2s_{i-1} + s_i$ gleich wird, und in diesem Falle den Wert $(-1)^i$ erhalten, woraus gefolgert werden kann, daß der Überschuß der Anzahl der Zusammensetzungen einer Zahl P aus einer geraden Zahl über die Anzahl ihrer Zusammensetzungen aus einer ungeraden Zahl verschiedener ganzer positiver Zahlen, wenn P eine fünfeckige Zahl $\frac{1}{2}(3i^2 \pm i)$ ist, gleich $(-1)^i$ wird und verschwindet für alle übrigen Werte von P. Aus der zum Beweise dieses Satzes von Jacobi hergeleiteten Beziehung $(b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) + \cdots + (b_{m-1}, a, a_1, \ldots a_{m-1}) = [b_0] - [c_0] - (b_m, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}) - \{(c_1, a_1) + (c_2, a_1, a_2)$

$+ \cdots + (c_{m-2}, a_1, a_2, \ldots a_{m-2})\}$, worin $c_i = b_{i+1} - a_{i+1}$, und das Zeichen $[N] = 1$, wenn N verschwindet, und $= 0$, wenn N von Null verschieden ist, ergibt sich, indem die konstante Differenz der Reihe $a, a_1, a_2, \ldots$ der Einheit gleich genommen und $q^a = z$ gesetzt wird, die die Eulersche Gleichung einschließende allgemeinere Beziehung $(1-z) + z(1-z)(1-qz) + z^2(1-z)(1-qz)(1-q^2z) + \cdots = 1 + \sum_1^\infty (-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2-i)} z^{3i-1} + \sum_1^\infty (-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)} z^{3i}$, aus der eine Reihe weiterer neuer Formeln für die Theorie der elliptischen Transzendenten hergeleitet wird.

In dieser Zeit begann Jacobi sich eingehender mit den Anwendungen der elliptischen Funktionen auf geometrische und mechanische Probleme zu beschäftigen, und wurde dadurch auf eine Reihe von Hilfsuntersuchungen in der Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Transzendenten geführt, von denen er zunächst am 13. Mai 1846 die „Über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der Abelschen und höheren Transzendenten" betitelte veröffentlichte. Zuvörderst gibt Jacobi einen Beweis für das von Abel in einer nachgelassenen Arbeit ausgesprochene Theorem, wonach, wenn $f(x)$ eine ganze Funktion von x, ferner $f_1(x), f_2(x)$ zwei beliebige ganze Funktionen von x sind, welche der Gleichung $f_1(x) + f_2(x) = \frac{df(x)}{dx}$ genügen, und $\frac{d \log \varphi(x)}{dx} = \frac{f_1(x)}{f(x)}$, $\frac{d \log \psi(x)}{dx} = \frac{f_2(x)}{f(x)}$ gesetzt wird, der Ausdruck $\varphi(\alpha) \int \frac{dx}{(x-\alpha)\varphi(x)} - \psi(x) \int \frac{d\alpha}{(\alpha - x)\psi(\alpha)}$ ein Aggregat von Produkten der Form ist $C_{m,n} \int \frac{\alpha^m d\alpha}{\psi(\alpha)} \int \frac{x^n dx}{\varphi(x)}$, worin m und n ganze positive Zahlen und die Größen $C_{m,n}$ Konstanten sind, die Jacobi in der Form

$$\frac{n+1}{m+n+2} a_2^{(m+n+1)} - \frac{m+1}{m+n+2} a_1^{(m+n+1)}$$

findet, wenn $a_1^{(i)}$ und $a_2^{(i)}$ die Koeffizienten von x^i in den ganzen

Funktionen $\psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}$ und $\varphi(x)\frac{d\psi(x)}{dx}$ sind. Um die ebenfalls von Abel gegebene Ausdehnung dieses Satzes auf die Integrale linearer Differentialgleichungen zu untersuchen, geht Jacobi von dem Hilfssatz aus, daß einem Ausdrucke $Ay + A_1 y' + \cdots + A_n y^{(n)}$ immer ein anderer $Bz + B_1 z' + \cdots + B_n z^{(n)}$ entspricht, von der Art, daß für unbestimmte Funktionen y und z der Ausdruck $z\,[Ay + A_1 y' + \cdots + A_n y^{(n)}] + y\,[Bz + B_1 z' + \cdots + B_n z^{(n)}]$ ein vollständiges Differential ist, und zwar besteht dann notwendig die Beziehung $By + B_1 y' + \cdots + B_n y^{(n)} = -Ay + \frac{d(A_1 y)}{dx} - \frac{d^2(A_2 y)}{dx^2} + \cdots \pm \frac{d^n(A_n y)}{dx^n}$, mittels welcher der zweite Ausdruck aus dem ersten bestimmt wird, und ebenso folgt $Ay + A_1 y' + \cdots = -By + \frac{d(B_1 y')}{dx} - \cdots$; bezeichnet man nun den ersteren Ausdruck mit $[y]_2$, den letzteren mit $[y]_1$ und das Integral $\int(z[y]_1 + y[z]_2)\,dx$ mit $[y, z]$, so gestaltet Jacobi den Abelschen Satz, nachdem er gezeigt, daß, wenn $y_1, y_2, \ldots y_n$ die n Lösungen der Gleichung $[y]_1 = 0$, und $z_1, z_2, \ldots z_n$ die der Gleichung $[z]_2 = 0$ sind, die n^2 Ausdrücke $[y_i, z_\varkappa]$ Konstanten gleich sind, und daß daher, da man für $z_1, \ldots z_n$ beliebige lineare Funktionen derselben mit konstanten Koeffizienten einführen kann, diese Konstanten so bestimmt werden können, daß die Ausdrücke $[y_i, z_i] = 1$, $[y_i, z_\varkappa] = 0$ sind, in die folgende Form um: Genügen $A, A_1, \ldots A_n$ und $B, B_1, \ldots B_n$ der Bedingung, daß der oben bezeichnete Ausdruck ein vollständiges Differential wird, und bestimmt man die n unabhängigen Lösungen der Differentialgleichungen in y und z so, daß das für unbestimmte Funktionen y und z und ohne Hinzufügung einer willkürlichen Konstanten dargestellte Integral $[y, z]$ verschwindet, wenn man $y = y_i$, $z = z_\varkappa$, oder $= 1$ wird, wenn man $y = y_i$, $z = z_i$ setzt, ist ferner $C_{m,p}$ der Koeffizient von $\frac{1}{x}$ in dem Ausdrucke $-x^{-m-1}\{Ay + A_1 y' + \cdots + A_n y^{(n)}\}$, wenn $y = x^{-p-1}$, oder was dasselbe ist, in dem Ausdrucke

$x^{-p-1}\{By + B_1 y' + \cdots + B_n y^{(n)}\}$, wenn $y = x^{-m-1}$ gesetzt wird, sind endlich $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$; $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ die Funktionen von α, in welche sich $y_1, y_2, \ldots y_n$; $z_1, z_2, \ldots z_n$ verwandeln, wenn man α für x substituiert, so wird $\Pi(\varkappa)\Big\{z_1^{(i)}\int\frac{y_1\,dx}{(x-\alpha)^{\varkappa+1}}$ $+ \cdots + z_n^{(i)}\int\frac{y_n\,dx}{(x-\alpha)^{\varkappa+1}}\Big\} - \Pi(i)\Big\{\eta_1^{(\varkappa)}\int\frac{\zeta_1\,d\alpha}{(\alpha-x)^{i+1}} + \cdots +$ $\eta_n^{(\varkappa)}\int\frac{\zeta_n\,d\alpha}{(\alpha-x)^{i+1}}\Big\} = \sum C_{m,p}\eta_g^{(\varkappa)}z_h^{(i)}\int\alpha^m\zeta_g\,d\alpha\cdot\int x^p y_h\,dx$, wo in der mit Σ bezeichneten vierfachen Summe g und h die Werte $1, 2 \ldots n$ erhalten, m und p alle Werte, für welche sich in einer oder in mehreren von den Funktionen $x^{-l-1}A_l$ ein Term x^{m+p} findet, und die Accente i und $\varkappa$, welche die Ordnung der Differentiale anzeigen, beliebig angenommene Zahlen aus der Reihe der Zahlen 0, 1, 2, ... $n-1$ sind. Hat die Differentialgleichung $Ay + A_1 y' + \cdots + A_n y^{(n)} = 0$ die Form der isoperimetrischen, so wird die Differentialgleichung $By + B_1 y' + \cdots + B_n y^{(n)} = 0$ mit ihr identisch, jede Lösung ist zugleich ein Faktor, welcher sie integrabel macht und umgekehrt. „Um das aufgestellte allgemeine Theorem in ein vollständiges Licht zu setzen, und insbesondere die Anfangsgrenzen der Integrale zu bestimmen, und die notwendigen Beschränkungen des Theorems anzugeben, ist es nötig, den Charakter der Lösungen der linearen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen der Variabeln sind, näher zu ergründen, wofür, wenn man die 2. Ordnung überschreitet, noch wenig von den Mathematikern geschehen ist.“

Am 1. Juni wurde Jacobi zum associé étranger der Pariser Akademie erwählt. „C'est par les noms de Newton et de Leibniz“, schreibt ihm Liouville noch an demselben Tage, „que s'ouvre notre liste d'associés; les noms de Gauss et de Jacobi figureront dignement à côté.“

Jacobi, der es sich zur Aufgabe gemacht, den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen und Universi-

täten Deutschlands zu heben, verschmähte es nicht, der mathematischen Welt auch sein Urteil über Bücher von elementarem Charakter kundzugeben, und es ist besonders ein von ihm am 19. Juni 1846 verfaßtes Vorwort zu A. L. Buschs Vorschule der darstellenden Geometrie von hervorragendem Interesse. Jacobi hebt dieses Buch als ein solches hervor, welches nicht bloß auf Gymnasien eine treffliche Vorschule liefern, sondern auch Künstlern und Technikern eine nützliche Unterweisung bieten wird. „... Die durch ernstes Studium und fleißige Übung mit Zirkel und Lineal hervorgegangene Kenntnis streng geometrischer Formen und Proportionen kam Dürer hauptsächlich in der Kunst zu statten, durch welche er am meisten das Staunen seiner Zeitgenossen und die Bewunderung der Nachwelt erregt hat, wenn, wie Erasmus in seinem Dialoge über die richtige Aussprache des Lateinischen und Griechischen sich ausdrückt, 'größer wie Apelles, ohne den Lockreiz der Farben, bloß durch glückliche Anwendung schwarzer Linien er Schatten, Licht, Glanz, Erhöhungen, Vertiefungen, die verschiedene Stellung desselben Gegenstandes, die harmonischen Maße, ja das zu malen Unmögliche, Feuer, Lichtstrahlen, Donner, Wetterleuchten, Blitz, Nebel, alle Sinne und Leidenschaften, die ganze menschliche Seele von der Leibesgestalt wiederstrahlend, ja fast die Stimme selbst so vor die Augen hinstellt, daß durch Hinzufügung der Farbe dem Werke nur unrecht geschehe.' Das gründliche geometrische Vorstudium erweiterte den Blick und die Sphäre der Tätigkeit jener alten Meister, Piero della Francesca, Gentile und Giovanni Bellini, Alessandro Botticelli, Filippino und Domenico Ghirlandajo, Pietro Perugino, Andrea, Mantegna, welche, wie uns der große Mathematiker Fra Luca dal Borgo, der häufig mit ihnen in geometrischen Gesprächen verkehrte, in seiner Summa Arithmetica berichtet, immer mit Zirkel und Lineal ihre Werke proportionierten und sie so zu der Vollendung brachten,

die wir an ihnen bewundern ... Die Strenge der geometrischen Beweise ist eine Erfindung der Griechen, welche dem menschlichen Verstande nur zur höchsten Ehre gereicht. Aber sie ist nur dem reiferen Knaben- und angehenden Jünglingsalter eine passende und gesunde Nahrung, und dann nebst der Grammatik eine wahre Zucht des Verstandes. Dem Knaben, dem diese Welt der geometrischen Formen noch eine gänzlich fremde ist, mit den ersten Vorstellungen, die man ihm davon überliefert, zugleich schon zuzumuten, sich darin in der Weise folgerechten Denkens nach systematischem Fortschritt zu bewegen, scheint keine gute Pädagogik. Ich schreibe diesem Mißverhältnis hauptsächlich das beachtenswerte Phänomen zu, daß zwar von den andern Unterrichtsgegenständen eine Färbung, ein Interesse im späteren Leben zurückzubleiben pflegt, von den mathematischen dagegen bei der großen Mehrzahl der Lernenden jede Spur bis auf die Erinnerung schwindet, während doch gerade diese Formen, diese Proportionen, deren Gesetzmäßigkeit und Zusammenhang den jugendlichen Scharfsinn beschäftigt hat, uns auch in der Folge fortwährend umgeben und ihre Fragen an uns richten ..."

Einige Umformungen der unendlichen Produkte und Reihen seiner Fundamenta führten ihn zu einer Verallgemeinerung der hypergeometrischen Reihen, und er veröffentlichte darüber am 28. Juni eine kürzere Note betitelt „Über einige der Binomialreihe analoge Reihen". Ersetzt man den p. Binomialkoeffizienten der Binomialreihe durch $v_p = \frac{(1-v)(1-xv)(1-x^2v)\dots(1-x^{p-1}v)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^p)}$, so folgt, wenn die Reihe $1 + \frac{v-w}{1-x}z + \frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}z^2 + \frac{(v-w)(v-xw)(v-x^2w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3 + \cdots$ mit (w, v) bezeichnet wird, daß $\frac{1}{[w, v]} = [v, w]$ und $[w, v] = \frac{[w, 1]}{[v, 1]}$ ist. Es ergibt sich ferner $[w, v] = \frac{(1-wz)(1-xwz)(1-x^2wz)\dots}{(1-vz)(1-xvz)(1-x^2vz)\dots}$, und danach außer einer schon

von Schweins gefundenen Formel noch

$$1+\frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-x^{-1}tr)}+\frac{(1-s)(1-xs)(1-t)(1-x^{-1}t)r^2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{-1}tr)(1-x^{-2}tr)}+\cdots$$

$$=1+\frac{(1-t)(1-s)r}{(1-x)(1-x^{-1}sr)}+\frac{(1-t)(1-xt)(1-s)(1-x^{-1}s)r^2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{-1}sr)(1-x^{-2}sr)}+\cdots$$

und ähnliche. Bezeichnet man das Produkt $(1-r)(1-xr)$ $(1-x^2r)\cdots(1-x^{m-1}r)$ für $x<1$ mit $F(r)$, so ist $\frac{(1-r)F(xr)}{(1-x^m r)F(r)}=1$, und will man einen Ausdruck haben, welcher die Fundamentaleigenschaft dieses Produktes besitzt und sich für ein ganzes positives m auf das Produkt selbst reduziert, so dient dazu der ins Unendliche fortlaufende Ausdruck $\frac{1-r}{1-x^m r}\,\frac{1-xr}{1-x^{m+1}r}\,\frac{1-x^2r}{1-x^{m+2}r}+\cdots$, da der Quotient desselben durch das vorgelegte Produkt

$$=\frac{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{n-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{m+n-1}r)}$$

sich mit wachsendem n sehr schnell der Einheit nähert. Die oben für die Entwicklung einer Reihe in ein unendliches Produkt aufgestellten Beziehungen führen für $x=r=s=t=1$ auf den speziellen Fall der hypergeometrischen Reihe $1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}+\cdots$, welcher Grenzfall schwieriger zu behandeln ist als der allgemeine, in welchem x um eine beliebige endliche Größe kleiner als 1 ist, weil bekanntlich α, β, γ noch Bedingungen unterworfen werden müssen, damit die Reihe konvergent ist.

Endlich ist aus dem Sommer noch eine kurze, aber wichtige und folgenreiche Arbeit zu erwähnen, die Jacobi am 14. Juli unter dem Titel „Über eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen“ veröffentlichte. Wenn man für das System hyperelliptischer Differentialgleichungen $\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\cdots+\frac{dx_n}{\sqrt{X_n}}=0,\ \ldots\ \frac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}}+\cdots+\frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{X_n}}=0$, worin X eine ganze

Funktion $2n$. Grades ist, die algebraischen Integrale in rationaler Form darstellen will, so wie Euler für $n = 2$ das Integral von $\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0$ in die Form einer Gleichung 2. Ordnung zwischen $x_1 + x_2$ und $x_1 x_2$ gebracht hat, so führt die Fortschaffung der Wurzelgrößen wegen der möglichen Reduktibilität der rational gemachten Gleichung auf Schwierigkeiten. Jacobi findet, daß das System von $n - 1$ rationalen Gleichungen, durch welche jenes hyperelliptische System vollständig integriert wird, aus einer Gleichung 2. Grades zwischen der Summe der Größen $x_1, \ldots x_n$ und der Summe ihrer Amben, und aus $n - 2$ andern Gleichungen besteht, mittels welcher durch diese beiden Größen die Summe der Ternen, Quaternen etc., endlich das Produkt der Variabeln linear ausgedrückt werden. Zur Bildung dieser Gleichungen muß X in der Form $S^2 - RT$ dargestellt werden, wo R, S, T ganze Funktionen n. Grades sind, und die hierbei willkürlich anzunehmenden konstanten Größen geben die willkürlichen Konstanten, mit denen die rationalen Integralgleichungen behaftet sind; stellt man dann die Gleichung auf $Ry^2 + 2Sy + T = 0 = Yx^n - Y_1 x^{n-1} + \cdots \pm Y_n$, worin $Y, Y_1, \ldots Y_n$ ganze Funktionen 2. Grades von y sind, und nennt $x_1, x_2, \ldots x_n$ die zu einem gegebenen y gehörigen Werte von x, so ergibt sich durch Differentiation $\frac{dx_i}{\sqrt{S_i^2 - R_i T_i}}$ $+ \frac{2dy}{Y(x_i - x_1)(x_i - x_2) \ldots (x_i - x_n)} = 0$, oder wenn P_i eine rationale Funktion von x_i ist, $\sum \frac{P_i dx_i}{\sqrt{S_i^2 - R_i T_i}} + Q dy = 0$, worin $Q = \frac{2}{Y} \sum \frac{P_i}{(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_n)}$ sich vermöge der obigen Gleichung rational durch y ausdrückt. Ist P_i eine ganze Funktion von niedrigerem Grade als dem $n - 1$., so ist $Q = 0$, und man erhält somit das hyperelliptische Differentialgleichungssystem. Zur Darstellung der Funktion X in der Form $S^2 - RT$ benutzt Jacobi das Lagrangesche Inter-

polationsproblem, indem er eine ganze Funktion S vom $n-1$. Grade bestimmt, welche für n willkürlich angenommene Werte $a_1, a_2, \ldots a_n$ dieselben Werte annimmt wie $\sqrt{X}$ und sodann $S^2 - X$ in zwei Faktoren zerlegt; dann folgt aus $u_1 = \frac{Y_1}{Y}$ und $u_2 = \frac{Y_2}{Y}$, worin u_1 und u_2 die Summe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und die Summe ihrer Amben ist, durch Elimination von y eine Gleichung 2. Ordnung zwischen u_1 und u_2, während die analogen Verbindungen u_m sich linear durch u_1 und u_2 ausdrücken lassen. Jacobi spricht das gefundene Theorem noch folgendermaßen aus: „Setzt man $f(x) = (bx^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n)^2 + (cx^n + \cdots + c_n)^2 - (ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n)^2$, so werden die Differentialgleichungen: $\frac{dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \cdots + \frac{dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0$, $\ldots \frac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \cdots + \frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} = 0$ vollständig integriert, wenn man für $x_1, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung $ax^n + \cdots + a_n = (bx^n + \cdots + b_n)\cos\varphi + (cx^n + \cdots + c_n)\sin\varphi$ setzt, wo φ einen veränderlichen Winkel bedeutet."

Bei dem regen Interesse und der tiefen theoretischen Einsicht in die Probleme der Astronomie und der Mechanik war es natürlich, daß, als Mädler seine bekannte Arbeit über die Zentralsonne veröffentlichte, Jacobi seinem Bruder Moritz gegenüber seine Ansicht über diese Hypothese unverhohlen aussprach, der sie den Mitgliedern der Petersburger Akademie zunächst mündlich mitteilte und nachher in deren Berichten abdrucken ließ. Am 31. Juli 1846 schrieb Schumacher an Jacobi: „Eine Relation, die Struve mir aus einem Briefe macht, den Sie an Ihren Herrn Bruder in Petersburg geschrieben haben, veranlaßt mich, Sie mit diesen Zeilen zu behelligen. Bei der famösen Centralsonne von Mädler sagen Sie (nach Struve's Relation), daß es sich garnicht darum handle, daß dies oder jenes falsch sei, und fügen hinzu, die Sache käme darauf zurück, als wenn man aus einer arbiträren Constanten, die bei der Integration einer Differentialgleichung vorkomme, die Beschaffenheit der

Differentialgleichung finden wolle. Ich muß zu meiner Beschämung bekennen, daß ich dies nicht ganz verstehe. Daß dies oder jenes falsch sei, weiß ich sehr wohl, wenn dies und jenes die vorangeschickte Theorie bedeutet, in der er in seiner ersten Hypothese die Sterne als überall gleichförmig im Raume vertheilt betrachtet, sie demzufolge als in einer sehr großen Kugel enthalten annimmt und die bekannten Gesetze von der Anziehung einer Kugel auf sie anwendet (wogegen ich nicht viel zu erinnern sehe), nachher aber, die erste Hypothese verlassend, die Sterne als in einem flachen, linsenförmigen Körper gleichförmig vertheilt voraussetzt und auf diesen Fall die für die Kugel geltenden Saetze stillschweigend anwendet. ... Er fügte hinzu, indem er sich auf die von ihm angeführten eignen Bewegungen der Sterne stützt, daß er seine Entdeckung der Discussion ausgesetzt zu sehen wünsche. ... Ich bitte jetzt um Belehrung, wie diese eigne Bewegung der Sterne, vorausgesetzt daß er sie für alle in einer seiner Hypothese günstigen Richtung beweisen könne, auf die Constanten Ihrer Differentialgleichung zurückkomme ... Struve schreibt ferner, daß Sie bereit seien, zu einem beliebigen Gebrauch Maedler's Unsinn recht klar auseinander zu setzen — ich brauche wohl nicht zu sagen, daß die Astr. Nachr. es sich zur Ehre rechnen werden, einen solchen Aufsatz aufzunehmen ...“

Und an Gauss schreibt Schumacher am folgenden Tage: „Jacobi hat, einem von Struve erhaltenen Briefe zufolge, an seinen Bruder in Petersburg geschrieben 'Ich finde, daß die Herrn Astronomen von dem Unsinn in Mädler's Centralsonne, durch die er die Dorpater Sternwarte verfinstert, mehr wegen der Person eine dunkle (?) Ahndung haben, als die Unermeßlichkeit des Unsinns einsehen. Denn es handelt sich gar nicht darum, daß dies oder jenes falsch ist, sondern es ist, wie wenn Einer aus dem Werthe einer willkührlichen Constante, die bei der Integration einer Differentialgleichung vorkommt, die also eben willkührlich ist,

etwas über die Beschaffenheit der Differentialgleichung selber finden will. Sollte Struve zu einem beliebigen Zwecke wünschen, daß ich ihm darüber klar schreibe, so stehe ich gern zu Diensten.' Die Sprache dieses Artikels ist übertrieben violent, auch scheint mir, trotz Jacobi's großer Autorität, die Vergleichung mit der Differentialgleichung zu hinken, wenn er unter den eignen Bewegungen, die Mädler aufführt, die Constanten versteht. Die durch Integration eingeführten Constanten hängen als ganz willkührlich nicht von der Beschaffenheit der Differentialgleichung ab, die eignen Bewegungen hängen aber allerdings von der Anziehung der Centralsonne ab ...“; er fügt am 9. August noch hinzu: „Jacobi, den ich, wie Sie wissen, um Erläuterung des Gleichnisses mit der Differentialgleichung und den Constanten bat (das man, wie mir scheint, weit einfacher und allgemein verständlicher auf die Aufgabe des Königsberger Schulmeister reduciren könnte, der seinen Kindern als Ferienarbeit das Problem gegeben hatte, wenn ein ℔ Butter 5 Sgr. kostet, was kostet eine Tonne Heringe?) hat mir darauf wie folgt geantwortet: 'Was die Centralsonne selbst betrifft, so will Herr M. aus Beobachtungen über Größe und Richtung der Geschwindigkeiten der Fixsterne etwas beweisen, das sich auf die anziehenden Massen bezieht. Beides steht aber in gar keinem Zusammenhange. Auf anziehende Kräfte schließen wir bei einer Veränderung der Geschwindigkeit. Wir kennen aber keine Veränderung der eignen Bewegung der Fixsterne, und wenn Bessel in der letzten Zeit etwas davon wahrzunehmen glaubte, so ist doch die Sache noch nicht ausgemacht, auch hat Mädler nirgends auf diese Veränderung Rücksicht genommen. Betrachten wir die Bewegung der Welten der Milchstraße als ein mathematisches Problem, so sind die Orte der Fixsterne und ihre Geschwindigkeiten zu irgend einer Zeit, nebst ihren Massen, die von einander gänzlich unabhängigen Data des Problems, aus denen dann

durch die Gesetze der Anziehung die Orte der Fixsterne zu irgend einer andern Zeit berechnet werden können. Aber zwischen diesen Datis giebt es keinen Zusammenhang und keinen Schluß von dem einen auf die andern. Will man selbst Herrn M.'s herausgebrachte Richtungen als richtig annehmen, so kann man doch daraus nichts über die anziehenden Massen, oder ihren Schwerpunkt schließen.' Später fügt er noch hinzu 'Einer meiner Freunde hat die Bemerkung gemacht, daß die Anziehung einer solchen Milchstraßenschicht gänzlich unbestimmt ist, d. h. ganz von der besondern Anziehung der dem angezogenen Punkte zunächst liegenden Masse abhängt. Könnte man auch solche Anordnung derselben ersinnen, welche ein gegebenes Resultat hervorbringt, so würde jede kleine Aenderung dieser Anordnung eine totale Aenderung der Anziehung hervorbringen, also die Annahme immer in rerum natura unstatthaft sein'..."

Erst am 2/14. Dezember erhält Jacobi von seinem Bruder eine Antwort auf seine Auslassungen:

„Dein Mädler-Brief hatte in der Classe viel Aufsehen erregt. Er ist abgedruckt aber hernach unterdrückt worden. angeblich weil Graf Ouvaroff die Protection, die er früher Mädler habe angedeihen lassen, nicht so plötzlich und auf so fulminante Weise wollte desavouirt sehen. Die Sache ist aber so viel interessanter, denn jeder theilt dem andern unter dem Siegel der Verschwiegenheit den Inhalt dieses Briefes mit. Theils durch List, theils durch Überredungskunst habe ich mir 2 Abdrücke dieses Briefes verschafft, welche ich meinen Nachkommen hinterlassen werde, welche in etwa 100 Jahren diese Briefe an einen Engländer für eine enorme Summe zu verkaufen, testamentlich verpflichtet werden. Indeß habe ich Fuss auf die Hostie zuschwören müssen, bei Lebzeiten keinen Mißbrauch mit diesem Briefe zu treiben ... Du wirst von einer Entdeckung gehört haben, die ich so glücklich war zu machen; ich erlaube Dir davon als von etwas Wichtigem zu sprechen, das auch

den schärfsten Beobachtern entgangen wäre. Wenn Du aber versprichst, recht verschwiegen zu sein, so will ich Dir sagen, daß ich solcher kleinen Münzen noch mehr in meinen Schreibebüchern aufgezeichnet habe. Ich weiß nicht, wie ich es mir aus und zurecht legen soll; ist es Reichthum oder Armseligkeit, welche die Berliner Physiker so gierig nach solcher kleinen Münze macht?"

Nachdem Jacobi seine Vorlesungen am 24. Juli geschlossen, ging er sogleich wieder an die Ausführung seiner längst begonnenen Arbeiten und teilt gelegentlich am 1. August Liouville einige Resultate aus seinen vor 14 Jahren angestellten Untersuchungen über die Attraktion eines homogenen dreiachsigen Ellipsoids auf einen außerhalb gelegenen Punkt mit, in denen er zu einem Abschluß der Lösung gelangt ist 1. durch eine Koordinatentransformation, 2. durch eine Substitution, durch welche die Wurzel $\sqrt{1 - m^2 \sin^2\beta \cos^2\psi - n^2 \sin^2\beta \sin^2\psi}$, welche in das transformierte Doppelintegral eintritt, rational gemacht wird vermöge der doppelten Substitution $m \sin\beta \cos\psi = \sin\eta \cos\vartheta$, $n \sin\beta \sin\psi = \sin\eta \sin\vartheta$; 3. durch eine neue Koordinatentransformation, deren Deutung eine Reihe geometrischer Theoreme für die Theorie der konfokalen Flächen lieferte. Zugleich berichtet er Liouville, daß die beiden Differentialgleichungen $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 0$, $\frac{x\,dx}{\sqrt{X}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{Y}} + \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}} = 0$, worin X, Y, Z dieselben Funktionen 6. Grades resp. von x, y, z sind, integriert werden durch eine Gleichung 2. Grades zwischen den zwei Größen $x + y + z$, $yz + xz + xy$, und eine andere Gleichung von der Form $xyz = \alpha(yz + zx + xy) + \beta(x + y + z) + \gamma$, worin α, β, γ Konstanten, welches nur ein spezieller Fall des in der obenerwähnten Arbeit ausgesprochenen Theorems ist.

In den Herbstferien erschien der erste Band der „Opuscula mathematica" Jacobis mit einer Widmung desselben an König Friedrich Wilhelm IV., welche das Datum des

30. August 1846 trägt, und von der einige Stellen hier hervorgehoben werden mögen, da sie schon in den nächsten Lebensjahren Jacobis eine verhängnisvolle Rolle spielen sollten:

„... Die ersten Mathematiker ihrer Zeit müssen auch bei dem größten Könige sein, lautete der Lagrange berufende Brief des preußischen Ministers ... Euler hat in den 20 Jahren, in denen er der mathematischen Klasse der Berliner Akademie als Direktor vorstand, die gesamte Mathematik umgestaltet. In andern 20 Jahren erhob sein Nachfolger Lagrange die Wissenschaft der mathematischen Analysis durch reiche Entdeckungen und vollendete Form zur glänzendsten Höhe... Aber der Aufschwung der mathematischen Wissenschaft ist damals noch bei uns ein vorübergehender gewesen. Sie war noch kein Lebensbaum geworden, der in dem Boden des preußischen Volkes Wurzel geschlagen ... Mit Lagrange glänzten in Frankreich fünf andere mathematische Namen ersten Ranges, und es schien Frankreich, wie in den Waffen, so auch in der Mathematik unüberwindlich. Nachdem es nun aber auf dem Kriegsfelde glücklich besiegt worden, haben wir, wie in der Sage von der Hunnenschlacht die Schatten in den Lüften fortkämpften, in den Regionen des Gedankens weiter gekämpft, unterstützt von der heiligen Allianz mit dem Geiste, die Preußen geschlossen, und manchen glorreichen Sieg in den Wissenschaften erstritten. Und so rühmen wir uns, auch in der mathematischen Wissenschaft nicht mehr die Zweiten zu sein ... In der Nähe des Thrones Eurer Majestät sehen wir freudig den weisen Altmeister, den vielgewanderten, in allen Zungen und Weltteilen gepriesenen, dessen Name das Symbol jeder Wissenschaftlichkeit ist ... Aber ich habe gezweifelt, ob eine aus allen Teilen der Mathematik zusammengefügte Mosaikarbeit sich den Augen Ew. Majestät darstellen dürfte; ob ich nicht die Vollendung einer der von mir vorbereiteten, vielleicht minder unwerten Arbeiten abwarten sollte, welche

in mehr künstlerischer Einheit einen Hauptzweig der Wissenschaft abschließen . . .“

In der schon oft hervorgetretenen gereizten Art schreibt Schumacher am 20. November 1846 an Gauss: „Jacobi's mathematische Werke Th. I. habe ich jetzt erhalten und die Vorrede gelesen, von der Humboldt sprach. Sie ist allerdings sehr arrogant, auch hinken seine Vergleichungen mitunter. Er vergleicht die preußischen Mathematiker, die den Kampf, den die Armeen siegreich gegen Frankreich gekämpft haben, jetzt um geistige Eminenz fortkämpfen, mit den Geistern (er sagt 'Schatten der Gefallenen', versteht aber die Geister der Gefallenen, wenn ein simile da sein soll) der in der Hunnenschlacht Gefallenen, die den Kampf in den Wolken fortsetzten, was doch eigentlich nichts als ein Wortspiel mit zwei ganz verschiedenen Bedeutungen des Wortes Geist ist. Ebensowenig sind Wolken und Nebelgebilde ein Terrain für mathematische Wettkämpfe. Es ginge schon eher, wenn er von den Kämpfen der Hegel'schen Schule gegen andere philosophische Schulen gesprochen hätte. — Und so rühmen wir (die Preußen) uns auch in der mathematischen Wissenschaft nicht mehr die zweiten zu sein, wird durch das Verbum sein zu einer lächerlichen Anmaßung. Hätte er gesagt, nicht mehr zu den zweiten zu gehören, so würde man gegen die Behauptung nichts haben können, wenn man auch gewünscht hätte, daß sie von einem Nicht-Preußen ausgesprochen wäre, aber analysiren Sie das, was er gesagt hat, genau. Offenbar heißt, wir rühmen uns nicht mehr die zweiten zu sein, wir waren früher die zweiten, aber wir rühmen uns nicht mehr zu dieser Klasse zu gehören. Weil sie sich rühmen, so müssen sie in keine untere Klasse gekommen sein, sondern in eine obere. Über der zweiten Klasse steht nur die erste Klasse. Er sagt also mit dürren Worten, wir rühmen uns die ersten Mathematiker zu sein. Wenn sie aber die ersten Mathematiker sind, so gehören alle andern Mathematiker zu

einer unteren Klasse. Zu den ersten Mathematikern zu gehören, involvirt dagegen schon die Existenz anderer Mathematiker von derselben Klasse.“ Der Schluß dieses unschönen Briefes ist so gehässig und inferior, daß er hier eine Stelle nicht finden darf.

Gauss antwortet am 23. November nur mit den Worten: „Jacobi's Werke habe ich noch nicht gesehen.“

Am Ende der Ferien gestaltete sich der Gesundheitszustand Jacobis wieder derart, daß er die für den Winter angekündigte Vorlesung über die Theorie der Zahlen nicht halten konnte, und kaum imstande war, einige Resultate seiner mechanischen Arbeiten in kurzer Form der Akademie vorzulegen. Am 26. Oktober las er über „Eine neue Theorie der Variation der Konstanten in den Problemen der Mechanik“ als ersten Teil der am 23. November vorgelegten Note „Zwei Beispiele zur neuen Methode der Dynamik“. Nach Ausführung des Satzes, wie man aus dem vollständigen Integral der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung die Integrale der Bewegungsgleichungen finden kann, wird bemerkt, daß, wenn für das gestörte Problem $T = U + \Omega + h$ ist, worin Ω die Störungsfunktion bedeutet, sich ohne weitere Rechnung die Differentialgleichungen für die gestörten Elemente in der Form $\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_i}$, $\frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_i}$ ergeben. Als Beispiele hierzu werden die elliptische Bewegung eines Planeten um die Sonne und die geodätische Linie auf einem Ellipsoid entwickelt, wie er dies früher schon in Vorlesungen und Briefen ausgeführt hatte.

Im Zusammenhange mit dieser Mitteilung schrieb er am 31. Dezember seinem Bruder: „Als ich in Manchester Hamilton über seine Arbeiten über analytische Mechanik becomplimentirte, sagte er mir, er hätte dieselben wieder bereits vergessen. Dies kam mir höchst sonderbar vor, da er nicht so viel gemacht hatte, um das Recht zu haben, diese Arbeiten zu vergessen ... Eine schöne Preisaufgabe

für die Petersburger Akademie wäre: Die Hülfsmittel der heutigen Analysis anzugeben, um die reciproke Distanz zweier Planeten, in den Fällen, in welchen beide Excentricitäten oder wenigstens eine keinen sehr erheblichen Werth haben, nach den Vielfachen der excentrischen Anomalieen zu entwickeln ... Was mich selbst betrifft, so hatte ich seit Juli, wo ich die letzte Abhandlung publicirte, wahrscheinlich in Folge der zu großen und anhaltenden Hitze, der ich mich zu sehr aussetzte, mehrere schlechte Monate. Endlich war ich dazu gekommen, ein großes Memoire über analytische Mechanik zu schreiben, welches Ostrogr. hoffentlich so rühren wird, daß er deßhalb deutsch lernen wird. Eben als ich die letzte Hand daran legen wollte, erging an mich von Humboldt eine Reihe Fragen über griechische Mathematik. Nun ist bei mir das Unglück, daß mich alles gleich in einen Ocean von Untersuchungen stürzt, so daß ich, ohne H.'s Fragen zu beantworten, doch 2 Monate nur unter diesen Studien verbrachte."

Noch vor Schluß des Jahres legte Jacobi der Akademie am 10. Dezember eine Abhandlung „Über die Abbildung eines Ellipsoids auf einer Ebene vor", die jedoch nicht veröffentlicht wurde. Seine Aufzeichnung darüber wurde später aus seinen hinterlassenen Papieren von S. Cohn unter dem Titel „Über die Abbildung eines ungleichachsigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Teile ähnlich bleiben" mitgeteilt. Gauss hatte die Differentialgleichung aufgestellt, auf welche die in den kleinsten Teilen ähnliche Abbildung für beliebige Flächen führt und für diejenigen speziellen Flächen 2. Ordnung integriert, die zugleich Umdrehungsflächen, Kegel oder Zylinder sind; nachdem Jacobi schon vor längerer Zeit in einer in der Akademie gelesenen Note für beliebige Flächen 2. Ordnung die Integration vermittels der Einführung der sogenannten elliptischen Koordinaten als auf Quadraturen zurückführbar bezeichnet hat, entwickelt er hier, indem er in bekannter Weise das Linien-

element $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ in zwei Teile zerlegt und jeden Teil zu einem vollständigen Differential macht, die expliziten Formeln. Nachdem er zunächst die Umdrehungsflächen allgemein durch Quadraturen auf einer Ebene abgebildet, geht er zur ähnlichen Abbildung des Ellipsoids und der beiden Hyperboloide über und findet für das erstere, wenn

$$U = \int \sqrt{\frac{\varrho^2 - \varrho_1^2}{(\varrho_1^2 - b^2)(c^2 - \varrho_1^2)}}\, d\varrho_1, \quad V = \int \sqrt{\frac{\varrho^2 - \varrho_2^2}{(b^2 - \varrho_2^2)(c^2 - \varrho_2^2)}}\, d\varrho_2,$$

worin ϱ, ϱ_1, ϱ_2 die elliptischen Koordinaten darstellen, $U + iV = \varphi(p + qi)$, worin φ eine willkürliche Funktion und p, q die rechtwinkligen Koordinaten in der Ebene bedeuten. Durch Einführung zweier Hülfsvariabeln erhält Jacobi die einfachen Formen

$$U = \frac{1}{2} \log e^{2hu} \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}, \quad V = hv + \frac{1}{2i} \log \frac{H(a+iv)}{H(a-iv)},$$

welche ihm wahrscheinlich in Rücksicht auf die in Aussicht genommenen Veröffentlichungen seiner großen Untersuchungen über das Rotationsproblem die Veranlassung zur Publikation in der Akademie gaben. Es werden schließlich noch einige spezielle Fälle behandelt, in denen z. B. der einen Krümmungslinienschar ein Strahlenbüschel, der andern konzentrische Kreise entsprechen sollen, und diese Resultate für Rotationsellipsoide spezialisiert.

Die häufigen Schwindelanfälle und sonstigen Schwächezustände hinderten Jacobi an anhaltender, intensiver geistiger Anstrengung, und es war ihm eine erwünschte Beschäftigung und geistige Erholung, als ihn im Jahre 1846, wie er bereits seinem Bruder mitgeteilt, Humboldt veranlaßte, ihm über die Mathematik der Hellenen fragmentarische Mitteilungen zu machen, welche dieser zu seinem Kosmos benutzen wollte. Jacobi sandte ihm ein Manuskript über die Mathematik des klassischen Altertums, namentlich über Euklid, Archimedes und Apollonius, dessen Lektüre Humboldt großen Genuß gewährte, der sich jedoch später beklagte, „in seiner Unwissenheit davon weniger Gewinn haben

ziehen zu können, als die Ausarbeitung Jacobi Anstrengung gekostet hätte. Es ist das erste mal, daß ich etwas ganz aufgebe." Im Dezember 1846 gab Humboldt die Blätter an Jacobi zurück und ersuchte ihn, dieselben an Schumacher zur Aufnahme in dessen Jahrbuch zu senden, was Jacobi jedoch unterließ; noch kurz vor dessen Tode sandte ihm Humboldt auch die letzten in seinem Besitz befindlichen Blätter nebst den von Jacobi gegebenen Erläuterungen über die Natur der Zahlen zurück. Es mögen aus diesen Blättern, die sich im Nachlasse Jacobis vorfanden, einige Bruchstücke hier veröffentlicht werden, und zwar zunächst einige Zeilen, welche die Überschrift „Aphorismen" tragen:

„1. Erfindung der Kegelschnitte.

Proclus sagt: Das vom Schnitt habe beim Plato seinen Anfang genommen, Eudoxus habe es weiter ausgeführt und dabei sich der Analysis bedient. Es ist die Frage ob *τὰ περὶ τὴν τομὴν* bloß vom Schnitte des geraden Kegels zu verstehen ist, oder überhaupt, daß Plato angeraten, indem Probleme wie die Verdoppelung des Würfels über den Kreis hinausweisen, neue Curven dadurch zu suchen, daß man bekannte oder leicht zu erzeugende Flächen durch Ebenen schneidet. Die Kugel giebt wieder nur Kreise, der gerade Kegel giebt die drei bekannten Kegelschnitte, welche Eratosthenes in seiner Epistel an den König Ptolemaeus die Menechmeische Trias nennt, und sie von den sogenannten krummen Linien (*κάμπυλαι γραμμαὶ*), deren sich Eudoxus bedient habe, unterscheidet. Also hätte Eudoxus noch höhere Curven gekannt? Von diesen werden bestimmt die Schnitte der Speira genannt, welche entsteht, wenn man eine Ebene um eine ihrer Linien dreht und in der Ebene sich einen Kreis denkt, dessen Centrum nicht in der Axe liegt. Solche Fläche, die nach unserer Sprache vom vierten Grade ist, hat schon Archytas in einem unzweifelhaft echten Fragment betrachtet. Archytas aber ist älter, wie Eudoxus jünger als Plato, obgleich beide seine

Zeitgenossen. Es kann also wohl Plato und Eudoxus überhaupt Schnitte von Flächen gelehrt haben, und Menechmus hätte dann speciell Kegelschnitte behandelt. Bis Apollonius haben Aristaeus, Euclides, Conon und Archimedes die Kegelschnitte fast vollständig ausgebildet. Doch scheinen die Hauptlehren vom Brennpunkte, der aber noch keinen Namen hat, vom Apollonius (daß Summe bei der Ellipse oder Differenz der Radii Vectoren bei der Hyperbel constant sind). Störend ist, daß Eutocius sagt, Eudoxus erzähle zwar im Prooemium, er habe krumme Linien angewendet, aber in der Schrift selbst habe er nichts davon gefunden. Eratosthenes hat die Schriften von Eudoxus, Archytas, Menechmus nicht selber vor Augen gehabt, sondern sagt λέγεται. Den Eudoxus muß man sich als den größten und berühmtesten Math. s. Zeit denken; den göttergleichen nennt ihn Eratosthenes. Nach Archimedes' Zeugniß hat er zuerst die Gleichheit zweier Körper (zweier Pyramiden mit gleicher Basis und Höhe) dadurch bewiesen, daß er sie in unendlich viele congruente Theile zerschnitt. Er ist so der Erfinder der Exhaustionsmethode geworden.

2. Diophantus' Zeitalter ist etwas früher zu setzen. Das einzige Citat über seine problemata arithmetica, das verloren gegangen war, hat Nesselmann wieder aufgefunden. S. s. Gesch. d. Algebra S. 245 etc., das einzig brauchbare hierüber. Hienach hat er in der Mitte des 4. Jahrh. unter Julianus Apostata gelebt, und zwar spätestens.

3. Was Keppler mathematisch gebraucht hat, um seine Gesetze zu finden, ist sehr wenig gewesen; auch hat er ja das materielle Organ des Fernrohres nicht nöthig gehabt, das erst Flamsteed in die regelmäßigen Bb. einführte. Tycho hätte recht gut unter den Ptolemäern seine Bb. machen und Keppler daraus mit den Hülfsmitteln des Apollonius seine Gesetze berechnen können. Er hat dazu kein neueres Organ der Algebra gebraucht. Etwas genauere Sinus- oder Chordentafeln als sie seit Hipparch im Gebrauch

waren, konnte er mit den damals bekannten Mitteln sich leicht schaffen.

Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, daß der Name die große Syntaxis, den man in der Regel dem Werke des Ptolemaeus giebt, oft eine verkehrte Ansicht desselben herbeigeführt hat. Er selbst nennt es die mathematische Syntaxis, mathematisch heißt aber so viel wie dogmatisch, wie Sextus Empiricus contra mathematicos, d. i. gegen den Dogmatismus in der Philosophie geschrieben hat. Ptolemaeus giebt also ein dogmatisches Lehrsystem, und bestätigt die einzelnen Lehren durch ein Paar aus den bekannten Beobachtungsreihen aufgegriffene Beispiele.

3. Was hat Plato in der Mathematik gewußt und nicht gewußt? Antwort: er hat ungefähr das gewußt, was in den 11 ersten von den 13 Büchern des Euclides steht. Namentlich wird bei ihm die Auflösung der quadratischen Gleichungen durch geometrische Construction neben der Division durch eine solche als eine seit den Pythagoräern bekannte Operation angeführt. Es kommen hier aber immer nur solche quadratische Gleichungen in Betracht, die eine einzige positive Wurzel haben. Quadratische Gleichungen mit zwei positiven Wurzeln, und zwar ausdrücklich alle beiden Wurzeln, finden wir erst in Mohammed ben Musa. Die Betrachtung der negativen und imaginären Wurzeln gehört den Italiänern des 16. Jahrh., insbesondere Cardan und Bombelli. Die fünf regelmäßigen Körper hat er gekannt, doch nicht berechnen können, da sie nach dem Zeugnis der Theologumena Arithmetica erst sein Schwestersohn und Nachfolger in der Akademie näher untersucht hat. Dessen Werk über die pythagoräischen Zahlen hat zur einen Hälfte von den wichtigsten mathematischen Lehren, den regelm. K., Polygonal-, Pyramidalzahlen gehandelt, und zur andern Hälfte, — von den wunderbaren Eigenschaften der Zahl 10! Wie gingen doch Wissenschaft und Aberglaube Hand in Hand!

4. Wichtiger als Algebra war für die Fortschritte der Astronomie und die Entdeckung ihrer Gesetze die praktische Rechenkunst. Aber die Alten haben es nicht der Mühe werth gehalten, etwas darüber aufzuschreiben. Archimedes in seiner Kreismessung giebt uns mehrere approximative Bestimmungen von Quadratwurzeln in Zahlen, mehrere Ptolemäus, ohne anzugeben, wie sie gefunden sind. Die späten Commentare von Eutocius und Theon sind für uns die einzige Quelle, aus der wir erfahren, wie sie dividirt und Quadratwurzeln ausgezogen haben. Bis zur Ausziehung von Cubikwurzeln scheinen sie es nicht gebracht zu haben. Araber und Inder scheinen in diesen Dingen auch keine Helden gewesen zu sein.

5. Wenn man nach den Anfängen von Algebra, Analysis, Differential- oder Integralrechung u. dgl. frägt, muß man zweierlei unterscheiden, die Erfindung der Gedanken oder des Symbols. Nur mit der Einführung des letzteren geht die eigentliche mathematische Wissenschaft an, die die verschiedenen Gegenstände betrifft. Integrirt haben Eudoxus und Archimedes, aber die Integralrechnung datirt erst von Einführung des $\int$ und d. Dieses $\int$ besagt: so oft du mich siehst, denke dir jedesmal die zwei Seiten Betrachtungen, welche Archimedes hier anstellen würde. Man kann hiedurch also ein Archimedisches Buch auf eine Seite bringen, und eben die hiedurch herbeigeführte leichtere Übersicht wird Mittel der Erfindung, und das, was ein Endziel der Betrachtung war, wird ein Element und als solches durch das Symbol gestempelt. Die Alten haben in ihrer Geometrie viel mehr gerechnet als wir, insbesondere Apollonius, und oft mehr als zu billigen ist und so, daß es fast unausstehlich ist; die geometrische Anschauung findet sich viel mehr bei den Neueren. Aber ihre Symbolik war sehr mangelhaft, wenngleich sie manches durch eine sehr ausgebildete Terminologie ersetzen.

Dreierlei ist das Material ihrer Algebra: die ganze Zahl,

die gerade Linie und die abstracte Größe; so folgen sie nach der Gedankenschwere auf einander. Das 5. Buch des Euclides wird für immer die Basis der allgemeinen Größenlehre bleiben. Aber er ist bei den Verhältnissen stehen geblieben, hat nicht die Producte und Potenzen selbständig gefaßt, sondern sie immer, wo es auf allgemeine Größen ankam, ihnen die Verhältnisse substituirt. Nur in Linien hat er das Product aus zwei oder drei Factoren durch Rechteck und Parallelepipedum oder, wo sie gleich sind, durch Quadrat oder Würfel dargestellt, und das analoge auf ganze Zahlen ausgedehnt. Aber wo höhere Potenzen auch in ganzen Zahlen vorkommen, wird gleich die stetige Proportion angewendet. Erst Diophantus hat selbständige Benennungen und Bezeichnungen für die sechs ersten Potenzen; die Bezeichnungen sind die abgekürzten Namen, was aber ausreicht, um damit Formeln und Gleichungen zu bilden. Inder, Araber, die Italiäner des 16. Jahrhunderts, Vieta selbst sind hierin nicht weiter gegangen. Erst spät wurde der ungeheure Schritt gemacht, den Exponent der Potenz auch durch ein allgemeines Symbol zu bezeichnen. Von der Einführung des Zeichens x^{12} für die 12. Potenz von x datirt der Anfang der neueren Analysis. Die Einführung der negativen und imaginären Größen ist das zweite Hauptmoment. Schon Diophantus hat ein Zeichen $\pitchfork$ für minus eingeführt, und die bekannten Regeln minus $\times$ minus ist plus, minus $\times$ plus ist minus gegeben, aber er braucht sie nie für sich, sondern nur immer in Verbindung mit positiven. Der Satz, daß es in der Mathematik nur eine einzige Art durch die besonderen Größenverhältnisse der zu Grunde liegenden Data herbeigeführter Unmöglichkeit giebt, nämlich die Gleichung $xx + 1 = 0$, ist der tiefste der Analysis. Dadurch erhält dies Unmögliche eine bestimmte Form und kann in die Rechnung eingeführt werden. Hiervon datiren fast alle Fortschritte der neueren Zeit, und die Praxis, die lange Zeit sich dagegen gewehrt hat, hat eben

so viel Nutzen daraus gezogen als die Theorie. Die Einführung der periodischen Sinusreihen war ein neuer großer Schritt Euler's. Die Scheu des hauptsächlich numerische Werthbestimmungen bezweckenden Mathematikers vor dem Imaginären war die Ursache, daß Legendre der wichtigste Fortschritt der neueren Analysis, die Einführung der doppelt periodischen Functionen, entgangen ist.“

Die weiteren Aufzeichnungen sind in Form von zwei an Humboldt gerichteten sehr langen Briefen enthalten; die diesen Mitteilungen vorausgeschickte umfangreiche Einleitung möge durch eine aus derselben entnommene Stelle allgemeineren Inhaltes hier charakterisiert werden:

„Den mathematischen Betrachtungen soll sich zuerst die Priestercaste der Assyrer, Babylonier, Ägypter in ihrer beschaulichen Muße zugewendet haben. Wenn man aber bedenkt, daß diejenigen hellenischen Weisen, welche am meisten mit den ägyptischen Priestern verkehrt haben sollen, für die Erfindung der ersten Elementarsätze der Geometrie den Göttern Hekatomben opferten, so ist entweder eine vorhellenische mathematische Wissenschaft (worunter ich nicht die auf empirischem Wege gewonnenen Resultate der beobachtenden Astronomie begreife) nicht vorhanden gewesen, oder doch den Hellenen nichts davon bekannt geworden. Aber auch aus der ganzen Zeit der stufenweisen Entwicklung der Mathematik bei den Hellenen während der Blüthe ihrer Bildung bis zur Zeit Alexanders' des Großen, von Thales bis Plato's Schüler Philippos von Mende, bis zu welchem die alten Geschichtschreiber der Mathematik, wie der Peripatetiker Eudemos, ihre Geschichte fortführen, ist nichts in seiner ursprünglichen Form auf uns gekommen, sondern wir kennen von den tiefen mathematischen Arbeiten dieser reichen Zeit nur die bereits in ein System geordneten Resultate. Was davon den einzelnen gebührt, darüber sind uns nur dürftige Berichte übrig geblieben . . .“

In dem ersten an Humboldt gerichteten Briefe heißt es:

„Die Babylonier und Ägypter haben durch langjährige Beobachtungen einige empirische Kenntniß der Astronomie gewonnen, von denen wohl die bedeutendste war, daß die Elongation von Mercur und Venus eine gewisse Gränze nicht überschreiten, und diese beiden Planeten daher Trabanten der Sonne sind. Vom Bedürfniß des praktischen Lebens getrieben, haben vielleicht die Phönicier empirische Regeln der Rechenkunst behufs des Handels, die Ägypter empirische Regeln der Geometrie behufs der Ländervermessungen ausgesonnen. Eine mathematische Wissenschaft haben sie nicht gehabt, oder es ist doch den Hellenen niemals etwas davon bekannt geworden. Diesen bleibt der große Ruhm, diese Wissenschaft von ihren ersten Grundlagen in die Höhe geführt zu haben, unverkürzt und ungetheilt. Denn wenn Thales, der vor andern auf langjährigen Reisen fremde Weisheit gelernt haben soll, noch die ägyptischen Priester lehren konnte, daß die Höhen der Pyramiden ihrem Schatten gleich sind, wenn er zu derselben Zeit gemessen wird, wo ein senkrechter Stab dem seinigen gleich wird, und er für die Erfindung, ein gleichseitiges Dreieck in einen Kreis einzuschreiben, den Musen ein Dankopfer brachte, so haben die Griechen sicher von vorn angefangen. Der Bau mathematischer Wissenschaft, den sie so in der Zeit von Thales bis zur Gründung der alexandrinischen Schule von seinen ersten Fundamenten aufgeführt, gehört zu den größten Thaten des menschlichen Geistes . . . Abgesehen von den besonderen Erfindungen des Pythagoras schrieb man ihm im Alterthum den Ruhm zu, daß er die Mathematik zur reinen Wissenschaft erhoben, welche ihr Interesse nicht in ihrer Brauchbarkeit für außer ihr liegende Zwecke hat, sondern sich selbst Zweck ist und nichts anderes anstrebt, als in den Gegenständen ihrer Betrachtung eine vollkommene Einsicht zu gewinnen. Als solche erschien dem Pytha-

goras die Mathematik das geeignetste Mittel, den menschlichen Geist daran zu gewöhnen, sich an der reinen Erkenntniß zu erfreuen und ihn hiedurch über die Befriedigung des sinnlichen Bedürfnisses zur höheren, seiner allein würdigen Bildung zu erheben. Er machte sie deßhalb zur Grundlage in seinem großen Erziehungssystem. Seine Entdeckung der rationalen Verhältnisse in der Tonscala ist, ohne wesentlich weiter geführt zu werden, der Gegenstand überaus zahlreicher Arbeiten griechischer Mathematiker gewesen, von denen sehr viele auf uns gekommen sind, welche wir gern mit andern verlorenen mathematischen Schriften vertauschten. Da dieser Stoff keine innere Entwicklung fand, wurde er zu eitlen Analogieen verbraucht. Das einzige mathematische Naturgesetz, das man erkannt hatte, sollte den Pythagoräern und Plato dazu dienen, den ganzen Kosmos zu construiren. Es wurde dem bessern Wissen Gewalt angethan, alles beliebig umgestellt, ein Himmelskörper, der Antichthon, ersonnen, bloß um die 7 Töne der Octave herauszubringen. Diese Verirrungen haben für alle Zeiten ein gefährliches Beispiel gegeben, wie Aristoteles sagt, nicht das Philosophem der Beobachtung, sondern die Beobachtung dem Philosophem unterzuordnen ... Wenn Plato's Verdienst gerühmt wird, daß er den Astronomen empfohlen, alle bemerkten Abweichungen der Planeten von der gleichförmigen Kreisbewegung wieder durch Kreise zu construiren, und dadurch den Anstoß zu den von Apollonius erfundenen Epicyclen gegeben habe, so ging dieser Rath bei ihm nicht aus einer wissenschaftlichen Einsicht hervor, sondern aus der Vorstellung, daß der Weltschöpfer alles am vollkommensten gemacht und der Kreis die vollkommenste Figur sei. Wie ernstere und tiefere Naturbetrachtung zeigt die Lehre des Anaxagoras, von der wir nicht ohne Staunen vernehmen, und die er fast mit dem Leben gebüßt hätte, daß der Mond, wenn seine Schwungkraft aufhörte, zur Erde fallen würde, wie die Steine einer

Schleuder! Aber jener supranaturalistische Exceß Plato's hatte andererseits bei der abgöttischen Verehrung, welche er genoß, den Erfolg, ein Gegengewicht gegen die Verflachung durch eine breite Empirie zu bilden. Dem 16. Jahrhundert wurde er so ein treuer Bundesgenosse bei Wiedererringung der Freiheit der Speculation in den Naturwissenschaften, und seine Träume begleiteten Keppler bei der harten Arbeit, mit der er uns die wahren Harmonieen der Planeten erschloß . . ."

Der erste Brief geht nun ausführlicher auf die mathematischen Resultate ein, welche von Euklides, Plato, Eudoxus und anderen griechischen Mathematikern herrühren, und zeigt, wie die Sätze des letzteren vom Inhalt der Pyramide oder des Kegels nicht ohne diejenigen Prinzipien bewiesen werden konnten, die unserer heutigen Integralrechnung zugrunde liegen, und daß die Alten selbst schon sich der Neuheit und des Transzendenten dieser Prinzipien bewußt gewesen.

Der Anfang des zweiten Briefes lautet:

„Die Leistungen der Mathematiker in der Zeit von Hippocrates bis Euclid werden nach drei Richtungen unterschieden, je nachdem sie nämlich den wissenschaftlichen Stoff durch Erfindung von Theoremen oder Lösung von Problemen vermehrten, die wissenschaftliche Form durch Strenge der Beweise vervollkommneten, endlich aus dem gesammten Erwerb der Wissenschaft dasjenige, was am häufigsten und immer wieder bei den mathematischen Untersuchungen zur Anwendung kam, in einem System von Elementen zusammenstellten, aus denen sich die Wissenschaft gewissermaßen wie die Sprache aus Buchstaben oder Silben zusammensetzen sollte . . . Die einfachsten Größenvorstellungen bieten die ganze Zahl und die gerade Linie; von diesen beiden sahen die alten Philosophen mit Recht die ganze Zahl als das einfachere an, weil sie nicht wie die Linie gesetzt zu werden brauchte, und die Lehrsätze,

welche die ganzen Zahlen betreffen, wurden für mehr elementar und für evidenter als die geometrischen gehalten. In der That kann man in der Arithmetik die den geometrischen Elementen unentbehrlichen Axiome, welche immer noch eine Anschauung voraussetzen, gänzlich entbehren. Aber die gerade Linie hat vor den ganzen Zahlen das voraus, daß sie das Irrationale, oder wie die Griechen sagen, das Unaussprechbare selbst zur Anschauung und zur Erscheinung bringen und wirklich darstellen kann, was die Arithmetik nur näherungsweise vermag . . . Die Theorie der Multiplication ganz allgemeiner abstracter Größen bietet, wie jeder weiß, der heute Elemente zu schreiben hat, ihre eigenthümlichen Schwierigkeiten dar, und ist weit davon entfernt, den Charakter derjenigen Evidenz und des Elementaren an sich zu tragen, welche die vier ersten Bücher des Euclides noch beabsichtigten.“

Aus all diesen Aufzeichnungen treten uns die langjährigen und tiefen Studien entgegen, welche Jacobi der Geschichte der mathematischen Wissenschaften gewidmet hat.

Auch für den Sommer 1847 war Jacobi noch durch sein Befinden verhindert, eine Vorlesung anzukündigen, und zu seinem leidenden Zustande gesellten sich bei der großen Familie, für deren sieben minderjährige Kinder er ein liebevoller und aufopfernder Vater war, noch schwere materielle Sorgen. Er wandte sich deshalb an Humboldt in der Hoffnung, daß dessen Unterstützung beim Könige ihm eine Erleichterung seiner Lage verschaffen könnte; in der Tat kam ihm dieser wie immer liebenswürdig und hilfsbereit entgegen und schrieb ihm im März 1847:

„Bei der Bewunderung Ihrer Geistesgaben, bei der Freundschaft, die ich Ihnen so unverbrüchlich gewidmet habe, setzt mich Ihr Brief in eine schmerzliche Aufregung. Es ist so traurig, Sie mit 7 Kindern in diesem mit jedem Tage theureren Orte bekümmert, in großen Arbeiten gestört

zu wissen, es ist aber auch traurig, eine Verantwortlichkeit eines Gelingens übernehmen zu sollen ... Der König beendigt in Geldsachen nichts für sich, Versprechungen, die man ihm sehr leicht ablockt, verhallen spurlos ..."

Aber Jacobi blieb bis zum Ende des Sommers ohne jede Nachricht über den Erfolg der Bestrebungen Humboldts.

In dieser Zeit hatte er auf Veranlassung Schumachers, der Dinge persönlicher Natur ihm gegenüber zur Sprache brachte und auch über einige Punkte aus der Zahlentheorie um Belehrung bat, den Briefwechsel mit demselben wieder aufgenommen und diesem im April einige interessante Mitteilungen gemacht, welche Früchte seiner historisch-mathematischen Studien waren. Nach den auf ein bestimmtes Vorkommnis bezüglichen Worten: „... Es dürfte genügen, wenn man weiß, daß jeder wirklich große Mann keinen besonderen Werth auf Titel und Auszeichnungen legt, und sie nur, wie jede andere ihm erzeugte Höflichkeit freundlich annimmt, ohne sich z. B. mit den Orden zu behängen, wo hergebrachte Sitte (wie bei Hofe in Gala) es nicht ausdrücklich verlangt ...", gibt Jacobi einige wissenschaftliche Auseinandersetzungen, von denen Schumacher am 12. April Gauss Kenntnis gibt:

„... Jacobi bemerkt in diesem Briefe in Bezug auf die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen, daß freilich die Relation $(\Sigma x^1)^2 = \Sigma x^3$ isolirt stehe, daß aber die Summe von zwei oder mehreren dieser Reihen mit bestimmten Coefficienten multiplicirt gleich einer Potenz einer einzelnen sein könne, z. B. $\frac{1}{2}(\Sigma x^7 + \Sigma x^5) = (\Sigma x^3)^2 = \Sigma x^4$. Daß $(\Sigma x^1)^2 = \Sigma x^3$, sagt Jacobi, stehe schon in Luca di Burgos Summa Arithmetica. Aus einem Neuplatoniker theilt er mir noch einen eleganten Satz mit über die Erzeugung der Cuben (nicht allein der Quadrate) aus der Summation der ungraden Zahlen, wenn man bei den Cuben immer die folgenden ungraden Zahlen nimmt, statt

wie bei den Quadraten immer von vorn anzufangen, $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, ...; $1 = 1^3$, $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, ..."

Eine unverkennbare, durch Krankheit und Sorgen herbeigeführte geistige Depression gestattete ihm nicht, größere Untersuchungsreihen zur Publikation auszugestalten, und außer einer am 3. Juli in der Akademie gelesenen, aber nicht veröffentlichten Note „Über die Resultate einer Abzählung der Primzahlen, welche um 2 oder 4 verschieden sind", erschien im Crelleschen Journal nur die eine Arbeit „Über die unmittelbare Verifikation einer Fundamentalformel der Theorie der elliptischen Funktionen", deren Inhalt er am 10. Juni der Akademie unter dem Titel „Über einen elementaren Beweis einer Fundamentalformel der elliptischen Funktionen" vorlegte. Aus der in den Fundamenten hergeleiteten Relation $S = 1 - q(z + z^{-1}) + q^4(z^2 + z^{-2}) - \cdots = \Pi = (1 - q^2)(1 - q^4) \ldots (1 - qz)(1 - q^3 z) \ldots (1 - qz^{-1})(1 - q^3 z^{-1}) \ldots$, folgt $\frac{\partial S}{\partial q} = S \frac{\partial \log \Pi}{\partial q}$, $\frac{\partial S}{\partial z} = S \frac{\partial \log \Pi}{\partial z}$, und diese beiden identischen Beziehungen verifiziert nun Jacobi direkt, indem er zeigt, daß es nur nötig und ausreichend ist, zu beweisen, daß, wenn m alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞, p alle ungeraden Zahlen von 1 bis ∞, $\psi(m)$ die Faktorensumme von m, i alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ bezeichnet, für jeden Wert von i

$$2\Sigma\psi(m)q^{2m} + \Sigma\Sigma(-1)^m p q^{m(m+p-2i)}$$

$+ \Sigma\Sigma(-1)^m p q^{m(m+p+2i)} = -i^2$ und $\Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p-2i)} - \Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p+2i)} = -i$ wird. Während sich nun der Beweis des zweiten Satzes leicht gestaltet, wird der erste auf das Theorem zurückgeführt, daß, wenn man eine gegebene gerade Zahl auf alle mögliche Arten in zwei Faktoren zerfällt, von denen der eine ungerade, der andere gerade ist, die Summe der geraden weniger der Summe der ungeraden Faktoren gleich ist der Faktorensumme der Hälfte

der gegebenen Zahl. „Es ist aber von besonderem Interesse, alle solche Formeln der Theorie der elliptischen Funktionen hervorzuheben, welche sich auf Identitäten zurückführen lassen, die unmittelbar, d. i. ohne Hülfe anderweitiger analytischer Sätze, eingesehen werden können, indem man dadurch ein Mittel erhält, neue Methoden zu gewinnen."

Borchardt, der jetzt auf einer größeren Reise sich in Frankreich und England aufhielt, und dem die gedrückte Stimmung Jacobis sowie die Veranlassung zu derselben wohlbekannt war, sucht ihn durch ausführliche Reiseschilderungen zu zerstreuen: „Er habe in Paris Hermite kennen gelernt", schreibt er ihm aus Oxford am 24. Juni; „er hat sich mit den Modulargleichungen der elliptischen Functionen beschäftigt und die von Galois angekündigten Sätze bewiesen, nämlich daß die Modulargleichungen 6., 8., 12. Grades resp. für die Transformation 5., 7., 11. Ordnung sich auf Gleichungen vom 5., 7., 11. Grade zurückführen lassen. Für die Transformation 5. Ordnung ist die Modulargleichung die Reducirte einer Gleichung 5. Grades. Diese Gleichung 5. Grades läßt sich also umgekehrt durch elliptische Functionen auflösen. Hermite hat sich die Aufgabe gestellt, ob alle Gleichungen 5. Grades sich auf diese Form reduciren lassen, was sehr wahrscheinlich ist, da sie eine willkührliche Constante enthält . . ."

Jacobi verkehrte in dieser Zeit nur mit seinen intimsten Freunden; wenn er auch jetzt schon milder über Eisenstein dachte, der sich ihm auf jede mögliche Weise zu nähern suchte, so wollten sich doch erquickliche Beziehungen zwischen beiden nicht herausbilden. „Mein Verhältniß zu den hiesigen Gelehrten", schreibt Eisenstein im Sommer 1847 an Stern, „ist noch immer beim Alten; auch würde mir eine Annäherung nichts nutzen, da jene ihren Stolz und ihr aristokratisches Benehmen gegen mich nie ablegen werden. Ich stehe also ganz allein."

Da die Verwendung Humboldts für Jacobi keinen

Erfolg hatte, entschloß sich dieser am 5. Juli, auf Grund der in der letzten Kabinettsorder verheißenen Unterstützung, „wenn sich seine Vorlesungen wider Erwarten nicht glänzend gestalten sollten“, sich in einer Immediateingabe an den König zu wenden und zugleich Humboldt davon in Kenntnis zu setzen. „Im Sommer 1845“, sagt er in seiner Bittschrift, „begann ich meine Vorlesungen und setzte sie durch drei Semester fort, war aber schon im letzten genöthigt, sie meiner Gesundheit wegen fast zur Hälfte auszusetzen. Das Honorar dafür betrug zusammen 287 Thlr. 15 sgr., indem andere 255 Thlr. gestundet werden mußten. Es wurde also eine namhafte pecuniäre Einnahme durch meine Vorlesungen nicht erreicht. Ich habe dem Befehl meines Arztes gemäß seit Michaelis vorigen Jahres meine Vorlesungen aussetzen müssen und weiß nicht, ob ich sie diesen Winter werde aufnehmen können.“

Schon zwei Tage darauf, am 7. Juli, schreibt ihm Humboldt aus Potsdam:

„Ich habe, theuerster College, gestern Ihren theuren Brief empfangen; gestern schon, da die wohlwollendsten Worte verhallen, den Auftrag vom Könige bekommen, Ihren Antrag zu commentiren, und heute morgen um 8 Uhr hat der König, vor dem Vortrag, schon Ihren Brief und meinen officiellen (2 Folio-Seiten) erhalten. Ich habe um so mehr geeilt, als der König Sonnabend oder Montag die Königin nach Dresden bringt und mehrere Tage abwesend ist. Ich habe gezeigt, daß außerordentliche Geschenke ganz unzweckmäßig sind, daß der Gehalt, wie es Anfangs die Absicht war, bis 3000 Thlr. erhöht werden muß, daß, was Leonhard Euler unter Friedrich dem Großen und später Lagrange war, Sie unter des jetzigen Königs ruhmvoller Regierung uns sind, daß Sie mehr zum Glanze der Akademie der Wissenschaften als für die Universität berufen sind, daß man Ihnen vor allem Gemüthsruhe verschaffen muß, daß 333 Thlr., die Ihrem Gehalte für jetzt fehlen, was doch nicht

eine nombre limité für Ihre Zukunft sein darf, ein minimum ist für die Ersparniß, welche nach dem gewöhnlichen Lauf der Dinge die Casse bald bei dem Einsturz von zwei sehr durch Alter delabrirten Häusern, einem kosmischen und einem poetischen, machen wird, anspielend auf mich selbst und den gestiefelten Kater, beide der Casse zusammen über 8000 ℛ︀ ersparend. Ich habe hinzugefügt, daß ich die Fundamente dieser delabrirten Häuser kenne. Ich hoffe, Ernst und Scherz, der auch bald ernst wird, müssen helfen."

Am 20. November erhielt Jacobi ein Gnadengeschenk von 500 Talern.

Mit Beginn des Monats Juli war nach seinen eigenen Mitteilungen wieder eine Besserung in seinem Gesundheitszustande eingetreten, und sogleich bot er der wissenschaftlichen Welt auch wieder eine erstaunliche Fülle neuer und wichtiger Arbeiten. Zunächst vollendete er am 10. Juli 1847 die mit der Theorie der elliptischen Funktionen in engster Verbindung stehende Abhandlung „Über eine partikuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$."

Wenn $\varphi(x, y, z)=\varrho$, $\varphi_1(x, y, z)=\varrho_1$, $\varphi_2(x, y, z)=\varrho_2$ die Gleichungen dreier orthogonaler Flächensysteme sind, so wird, wenn $\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)^2=h^2$, $\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\right)^2=h_1^2$, $\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\right)^2=h_2^2$ gesetzt und die cosinus der Winkel, welche die an den drei Flächen in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt errichteten Normalen mit den drei Koordinatenachsen bilden, mit α, β, γ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bezeichnet werden, für eine beliebige Funktion V $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=h^2\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2+h_1^2\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho_1}\right)^2+h_2^2\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho_2}\right)^2$, $\sum \pm \frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}=h h_1 h_2$, und $dx^2+dy^2+dz^2=\frac{1}{h^2}\,d\varrho^2+\frac{1}{h_1^2}\,d\varrho_1^2+\frac{1}{h_2^2}\,d\varrho_2^2$ sein. Jacobi zeigt nun zunächst, daß, wenn

in eine Funktion F von $x, y, z, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ für x, y, z drei andere Variable u, u_1, u_2 eingeführt werden sollen, sich aus der Gleichung $\int\int\int F dx dy dz = \int\int\int F . \varDelta du du_1 du_2$, in welcher $\varDelta$ die Funktionaldeterminante bedeutet, mit Hilfe der Variation der beiden gleichen Integrale, Reduktion unter dem Integral mittels partieller Integration auf die Variation selbst und Identifizierung der Koeffizienten dieser Variation

$$\varDelta \left\{ \frac{\partial F}{\partial V} - \frac{\partial \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial V}{\partial x}}}{\partial x} - \cdots \right\} = \varDelta \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right) - \left(\frac{\partial . \varDelta \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial V}{\partial u}} \right)}{\partial u} \right) - \cdots$$

folgt, worin die eingeklammerten Größen als Funktionen von u, $u_1, u_2, V, \frac{\partial V}{\partial u}, \frac{\partial V}{\partial u_1}, \frac{\partial V}{\partial u_2}$ zu betrachten sind, und leitet daraus die Lamésche Transformation der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ in die Gleichung

$$\frac{\partial \frac{h}{h_1 h_2} \frac{\partial V}{\partial \varrho}}{\partial \varrho} + \frac{\partial \frac{h_1}{h_2 h} \frac{\partial V}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \frac{h_2}{h h_1} \frac{\partial V}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} = 0$$

unmittelbar her; zugleich findet er, daß der transformierte Ausdruck des Quadrates des Linienelementes $dx^2 + dy^2 + dz^2$ allein hinreicht, um sogleich die Transformation der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ zu erhalten, und leitet durch Einführung von Polarkoordinaten die Laplacesche Transformation derselben in $\sin u_1 \frac{\partial \cdot u^2 \frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u} + \frac{\partial \cdot \sin u_1 \frac{\partial V}{\partial u_1}}{\partial u_1} + \frac{1}{\sin u_1} \frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} = 0$ ab.

Durch Einführung der elliptischen Koordinaten und Substitution von $\frac{d\varrho}{\sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}} = du$ und die ähnlichen ergibt sich die Lamésche Form $(\varrho_1^2 - \varrho_2^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + (\varrho^2 - \varrho_2^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2} + (\varrho^2 - \varrho_1^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} = 0$, von welcher $V = f(u + u_1 i + u_2) + f_1(u +$

$u_1 i - u_2) + f_2(u - u_1 i + u_2) + f_3(u - u_1 i - u_2)$, worin f, f_1, f_2, f_3 willkürliche Funktionen sind, eine partikuläre Lösung darstellt. Mit Hilfe des Abelschen Theorems gelingt es nun Jacobi, die willkürlichen Funktionen in andere zu verwandeln, deren Argumente algebraische Funktionen von x, y, z sind: er beweist den Satz, daß, wenn die Größe σ durch x, y, z mittels der Gleichung $1 = \frac{\sigma}{bc} x + \frac{i\sqrt{\sigma^2 - b^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}} y + \frac{i\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}} z$ bestimmt wird, in welcher b und c beliebige Konstanten bedeuten, jede Funktion dieser Größe $V = f(\sigma)$ der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ genügt, und allgemein, daß, wenn eine Größe σ als Funktion von x, y, z durch die Gleichung $\Pi = 0$ bestimmt wird, in welcher die Funktion Π der partiellen Differentialgleichung $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2 = 0$ Genüge leistet, und man außerdem $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0$ hat, eine willkürliche Funktion von σ wiederum eine Lösung der partiellen Differentialgleichung in V sein wird. Die Fragê, wie die Werte der Funktion V auf allen Punkten zweier der konfokalen Ellipsoide gegeben sein müssen, damit dieselbe die oben angegebene Form annimmt, beantwortet er endlich mit Hilfe des Satzes, daß durch die Substitution

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} v_1}{\sin \operatorname{coam} (v_2, \varkappa')} = \frac{\sin \operatorname{am} v_1 \, \Delta \operatorname{am} (v_2, \varkappa')}{\cos \operatorname{am} v_1 \cos \operatorname{am} (v_2, \varkappa')},$$

$e^{-\vartheta_1} = \sqrt{\frac{1 - \Delta \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am} (v_2, \varkappa')}{1 + \Delta \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am} (v_2, \varkappa')}}$ die partiellen Differentialgleichungen $\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2} = 0$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta_1^2} = 0$ ineinander übergehen, und die Funktion $V = \Pi(\vartheta + \vartheta_1 i) + \Pi_1(\vartheta - \vartheta_1 i)$, welche der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2} = 0$ genügt, muß sich somit als die Summe zweier Funktionen von $v_1 + v_2 i$ und $v_1 - v_2 i$ darstellen lassen, was mit Hülfe der elliptischen Funktionen auch direkt gezeigt wird.

Am 15. Juli las Jacobi in der Akademie eine nicht veröffentlichte Arbeit „Über die Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion", über welches sich eine Aufzeichnung in seinen hinterlassenen Papieren vorfindet, welche seine schon mehrfach erwähnte Darstellung desselben näher ausführt und mit den nachfolgenden Worten eingeleitet wird:

„Das Integral $v = \int_{t_0}^{t} \Sigma m(x'x' + y'y' + z'z')dt$, welches Hamilton mit dem Namen der Aktion oder auch der aufgehäuften lebendigen Kraft bezeichnet, hat schon früher die Aufmerksamkeit der Analysten auf sich gezogen. Wenn Hamilton durch seine partiellen Differentiationen die Integralgleichungen der Bewegnng darstellt, so hatte man früher aus der Betrachtung der Variation desselben Integrals die Differentialgleichungen der Bewegung abgeleitet. Der Verfasser bemerkt, wie es interessant sei zu sehen, wie die in verschiedenem Sinne genommenen unendlich kleinen Änderungen des nämlichen einzigen Ausdruckes das eine Mal die Differentialgleichungen des Problems, das andere Mal die vollständigen Integralgleichungen geben. Das erstere Verfahren hat man zu einem Grundsatze der Mechanik gemacht, dem sogenannten Prinzip der kleinsten Wirkung; der Hamiltonsche Satz verdient mit gleichem Recht als ein Prinzip der Mechauik betrachtet zu werden. Beide beruhen auf einer ähnlichen Analyse; auch scheint es, daß der Verfasser bei Gelegenheit seiner Arbeiten in der Theorie des Lichtes, in welcher ein häufiger Gebrauch von dem Prinzip der kleinsten Wirkung gemacht war, auf sein neues Prinzip gekommen ist. Es wird daher nicht am unrechten Orte sein, über das Prinzip der kleinsten Wirkung hier einige allgemeine Bemerkungen beizubringen.

Euler beschließt seine 1744 erschienene berühmte Schrift 'methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti' mit einem Abschnitt: de motu pro-

jectorum in medio non resistente, per methodum maximorum ac minimorum determinando. In diesem Abschnitt findet sich bekanntlich zuerst das Prinzip der kleinsten Wirkung aufgestellt und wird dort für den Fall bewiesen, in welchem die Geschwindigkeit des Körpers bloß von seinem Orte abhängt, so daß, wenn er zu demselben Orte wiederkehrt, er auch dieselbe Geschwindigkeit wiedererlangt, welcher Fall, wie Euler bemerkt, eintritt, so oft der Körper nach einem oder mehreren festen Zentren mit Kräften gezogen wird, welche irgendwelchen Funktionen der Entfernungen von diesen Zentren proportional sind. Auf den Fall, wo der Punkt sich auf einer Fläche oder Kurve bewegen muß, dehnt er das Prinzip nicht aus. Auch wird in den Eulerschen Beweisen immer nur die Bahn in einer Ebene betrachtet; dagegen bemerkt er schon, daß sein Beweis nur erfordere, daß man den Ausdruck $Tdx + Vdy$, wo T, V die Seitenkräfte bedeuten, integrieren kann. Euler sagt zwar am angeführten Orte, daß T und V beliebige Funktionen von x, y sein können, aber aus dem übrigen Zusammenhange geht hervor, daß er diese Bedingung stillschweigend verstanden. Auch bemerkt er schon, daß dasselbe Prinzip bei der Bewegung mehrerer Punkte, die auf irgendeine Weise auf sich gegenseitig einwirken, gelte. Aber wenn er noch es für zu schwierig hält, dieses durch den Kalkul nachzuweisen, und daher zu metaphysischen Prinzipien seine Zuflucht nehmen will, so sehen wir nicht gar lange darauf Lagrange im 2. Bande der Miscellanea Taurinensia diesem Prinzipe seine ganze Allgemeinheit geben. Es befinden sich nämlich in diesem Bande die beiden berühmten, miteinander zusammenhängenden Abhandlungen 'Essai sur une nouvelle méthode etc.' und 'Application de cette méthode etc.', von denen letzteren eine neue Epoche für die Mechanik anhebt, und die weit ihrer Zeit vorausgeeilt sind. Denn in diesen Abhandlungen leitet Lagrange bereits die Differentialgleichungen für alle Pro-

bleme der Dynamik mit einer einzigen Formel her, zuerst für die Bewegung irgendeines Systems isolierter Punkte, auf welches irgendwelche Kräfte wirken, und zwischen deren Koordinaten irgendwelche Bedingungsgleichungen gegeben sind, wendet dann die allgemeine Methode auf die Schwingungen eines mit einer endlichen oder unendlichen Zahl Körper beladenen elastischen oder unelastischen Fadens an, sei es daß der Faden an einem oder an beiden Enden fest, daß er mit einem oder beiden längs irgendeiner festen Kurve gleiten kann, oder beide Enden verknüpft, so daß der Faden in sich zurückkehrt, ferner auf die Bewegung eines Körpers von irgendwelcher Figur, auf den irgendwelche Kräfte wirken, sei es daß der Körper ganz frei oder daß er sich um einen festen Punkt oder um eine feste Achse drehen, oder einer seiner Punkte auf einer gegebenen Fläche bleiben muß, oder er selber während seiner Drehung auf irgendeiner Fläche, die er fortwährend berührt, frei gleitet; dann leitet er aus derselben Formel die Gesetze der Bewegung der nicht elastischen Flüssigkeiten, auf welche irgendwelche Kräfte wirken, und die ganz eingeschlossen oder ganz oder zum Teil frei sind, her und schließt die Abhandlung mit der Herleitung der Gesetze der Bewegung elastischer Flüssigkeiten aus derselben Formel. Wenn das Detail der späteren Mécanique analytique mancherlei Veränderungen fähig ist, aber die ewige Größe dieses Werkes darin besteht, die gesamten Probleme der Statik und Dynamik vermittels einer einzigen Formel in Probleme der reinen Analysis zu übertragen — eine Konzeption, welche an die Grenze des menschlichen Abstraktionsvermögens zu reichen scheint — so finden wir bereits in dieser Arbeit jenen kühnen Gedanken gleich in fertiger Vollendung aus dem Kopfe hervorgehen.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung, von welchem Lagrange ausging, erstreckt sich nicht auf so allgemeine Untersuchungen. Aber es gab ihm für die Differentialglei-

chungen eine Form, welche mit Leichtigkeit auf die Fälle ausgedehnt werden konnte, in welchen jenes Prinzip nicht mehr stattfindet. Nachdem Lagrange in der ersten der beiden angeführten Abhandlungen den Algorithmus des Variationskalkuls zur allgemeinen Lösung aller Aufgaben, welche die Erforschung der größten oder kleinsten Werte von Integralformeln zum Zwecke haben, erfunden hatte, wendete er ihn sogleich auf das Integral an, von dem Euler bemerkt hatte, daß die Bedingungen, daß es ein Minimum würde, zugleich die Differentialgleichungen der Bewegung für einen sehr ausgedehnten Fall wurden, und auf diesem Wege wurde der Algorithmus der Variationsrechnung in die Mechanik eingeführt, durch welche allein jene abstrakteste Allgemeinheit erreicht werden konnte, die in einem symbolischen Ausdruck eine ganze Welt umfaßte, und ein für allemal die Arbeit des Verstandes vollstreckte, welche früher bei jedem besonderen Problem aufgewendet werden mußte. Der Weg, den ihn sein Genius führte, war also nicht der, welchen später die systematische Darstellung der Mécanique analytique erforderte; er hat nicht zuerst aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten eine allgemeine Formel für die Statik abgeleitet und dann vermittels des d'Alembertschen Prinzips aus dieser die allgemeine Formel für die Dynamik. Vielmehr geschieht in jener Abhandlung, in welcher wir bereits die Substanz der ganzen M. A. vorfinden, des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten noch mit keinem Worte Erwähnung. Das Prinzip der kleinsten Wirkung führt ihn ohne statische Vorbetrachtungen sogleich in die Dynamik und gibt ihm eine Formel, welche er durch eine Divination auf alle Probleme der Dynamik ausdehnt. Denn im ungestümen Vorwärtsdringen ist weder von einem Beweise der allgemeinen Formel die Rede, noch läßt er sich, einige Fälle ausgenommen, darauf ein, die Übereinstimmung der aus ihr abgeleiteten Resultate mit den Differentialgleichungen, wie

man sie aus den anderen Prinzipien der Mechanik in jedem besonderen Falle erhalten kann, zu beweisen.

Wenn aber Lagrange und die Wissenschaft dem Prinzip der kleinsten Wirkung so viel verdankt, so ist es bemerkenswert, daß dasselbe von ihm, sowie in den meisten Lehrbüchern ungenau, ja man kann sagen falsch definiert wird. Ich will die in der M. A. gegebene Definition hersetzen: 'Wenn auf irgendeines Systemes Körper Kräfte wirken, welche sie zueinander oder nach festen Punkten ziehen und irgendwelchen Funktionen der Entfernungen proportional sind, so müssen die von den verschiedenen Körpern beschriebenen Kurven und ihre Geschwindigkeiten so beschaffen sein, daß die Summe der Produkte jeder Masse in das Integral ihrer mit dem Elemente der Kurve multiplizierten Geschwindigkeit ein Maximum oder Minimum ist, wenn man die Anfangs- und Endpunkte jeder Kurve als gegeben ansieht, so daß die Variationen ihrer Koordinaten Null sind.' Wenn man auch aus dem von diesem Prinzip gegebenen Beweise leicht erkennt, was es besagen soll, so ist es doch unmöglich, mit der so gestellten Definition irgendeinen präzisen Sinn zu verbinden. Unser Verfasser hat alle Mängel der angeführten Definition wohl gefühlt, und um sie zu vermeiden, dieses Prinzip sehr vorsichtig bezeichnet. Das in Rede stehende Integral nennt er action, und seine Eigenschaft drückt er mit folgenden Worten aus: 'Denken wir uns, die Körper des Systems bewegen sich von gegebenen Anfangspositionen nach gegebenen Endpositionen, nicht wie es mit den allgemeinen Sätzen der Dynamik oder den Differentialgleichungen der Bewegung verträglich oder nach denselben möglich ist, jedoch so, daß weder die etwa vorausgesetzten geometrischen Verbindungen der Körper noch die eine dynamische Relation zwischen den Geschwindigkeiten und den Konfigurationen, welche das Gesetz der lebendigen Kraft ausmacht, verletzt werden, und setzen wir ferner, diese geometrisch denkbare, aber

dynamisch unmögliche Bewegung sei nur unendlich wenig von der zwischen den gegebenen Endpunkten wirklich stattfindenden (durch die gegebenen Kräfte hervorgebrachten) Bewegung des Systems verschieden, so wird der Wert des mit dem Namen action bezeichneten Integrales oder die angehäufte lebendige Kraft des Systems in der so fingierten Bewegung von dem wirklichen Werte des Integrals unendlich weniger verschieden sein, d. h. die Differenz wird eine unendlich kleine Größe der 2. Ordnung oder die erste Variation Null sein.'

Lagrange sagt in der Einleitung zur Dynamik, daß, wenn man das Prinzip der kleinsten Wirkung mit dem Prinzip der lebendigen Kraft kombiniert, man daraus die Differentialgleichungen der Bewegung ableiten kann. Aber er mußte, wie Hamilton getan hat, diese Kombination schon in seine Definition aufnehmen. Der Sinn dieses Prinzips, wie man ihn aus den von demselben gegebenen Beweisen abnehmen kann und wie man ihn in dem angeführten Eulerschen Werke für den Fall nur eines Körpers klar ausgesprochen findet, erfordert, daß man aus der zu integrierenden Funktion das Zeitelement vermittels des Satzes von der lebendigen Kraft fortgeschafft hat. Der Satz von der lebendigen Kraft gibt $\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\sum m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = U-H$, wo ds das Bahnelement, U die Kräftefunktion, H die willkürliche Konstante bedeutet. Setzen wir nun $\sqrt{\Sigma m ds^2} = dS$, so ist das Prinzip der kleinsten Wirkung, daß $\int\sqrt{U-H}\cdot dS = \int\sqrt{U-H}\cdot\sqrt{\Sigma m ds^2}$ für gegebene Anfangs- und Endwerte der Koordinaten sämtlicher Körper ein Minimum wird. Wenn dieses wirklich überall nur die Meinung war, so wäre es wünschenswert, wenigstens zum Nutzen der Anfänger, daß dieses in den Lehrbüchern auch deutlich gesagt und das Prinzip nur auf diese Weise definiert werde.

Ich weiß nicht, ob es jemand befremdet hat, daß man eine Weisheit oder eine Ökonomie der Natur darin gesetzt hat, daß sie eine kleinste Wirkung hervorbringt, denn unter den Prinzipien der Mechanik würde man ein Prinzip der größten Wirkung oder ein Prinzip der kleinsten Mittel erwarten. Aber das Prinzip, daß das Integral $\int \sqrt{U-H} \cdot dS$ ein Minimum werde, widerspricht in der Tat solchen Erwartungen, die wir von der Natur hegen, keineswegs. Das Element dS bezieht sich auf die Bahnelemente der Körper, der Faktor $\sqrt{U-H}$ auf die wirkenden Kräfte; wenn die Natur streben muß, das System aus einer Lage in die andere auf den kürzesten Bahnen und mit dem geringsten Kraftaufwand zu bringen, so bietet der Ausdruck $\sqrt{U-H} \cdot dS$, dessen Summe ein Minimum werden soll, eine einem solchen Zwecke entsprechende Kombination. Daß es aber wirklich Eulers Meinung war, indem er das Integral als Wirkung oder als angehäufte lebendige Kraft bezeichnete, daß die Natur durch ihre Kräfte eine möglichst kleine Wirkung hervorbringe, geht deutlich aus seinen eignen Worten hervor. 'Weil die Körper', sagt er a. a. O., 'wegen der Trägheit jeder Veränderung ihres Zustandes widerstreben, so werden sie den sollizitierenden Kräften, wenn sie frei sind, so wenig wie möglich gehorchen, wodurch bewirkt wird, daß in der erzeugten Bewegung der von den Kräften herrührende Effekt kleiner sein muß, als wenn auf irgendeine andere Art der oder die Körper bewegt würden.' Wenn man auch, fährt er fort, die Kraft dieser Schlußfolge noch nicht ganz einsieht, so zweifle er doch nicht, daß, da sie mit der Wahrheit übereinstimmt, sie mit Hilfe der Prinzipien einer gesunden Metaphysik zu größerer Evidenz erhoben werden könne, was er jedoch den Metaphysikern von Profession überlassen wolle. Diese Argumentation von seiten Eulers ist um so auffallender, als die Grundsätze einer gesunden Metaphysik sowohl, auf die er provoziert, als auch der

gemeine Menschenverstand, endlich, wie ich oben bemerkt habe, auch die Beschaffenheit des Integrales selber das Gegenteil erheischen. Will man dem Integral und dem Satze einen Namen beilegen, so würde man das Integral vielleicht den Kraftaufwand und den Satz das Prinzip vom kleinsten Kraftaufwand nennen können. Der von Lagrange vorgeschlagene Name des Prinzips der kleinsten lebendigen Kraft leidet an denselben Gebrechen, wie der Name des Prinzips der kleinsten Wirkung und rührt ebenfalls davon her, daß er das Integral $\int dt\, \Sigma m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ betrachtet hat, ohne die unumgänglich nötige Elimination des Zeitelementes unter dem Integralzeichen vorzunehmen, wodurch die lebendige Kraft ganz herausgeht ..."

Die folgenden Auseinandersetzungen geben die Durchführung des Prinzips der kleinsten Wirkung im wesentlichen in der Form, wie sie aus den durch Clebsch veröffentlichten Vorlesungen Jacobis bekannt geworden.

Am 25. Juli schließt er eine kleinere Arbeit „De seriebus ac differentiis observatiunculae" ab, in der er zunächst zeigt, daß, wenn man aus einer Reihe $A_0, A_1, A_2, \ldots$ nacheinander die Differenzenreihen bildet und das $n+1$. Glied der m. Differenzenreihe mit $\Delta^m A_n$ bezeichnet, aus jeder identischen Gleichung zwischen den Größen A und $A-1$, als lineare Gleichung zwischen den Ausdrücken $A^n(A-1)^m$ betrachtet, eine Differenzenformel entsteht, wenn statt der einzelnen Glieder $A^n(A-1)^m$ die Ausdrücke $\Delta^m A_n$ substituiert werden. Ferner folgt aus jeder linearen Relation zwischen den Differenzen $\Delta^m A_n$ eine andere, wenn an Stelle eines jeden Ausdruckes $\Delta^m A_n$ der Ausdruck $(-1)^{m+n}\Delta^n A_m$ gesetzt wird, woraus sich die elementaren Beziehungen $\Delta^m A_0 = A_m - m A_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} A_{m-2} - \cdots \pm A_0$ und $A_m = \Delta^m A_0 + m \Delta^{m-1} A_0 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \Delta^{m-2} A_0 + \cdots + A_0$ ergeben; endlich bleibt z. B. noch jede lineare Gleichung zwischen Größen

der Form $A^n(A-1)^m$ richtig, wenn an Stelle derselben die Größen $\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)\ldots(\beta-\gamma-m+1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+m+n-1)}$ substituiert werden. Nach einfachen, auf diesen Hilfssätzen beruhenden Beweisen der beiden Eulerschen Theoreme, daß, wenn $x=\frac{y}{1+y}$ ist, $A_0x+A_1x^2+A_2x^3+\cdots=A_0y+\varDelta A_0y^2+\varDelta^2A_0y^3+\cdots$, und wenn $f(x)=a+bx+cx^2+\ldots$, $S=aA_0+bA_1x+cA_2x^2+\cdots$ ist, S in $A_0f(x)+\varDelta A_0\cdot x\frac{df(x)}{dx}+\frac{1}{2!}\varDelta^2A_0\cdot x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\cdots$ übergeht, behandelt Jacobi noch einige Anwendungen auf Funktionalreihen.

In dieser Zeit entstand auch eine vom Juli datierte Arbeit, welche Borchardt aus den hinterlassenen Papieren Jacobis unter dem Titel „Über Reihenentwicklungen, welche nach den Potenzen eines gegebenen Polynoms fortschreiten und zu Koeffizienten Polynome eines niederen Grades haben" veröffentlichte. Wenn P eine Funktion n. Grades $p+p_1x+\cdots+p_nx^n$ und $f(x)=\alpha+\alpha_1P+\alpha_2P^2+\cdots$, worin die α Konstanten bedeuten, so erhält die Funktion $f(x)$, wenn man für x die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $P=b$ einsetzt, n Werte, und es wird nur einer derselben mit dem Werte $\alpha+\alpha_1b+\alpha_2b^2+\cdots$ übereinstimmen; sind aber die α Polynome $n-1$. Grades von x, so kann die Entwicklung von $f(x)$ für alle n Werte von x gelten, welche demselben Werte von P entsprechen. Setzt man nämlich $P=y$, so kann man die vorgelegte Entwicklung von $f(x)$ in die Form einer ganzen Funktion von x vom $n-1$. Grade bringen, deren Koeffizienten nach ganzen positiven Potenzen von y aufsteigende Reihen darstellen, und diese Entwicklung soll nunmehr gültig bleiben, wenn man für denselben Wert von y statt der Größe x jede Wurzel $X_1, X_2, \ldots X_n$ der Gleichung $P=y$ setzt. Zunächst wird eine ganze Funktion $n-1$. Grades von x zu bestimmen sein, welche für X_1, $X_2, \ldots X_n$ die Werte $f(X_1), f(X_2)\ldots f(X_n)$ annimmt, und

die auf bekannte Art hergestellten Koeffizienten sind dann mittels der Gleichung $P = y$ nach ganzen positiven Potenzen von y zu entwickeln. Aus der Gleichung $P - y = p + p_1 x + \cdots + p_n x^n - y = p_n(x - X_1)(x - X_2) \ldots (x - X_n)$ folgt aber $\frac{P-y}{x-X_1} = p_1 + p_2 x + \cdots + p_n x^{n-1} + X_1(p_2 + p_3 x + \cdots + p_n x^{n-2}) + X_1^2(p_3 + \cdots + p^n x^{n-3}) + \cdots + p_1 X_1^{n-1}$, und somit vermöge des Lagrangeschen Interpolationsproblems jene zu bestimmende ganze Funktion in der Form $(p_1 + p_2 x + \cdots + p_n x^{n-1}) \left\{ \frac{f(X_1)}{P'(X_1)} + \frac{f(X_2)}{P'(X_2)} + \cdots + \frac{f(X_n)}{P'(X_n)} \right\} + (p_2 + p_3 x + \cdots + p_n x^{n-2}) \left\{ \frac{X_1 f(X_1)}{P'(X_1)} + \cdots + \frac{X_n f(X_n)}{P'(X_n)} \right\} + \cdots + p_n \left\{ \frac{X_1^{n-1} f(X_1)}{P'(X_1)} + \cdots + \frac{X_n^{n-1} f(X_n)}{P'(X_n)} \right\}$, in welcher nur noch die Klammern nach positiven ganzen Potenzen von y zu entwickeln sind; wenn $\int x^{\varkappa-1} f(x)dx = \psi_\varkappa(x)$, und $\psi_\varkappa(X_1) + \psi_\varkappa(X_2) + \cdots + \psi_\varkappa(X_n) = Y_\varkappa$ gesetzt wird, so erhält man $f(x) = (p_1 + p_2 x + \cdots + p_n x^{n-1}) \frac{dY_1}{dy} + (p_2 + p_3 x + \cdots + p_n x^{n-2}) \cdot \frac{dY_2}{dy} + \cdots + p_n \frac{dY_n}{dy}$, worin jeder der einzelnen Terme $\psi_\varkappa(X_1)$, $\psi_\varkappa(X_2), \ldots \psi_\varkappa(X_n)$ mit Hilfe der Lagrangeschen Reihe aus der Gleichung $P - y = 0$ nach ganzen positiven Potenzen von y entwickelt werden kann. Es werden hiervon Anwendungen auf rational gebrochene Funktionen, auf gebrochene Potenzen rationaler Funktionen, auf allgemeine irrationale, logarithmische-, Exponentialfunktionen und auf eine durch eine Quadratur definierte Funktion gemacht, und die Untersuchung noch auf den Fall ausgedehnt, daß P gleiche Faktoren besitzt.

Eine andere von Jacobi ebenfalls im Sommer 1847 entworfene Arbeit wurde aus dessen hinterlassenen Papieren von Borchardt unter dem Titel „Über einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen" veröffentlicht, und dadurch festgestellt, daß Jacobi das von Sylvester im Jahre 1852 aufgestellte Trägheitsgesetz der quadratischen Formen schon damals bekannt war.

Man kann den Satz, daß, wenn man eine homogene reelle quadratische Funktion auf unendlich viele Arten als ein lineares Aggregat von Quadraten reeller linearer Funktionen darstellt, in allen die Anzahl der positiven sowie die Anzahl der negativen Quadrate dieselbe bleibt, auch so fassen, daß, wenn $r_1, r_2, \ldots r_i, s_1, s_2, \ldots s_\varkappa$ und $u_1, u_2, \cdots u_m, v_1, v_2, \ldots v_n$ zwei Systeme voneinander unabhängiger reeller linearer homogener Funktionen darstellen, zwischen deren Quadraten die lineare Gleichung $r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_i^2 - s_1^2 - s_2^2 - \cdots - s_\varkappa^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2 - v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_n^2$ identisch stattfindet, dann notwendig $i = m$, $\varkappa = n$ ist. Den Beweis dieses Satzes führt nun Jacobi unmittelbar auf das fast selbstverständliche Lemma zurück, daß, wenn eine Anzahl voneinander unabhängiger homogener linearer Funktionen die Anzahl andererer homogener linearer Funktionen übertrifft, man immer bewirken kann, daß diese letzteren verschwinden, ohne daß zugleich auch die ersteren alle verschwinden, und daß somit jener Satz die einfache Form annimmt, daß, wenn $r_1, r_2, \ldots r_i, s_1, s_2, \ldots s_\varkappa$ voneinander unabhängig sind, die obige identische Gleichung niemals bestehen kann, wenn $m < i$ oder $n < \varkappa$ ist. An diesen Satz schließt sich eine Reihe von Anwendungen, wonach die Gleichung eines Kegelschnittes oder einer Fläche 2. Grades immer von derselben Art bleibt, das Koordinatensystem mag ein rechtwinkliges oder beliebiges schiefwinkliges sein, und andere, die später nach Mitteilungen Jacobis von Borchardt angegeben wurden.

Die für Humboldt angefertigten historischen Notizen hatten Jacobi veranlaßt, seine in Rom vorgenommenen Diophant-Studien zusammenzustellen und dieselben am 5. August 1847 der Berliner Akademie unter dem Titel „Über die Kenntnisse des Diophantus von der Zusammensetzung der Zahlen aus zwei Quadraten nebst Emendation der Stelle Probl. arith. V. 12“ vorzulegen. Diophant verlangt in der 12. Aufgabe des so reichen 5. Bandes der arithmetischen Probleme, die Einheit in zwei solche Stücke zu

teilen, daß, wenn man zu ihnen dieselbe gegebene Zahl addiert, die beiden Summen Quadrate werden, oder daß, wenn a diese Zahl ist, $2a + 1$ die Summe zweier Quadrate wird. Die Bestimmung der gegebenen Größe, welche nötig ist, damit die Aufgabe möglich werde, fügt Diophant nicht hinzu, spricht aber ganz deutlich an anderer Stelle den Satz aus, daß Zahlen, welche die Summe zweier Quadrate sein sollen, weder selbst noch einer ihrer Faktoren die Form $4n - 1$ haben dürfen, wie man aus einer nur unbedeutenden Änderung in dem jetzigen Texte erkennen kann; Jacobi zeigt nun, wie Diophant diesen Satz mit den elementaren Mitteln, welche ihm zu Gebote standen, beweisen konnte, und sucht die Einzelheiten dieser Schlußfolgerungen durch streng philologisch-kritische Untersuchungen und anscheinend sicher begründete Konjekturen im Diophant selbst zu finden.

Seine auf 33 Oktavblättern unter dem Titel „Varianten der sechs im Vatican befindlichen Codices des Diophant“ zusammengestellten Resultate befinden sich in der Handschriftenabteilung der Königl. Bibliothek zu Berlin, ebenso wie ein Exemplar der Fermatschen Ausgabe des Diophant und einer deutschen Übersetzung desselben mit handschriftlichen Randbemerkungen Jacobis.

Erst in den Ferien fand Jacobi Zeit, dem von Crelle nach dem im März dieses Jahres erfolgten Tode Goepels ausgesprochenen Wunsche, diesem genialen Mathematiker einige Worte des Andenkens zu widmen, nachzukommen; am 22. September verfaßte er für das Journal eine „Notiz über A. Goepel“, in der er den ausgezeichneten Leistungen dieses jungen Gelehrten gerecht wurde. Nachdem er seine früheren Arbeiten besprochen, geht er genauer auf dessen letzte und bedeutendste Leistung ein: „Die von ihm kurz vor seinem Tode beendigte oben angeführte Abhandlung behandelt einen hohen und abstrakten Teil der Analysis und gibt die Lösung eines der bedeutendsten Probleme, welches sich die gegenwärtige Mathematik gestellt hat, die

umgekehrten Funktionen der ersten Klasse der Abelschen Integrale wirklich darzustellen. Durch eine glückliche Divination verallgemeinert er auf naturgemäße Art die einfachen Reihen Θ, auf welche ich die elliptischen Funktionen zurückgeführt habe, und findet, daß diese verallgemeinerten Reihen die Koeffizienten der quadratischen Gleichung geben, deren beide Wurzeln in meiner Theorie der hyperelliptischen Funktionen die simultanen Umkehrungsfunktionen zweier Integralsummen sind. Das einfache Mittel, dessen er sich hiezu bedient, ist die Multiplikation zweier von den verallgemeinerten Reihen, wie ich ein ähnliches Verfahren für die Funktionen Θ selbst im 3. Bande des mathematischen Journals p. 305 angegeben habe. Meisterhaft ist die Art, wie er die Differentialgleichungen, welche er findet, ungeschreckt von ihrer Komplikation, durch eine passende Substitution in die verlangte Form der von mir aufgestellten Systeme der hyperelliptischen Differentialgleichungen bringt und hierdurch das gestellte Problem vollständig erledigt . . . Vielleicht finden sich noch Untersuchungen in des Autors Papieren, die vielleicht auch das gewagt scheinende Wort rechtfertigen, daß eine ähnliche Methode sich auf alle Transzendenten erstrecke, welche aus der Integration algebraischer Größen entstehen. Auch dürfte schon nicht so ganz unbedenklich, wie der Verfasser meint, die Ausdehnung auf die Integrale erscheinen, in denen die unter dem Quadratwurzelzeichen befindliche Funktion den sechsten Grad übersteigt, da bei ihnen die Anzahl der in den Reihen enthaltenen Konstanten nicht mehr, wie bei den elliptischen und Abelschen Integralen der ersten Klasse, mit der Anzahl der Moduln übereinstimmt . . .“

Wahrscheinlich zum Zwecke der Abfassung dieser Notiz über Göpel hatte Jacobi eine ausführlichere Aufzeichnung „Zur Geschichte der elliptischen und Abelschen Transzendenten“ entworfen, welche Weierstrass, von der Hand Jacobis geschrieben, in den hinterlassenen Papieren Borchardts auffand, der außerdem noch eine zum Druck be-

stimmte Abschrift angefertigt hatte. Die Aufzeichnung ist nicht nur vom allergrößten Interesse wegen des Überblickes, den Jacobi über seine und der anderen ausgezeichneten Analysten Leistungen gibt, sondern auch weil sie uns scharf die Grenze kennzeichnet, bis zu welcher Jacobi in jener Zeit bei der Erforschung der Lehre von den Transzendenten gelangt ist, und die er in den wenigen folgenden Lebensjahren auch nicht mehr überschritten hat. Sie mag deshalb unverkürzt hier eine Stelle finden:

„Die elliptische Funktion $x = \sin\operatorname{am} u$, welche Abel und ich in die Analysis eingeführt haben, wird durch die Gleichung

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

definiert. Diese Funktion $x = \sin\operatorname{am} u$ hat einen einzigen vollkommen bestimmten Wert, welcher durch eine lineare Gleichung

$$Ax + B = 0$$

gegeben wird, in der A und B Reihen bedeuten, die für jeden reellen oder imaginären Wert von u konvergieren.

Wollte man in die Analysis eine Funktion $x = \Lambda(u)$ einführen, in welcher

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)(1-\lambda^2 x^2)(1-\mu^2 x^2)}},$$

so würde keine Analogie dieser Funktion mit der elliptischen Funktion $\sin\operatorname{am} u$ mehr stattfinden, indem eine solche Funktion $\Lambda(u)$ für jedes u nicht bloß mehrere Werte erhält, sondern gänzlich unbestimmt wird, wofern nämlich zur Definition des Integrals bloß seine Grenzen angewandt werden, der Weg aber, welchen die Variable durch reelle oder imaginäre Werte hindurch von der einen Grenze zur anderen einschlägt, willkürlich bleibt. Denn man kann einen Wert gänzlich unbestimmt nennen, wenn er, wie es in diesem

Fall geschieht, jedem reellen oder imaginären gegebenen Werte so nahe kommen kann, daß der Unterschied weniger als jede gegebene noch so kleine Größe beträgt.

Goepel tadelt es, daß ich diese Funktionen absurd genannt habe, welche die Analysis der Zukunft durch Einführung transzendenter statt der algebraischen Formeln ähnlich wie die elliptischen zu behandeln wissen werde. Bis dahin hat Goepel den anderen Funktionen, welche ich als diejenigen bezeichnet habe, zu welchen man von den elliptischen fortzuschreiten hat, seine Bemühungen gewidmet, und es sind dieselben von dem glänzendsten Erfolge gekrönt worden.

Die von mir in die Analysis eingeführten hyperelliptischen Funktionen sind die Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

in welcher A, B, C Funktionen zweier Variabeln u und v sind, welche mit diesen beiden Wurzeln, die ich x_1 und x_2 nennen will, durch die beiden Gleichungen

$$u = \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$v = \int_0^{x_1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} + \int_0^{x_2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}$$

verbunden sind, wo der Kürze halber

$$(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)(1 - \lambda^2 x^2)(1 - \mu^2 x^2) = X$$

gesetzt ist. Die Koeffizienten A, B, C der quadratischen Gleichung sind vollkommen bestimmte, nicht mehrdeutige Funktionen der Variabeln u und v, und ihre Verhältnisse haben in bezug auf diese beiden Variabeln vier unabhängige Simultanperioden. Dieses neue Prinzip der Simultanperiodizität besteht darin, daß eine Funktion zweier oder mehrerer Variabeln ungeändert bleibt, wenn sich die Variabeln gleichzeitig und um Gleichvielfache gegebener Konstanten verändern, und es liegt in demselben die Lösung der Para-

doxen, welche die durch eine vierfache Periodizität entstehende Unbestimmtheit darbietet.

Die Analysten begrüßten mit Teilnahme die neue Ansicht über die in der Theorie der Abelschen Transzendenten einzuführenden Funktionen. Die Kopenhagener Akademie der Wissenschaften wünschte dieselbe auf alle Integrale algebraischer Funktionen ausgedehnt zu sehen, auf welche Abel sein Theorem ausgedehnt hatte. Es ist hieraus eine schätzenswerte Arbeit von Broch und die preiswürdige Abhandlung von Minding hervorgegangen, denen später noch die Arbeit von Rosenhain folgte. Die nach einem Intervalle von 15 Jahren endlich in den Mémoires des savants étrangers erschienene Abhandlung, welche von Abel im Jahre 1826 der Pariser Akademie überreicht worden war, und durch ihre erschöpfende Allgemeinheit zu den bewunderungswürdigsten Leistungen gehört, würde, wenn sie früher erschienen wäre, diesen Mathematikern den größten Teil ihrer Arbeit erspart haben. Seitdem hat Hermite dem Abelschen Werke eine neue Form gegeben, wie sie fast allen Arbeiten dieses großen Genies zu wünschen ist, wenn ihre tiefen Gedanken klarer hervortreten sollen. Aber am wünschenswertesten mußte es immer erscheinen und am meisten den Analysten daran gelegen sein, die neuen Funktionen wenigstens zunächst für die erste und einfachste Klasse der Abelschen Integrale wirklich dargestellt zu sehen, und es wählte daher die Berliner Akademie der Wissenschaften die Darstellung dieser Funktionen zum Gegenstand einer außerordentlichen Preisfrage. Ungeachtet eines Termins von 3 Jahren blieb die Frage unbeantwortet. Wenn wir nicht aus der Einleitung der Goepelschen Abhandlung ersähen, daß er bereits in dieser Zeit die Grundidee seiner Arbeit gefaßt hatte, so könnte in der Tat die Aufgabe zu frühzeitig gestellt scheinen, da es kaum anderthalb Dezennien waren, daß die hier vorkommenden Integrale zum ersten Male von Abel betrachtet worden waren, und

die Elemente ihrer Theorie noch bei weitem nicht die Durcharbeitung erfahren hatten, wie die der elliptischen Funktionen zu der Zeit, als Abel und ich unsere Arbeiten über dieselben begannen. Auch konnte die Methode, durch welche wir, von dem Integral ausgehend, zu den dem trigonometrischen Sinus und Kosinus entsprechenden Funktionen gelangt waren, keine Anleitung geben. Denn dieselbe beruhte wesentlich auf der Eigenschaft der rationalen Funktionen einer Variablen, daß zur Darstellung derselben die Kenntnisse der Werte, für welche sie verschwinden und unendlich werden, hinreicht, was für rationale Funktionen zweier Variabeln nicht mehr der Fall ist.

Es wäre der Weg übrig geblieben, die Transformation der Abelschen Integrale, welche Herr Professor Richelot nach einer von mir angegebenen Substitution aufgestellt hat, unbestimmt zu wiederholen, und die analytische Natur dieser Transformation so zu ergründen, daß man das durch ihre unbestimmte Wiederholung erhaltene Resultat hätte darstellen können; ferner durch eine komplementare Transformation die Vervielfachung durch eine Potenz von 2 zu gewinnen, und dann endlich die für eine unendliche Multiplikation verschwindender Integrale stattfindende Grenze zu untersuchen. Aber bei Ermangelung der hierzu nötigen Vorarbeiten konnte man ein günstiges Gelingen nur von einer glücklichen Divination hoffen, und hierzu bot die neue Transzendente Θ, auf welche ich die elliptischen Funktionen schließlich zurückgeführt hatte, einen willkommenen Anknüpfungspunkt.

Die elliptischen Funktionen waren zunächst in Form eines Bruches gefunden worden. Erst durch die besondere Betrachtung des Zählers und Nenners dieses Bruches ist ihre Theorie in sich abgeschlossen und auf ihre wahre Grundlage zurückgeführt worden. Wie bei der trigonometrischen Tangente bilden diese dieselbe Funktion für verschiedene Argumente, nur daß hier noch eine einfache

Exponentialgröße als Faktor hinzutritt. Auf dieselbe Transzendente war bereits die 3. Gattung der elliptischen Integrale zurückgeführt worden. Konnte man aus der wirklichen Darstellung der elliptischen Funktion den Zähler und Nenner durch den bloßen Anblick entnehmen, so war man andrerseits dahin gelangt, diese Scheidung auch durch analytische Operationen zu erhalten, und so einen Zyklus von Operationen aufzustellen, nach welchen man zu der elliptischen Funktion zurückkehrt. Die elliptische Funktion quadriert und zwischen zwei Grenzen integriert, welche um einen halben Index der Periode verschieden sind, gibt den Logarithmus der elliptischen Funktion. Durch diesen Zyklus lassen sich fast alle über die elliptischen Funktionen angestellten Betrachtungen hindurchführen und erhalten dann erst ihre Vollständigkeit.

Es wurde gezeigt, daß die Transzendente für jeden aliquoten Teil des Index einer Periode durch bloßes Wurzelausziehen aus elliptischen Funktionen erhalten werden kann; daß dasselbe von dem Quotienten zweier Transzendenten gilt, deren Argumente um einen aliquoten Teil des Index einer Periode verschieden sind, und daß sich aus diesen Wurzelgrößen die Teilungsformeln der elliptischen Integrale zusammensetzen.

Die neue Transzendente selbst wird durch eine Reihe von der höchsten Einfachheit dargestellt, welche immer und zwar mit solcher Schnelligkeit konvergiert, daß sie für praktische Anwendung wie ein endlicher Ausdruck betrachtet werden kann. Das allgemeine Glied dieser Reihe hat die Form e^{ai^2+bi}, in welcher i eine ganze Zahl, a und b beliebige Größen sind, nur daß die Größe a oder, wenn sie imaginär ist, ihr reeller Teil negativ sein muß. Die Größe a bestimmt den Modul des elliptischen Integrals, während dieses selbst der Größe b proportional ist.

In meinem Werke über die elliptischen Funktionen wird der Weg gezeigt, welcher von dem elliptischen Inte-

gral bis zu der neuen Transzendenten zurückzulegen ist. Einmal auf dieser Höhe angelangt, gewinnt man eine Übersicht über diese ganze Theorie, welche derselben eine Klarheit und, ich möchte sagen, Durchsichtigkeit gibt, die man vorher nicht ahnen konnte. Es gibt sehr viele Arten, wie man mit großer Leichtigkeit und durch die elementarsten Prozesse von dieser neuen Transzendenten aus zu allen Eigenschaften der elliptischen Funktionen gelangt. Die erste, welche ich in dem 3. Bande des Crelleschen Journals p. 305 angegeben habe, beruht auf der Multiplikation zweier Transzendenten, welche verschiedene Amplituden, aber denselben Modul haben. Da das Produkt auf einfache Art wieder durch dieselben Transzendenten ausgedrückt wird, die sich aber auf einen transformierten Modul beziehen, so habe ich später in meinen Vorlesungen diesen Weg verlassen und bin von der Multiplikation von vier Transzendenten mit beliebigen Argumenten und demselben Modul ausgegangen, durch welche man einen linearen Ausdruck von Produkten aus vier Transzendenten derselben Natur mit unverändertem Modul erhält. Eine einzige Formel, in welcher man nur spezielle Werte zu substituieren hat, gibt ohne weitere Rechnung das ganze System der Formeln für die Addition der drei Gattungen der elliptischen Integrale sogar auf drei Argumente ausgedehnt. Es ist hierbei nicht nötig, zuerst aus der periodischen Natur der Transzendente die allgemeine Form anzugeben, und dann durch die Substitution partikularer Werte für jede der Hauptformeln die Werte der in dieselben eingehenden zuerst unbestimmt angenommenen Konstanten zu ermitteln, sondern die eine Formel gibt zugleich mit der Form auch diese Werte. Da sich jedoch unter denjenigen Papieren, welche einen zweiten Teil der Fundamenta Nova zu bilden bestimmt waren, noch ein fertiger Aufsatz findet*), in welchem

*) Von diesem Aufsatze haben sich im Nachlasse Jacobis nur einzelne Blätter vorgefunden.

jene frühere Methode näher auseinandergesetzt wird, so wird vielleicht deshalb auch die Mitteilung dieser Arbeit nicht ohne Interesse sein, weil sie als Einleitung und Vorstudium zu der Goepelschen Abhandlung dienen kann, in welcher eine ähnliche Methode, aber bei einem viel komplizierteren Gegenstande befolgt ist. Einen verschiedenen Weg scheint Cauchy in seinen in den Comptes rendus der Pariser Akademie veröffentlichten Noten eingeschlagen zu haben, indem er von dem unendlichen Produkte ausgeht, durch welches ich die neue Transzendente ebenfalls dargestellt habe. Endlich haben Liouville und Hermite in Arbeiten, von welchen nur kurze Andeutungen veröffentlicht sind, sich der bloßen periodischen Eigenschaften der Transzendente Θ bedient, um alle Resultate über Addition, Multiplikation, Transformation, Teilung abzuleiten, indem ihnen diese periodischen Eigenschaften der Transzendenten a priori die Form der Resultate, partikuläre Betrachtungen dann die darin noch unbestimmt gelassenen Werte geben. Man wird es hiernach gewiß gerechtfertigt halten, wenn ich durch den Titel meines Werkes behauptet habe, die neuen wahren Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionen gefunden zu haben. Außer der Leichtigkeit, mit welcher man auf denselben das ganze Gebäude aufführen kann, gewähren sie noch den Vorteil einer größeren Strenge und Klarheit, als bis jetzt in derjenigen Behandlung, welche von den Integralen ausgeht, möglich gewesen ist. Denn die Theorie der imaginären Werte der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale ist noch nicht ausgebildet genug, um die Betrachtung solcher Integrale für den ganzen Umfang aller reellen und imaginären Werte der darin eingehenden konstanten und veränderlichen Größen mit gleicher Evidenz zum Grunde zu legen, welche die immer konvergierenden Reihen gewähren. Dieser Mangel ist aber nicht der Methode immanent, deren ich mich in den Fund. Nov. bedient habe, und rührt nur von einer in den allgemeinen

Elementen der Analysis noch bestehenden Lücke her. Der Verfasser eines Aufsatzes im 27. Bande des mathematischen Journals scheint mir daher, wenn er meiner ihm bekannt gewordenen früheren und neueren Methode, von den unendlichen Reihen auszugehen, seinen Beifall schenkt, doch jene erste Methode, die zu so fruchtbaren Entdeckungen geführt hat, zu streng zu beurteilen.

Legendre hat sich mit Schnelligkeit und Kraft in dem höchsten Menschenalter der neuen Idee zu bemächtigen gewußt, welche die Theorie, die eine der Hauptbeschäftigungen seines Lebens ausgemacht hatte, umgestaltete. Als ich ihm aber meinen Gedanken mitteilte, wie man die neue Transzendente zum Ausgangspunkt aller Untersuchungen über die elliptischen Funktionen machen könnte, hat er sich von demselben als zu heterogen mit den ihm gewohnten Betrachtungen abgewendet. Ich möchte nicht vergessen, schrieb er, daß die größte Schönheit und Vollkommenheit meiner Theorie in der Anwendung rein algebraischer Ausdrücke und geschlossener endlicher Formeln bestände.

Die Betrachtung der Additionsformeln für die 3. Gattung der elliptischen Integrale hatte mich darauf geführt, dieselben auf ein anderes geschlossenes Integral zurückzuführen, welches ein Argument weniger enthält, und es fand sich, daß dieses Integral der Logarithmus der Transzendente sei, welche naturgemäß den Zähler und Nenner der elliptischen Funktionen bildet. An dem geschlossenen Integral selber konnte gezeigt werden, daß die beiden Größen, deren Quotient zu bilden ist, keinen gemeinschaftlichen Faktor haben und für keinen endlichen Wert des Intervalles unendlich werden können. Es ist zu erwarten, daß, nachdem man sich für die erste Klasse der Abelschen Integrale mit der 3. Gattung dieser Integrale mit Erfolg beschäftigt haben wird, auch deren Reduktion auf ein neues geschlossenes Integral gelingen wird, in welchem sich, wie in der Theorie der elliptischen Integrale, die Argumente mit dem Para-

meter vereinigen. Es ist ferner zu erwarten, daß dies Integral dann diejenige Transzendente sein wird, welche die drei Koeffizienten der quadratischen Gleichung gibt, deren Wurzeln die Intervalle der beiden durch Addition zu vereinigenden Abelschen Integrale sind. Die so erhaltenen Resultate werden sich durch folgerechte Schlüsse aus dem Abelschen Additionstheorem ergeben. Will man aber die wirkliche Darstellung und, sozusagen, die sichtbare Gestalt der so gefundenen Transzendente haben, so ist hierfür noch keine aus der Theorie der elliptischen Funktionen durch Analogie entnommene Methode vorhanden, und es bleibt nur der Versuch übrig, die Reihe

$$\sum e^{a i^2 + b i}$$

auf eine Weise zu verallgemeinern, bei welcher die Methoden, durch die man von dieser Reihe aus zu den Resultaten der Theorie der elliptischen Funktionen gelangen kann, noch anwendbar bleiben. Herr Goepel unternimmt in der Abhandlung „Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio“ diese Verallgemeinerung, indem er die Doppelreihe

$$\sum\sum e^{a i^2 + b i k + c k^2 + d i + e k}$$

betrachtet, in welcher beiden Indizes i und k die Werte aller ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu geben sind. Wie dort der Koeffizient von i^2 den Modul, der Koeffizient von i die Amplitude gab, so haben wir hier drei Koeffizienten der Terme der 2. Dimension, zwei Koeffizienten der Terme der 1. Dimension der Indizes i und k, und in der Tat hat die 1. Gattung der Abelschen Integrale drei Moduln, und in der von mir aufgestellten Theorie wurden zwei Argumente als notwendig verlangt. Die vierfache Simultanperiodizität ergab sich auf den ersten Blick, die Multiplikation zweier Reihen dieser Art ergab ebenfalls ganz auf ähnliche Art, wie bei den Funktionen Θ, ein

lineares Aggregat von Produkten zweier ähnlichen Reihen, und so mochte allerdings Goepel sogleich im ersten Augenblick bereits vor 7 bis 8 Jahren die Überzeugung erlangt haben, daß die analoge Transzendente und die wahre Grundlage der Theorie der hyperelliptischen Funktionen gefunden war, wenn er vielleicht auch erst später die Schwierigkeiten, welche sich noch bis zum wirklichen Herabsteigen zu den von mir aufgestellten Differentialgleichungen zeigten, überwunden hat, wie es in der genannten Abhandlung geschehen ist. Goepel kombiniert die beiden Methoden der Multiplikation zweier Transzendenten und derjenigen, welche bloß aus ihrer periodischen Natur die Form der Resultate ableitet. Er wäre etwas kürzer zum Ziele gelangt, wenn er ähnlich, wie es am angeführten Orte des 3. Bandes des mathematischen Journals für die elliptischen Funktionen geschehen ist, zwei Reihen mit ganz beliebigen d und e, aber denselben a, b, c multipliziert hätte. Aber es kam zunächst darauf an, auf irgendeinem Wege die Gewißheit der Richtigkeit der gewagten Divination zu erlangen. Jedenfalls aber war man sicher, zu merkwürdigen Resultaten zu gelangen, und eine Transzendente zu untersuchen, welche die merkwürdigsten Eigenschaften besaß.

Die Verallgemeinerung der Funktion Θ ist eine zu natürliche, als daß es zu verwundern ist, daß dieselbe auch von einer andern Seite her gemacht worden ist. In der Tat sind mir die von Goepel gefundenen Resultate und in größerer Vollständigkeit und Allgemeinheit bereits seit fast drei Jahren durch die Arbeiten eines meiner Schüler bekannt geworden, welche seit dem Oktober v. J. einer berühmten Akademie zur Beurteilung vorliegen, und deren Veröffentlichung nur durch das Gesetz der Akademie einen Aufenthalt erfährt, nach welchem die Gelehrten maskiert konkurrieren müssen. Es wird hierdurch die frühere Arbeit später zu erscheinen genötigt, was ein Übelstand ist, wenngleich die Prioritätsrechte durch die akademische Autorität

gerettet werden. In diesen beiden gänzlich voneinander unabhängigen Untersuchungen wird derselbe Gegenstand auf zwei verschiedene Arten behandelt, indem mein verehrter Schüler und Freund sich derselben Methode der Multiplikation von vier Transzendenten mit beliebigen Argumenten bedient hat, auf welche ich in meinen Vorlesungen die Theorie der elliptischen Funktionen gegründet habe. Diese Verschiedenartigkeit der Behandlung muß den Mathematikern um desto willkommener sein, weil sie geeignet ist, Licht auf einen so neuen und schwierigen Gegenstand zu werfen.

Herr Goepel bemerkt, daß seine Betrachtungen sich auch auf eine größere Zahl Variabeln ausdehnen lassen. Aber es tritt hier, wie auch mein geehrter Freund gesehen hat, ein schwieriges Paradoxon ein.

Wenn in dem Abelschen Integral die Funktion unter dem Quadratwurzelzeichen auf den $(2m+3)$. oder $(2m+4)$. Grad steigt, so sind nach der von mir aufgestellten Theorie Transzendenten mit $2m+1$ Moduln und $m+1$ Variabeln zu betrachten. Nach der Analogie der elliptischen und der auf sie zunächst folgenden hyperelliptischen Funktionen hängt die Theorie dieser Integrale mit Reihen zusammen, in welchen die Exponenten Funktionen von $m+1$ Indizes vom 2. Grade sind; die Koeffizienten der Terme der 2. Ordnung müßten wieder den Moduln und die der 1. den Variabeln entsprechen. Aber wenn die Zahl der letzteren Koeffizienten $m+1$ wie die der Variabeln ist, so ist die Zahl der ersteren $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$, welche nur für $m=0$ und $m=1$ oder für die elliptischen und die 1. Klasse der hyperelliptischen Funktionen mit der Zahl der Moduln $2m+1$ übereinstimmt, in allen übrigen Fällen aber sie übertrifft.

Die vorstehende Betrachtung, nach welcher im allgemeinen die Reihe $\frac{1}{2}m(m-1)$ Konstanten mehr enthält, als es Moduln gibt, zeigt, daß von der Ausdehnung auf Werte

von m, welche größer als 1 sind, neue merkwürdige Aufschlüsse in dieser Theorie zu erwarten sind."

Noch vor Beginn des Wintersemesters schloß Jacobi am 2. Oktober eine kurze Arbeit ab, betitelt: „Über die partielle Differentialgleichung, welcher die Zähler und Nenner der elliptischen Funktionen Genüge leisten".

Um zu der bekannten partiellen Differentialgleichung für die ϑ-Funktionen zu gelangen, will Jacobi nicht von der Reihenentwicklung für dieselben ausgehen, sondern legt für die Herleitung solcher Differentialgleichungen auch für kompliziertere Transzendenten statt des elliptischen Integrales ein allgemeineres zugrunde, für welches, wenn $Y = \int_0^t t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}dt$, $y = \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1} \cdot (1-rt)^{-\alpha}dt$, $\lambda = \int r^{-\gamma}(1-r)^{\gamma-\alpha-\beta-1}y^{-2}dr$, $v = \frac{Y}{y}$ ist, worin α und β zwischen 0 und 1 liegen, $\gamma > \beta$ ist, die Funktion $V = \frac{1}{2} r^{\gamma}(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma+1}\left(Y\frac{\partial y}{\partial r} - y\frac{\partial Y}{\partial r}\right) = \frac{1}{2}\alpha t^{\beta} \cdot (1-t)^{\gamma-\beta}\int r^{\gamma-1}(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma}(1-rt)^{-\alpha-1}y dr$, von v und λ abhängig betrachtet, der partiellen Differentialgleichung $0 = \frac{\partial V}{\partial \lambda} - 2V\frac{\partial V}{\partial v} + r^{\gamma-1}(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma}t^{2\beta-1}(1-t)^{2\gamma-2\beta-1} \cdot (1-rt)^{-2\alpha+1}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}$ genügt. Für den Fall des elliptischen Integrales ist $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ zu setzen, wonach sich die partielle Differentialgleichung für $l = c\lambda$ in $\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{1}{c}\frac{\partial V^2}{\partial v} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}$ verwandelt. Für $\int V dv = W$, und $\Omega = e^{-W}$ folgt $-c\left(\frac{\partial \Omega}{\partial l}\right) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial v^2}$, worin für $l = -\frac{1}{\pi}\log q$, $c = -\pi$ Ω nur um einen konstanten Faktor von der ϑ-Funktion verschieden ist, und Jacobi folgert daraus, daß man aus der Definition der Funktion Θ durch geschlossene Integralausdrücke auch umgekehrt die Reihenentwicklungen dieser Transzendenten

mittels allgemeiner Methoden, ohne einen der Theorie der elliptischen Funktionen eigentümlichen Satz zu kennen, ableiten kann.

Für den Winter 1847/48 hatte er, da sein Gesundheitszustand bis zur Mitte des Sommers ein recht bedenklicher gewesen, gar keine Vorlesungen angekündigt, zeigte aber beim Beginne des Semesters, da er sich seit einigen Monaten wieder arbeitskräftig fühlte, noch nachträglich eine Vorlesung über analytische Mechanik auf den 25. Oktober an, die er auch vor 17 Zuhörern hielt und von der wir eine sorgfältige Nachschrift von Scheibner besitzen. Nachdem er einige Worte über den Zweck seiner Vorlesung, ähnlich wie sie in der früheren Borchardtschen Nachschrift sich finden, vorausgeschickt, sagt er: „Ich will nun die allgemeinen dynamischen Differentialgleichungen zuerst in irgendeiner Form aufstellen, und dann die mannigfachen Umformungen dieses Systems angeben. Es wird hier zunächst darauf ankommen, daß Sie die Resultate klar fassen, Beweise gibt es eigentlich nicht, sondern man kann diese Sätze nur plausibel machen; in allen Beweisen, welche man hat, wird immer mehr oder weniger vorausgesetzt; denn die Mathematik kann die Art, wie die Beziehungen eines Systems von Punkten Abhängigkeiten veranlassen, sich nicht aus den Fingern saugen, sondern es wird hier wieder eine Konvention in Form eines allgemeinen Prinzips eintreten. Man kann die Forderung stellen, daß die Form dieses Prinzips möglichst einfach und plausibel sei. Ich gebe es zunächst in solcher Form, wie es analytisch am klarsten sich darstellt, später kann die Diskussion über die ganze Bedeutung desselben eröffnet werden, und wie diese Bedeutung diejenige Eigenschaft hat, welche mit Naturgesetzen verbunden zu sein pflegt. Sie werden in allen Lehrbüchern mit Beweisen dieses Prinzips betrogen, und oft ist es schwer, den Punkt zu finden, wo dem rein mathematischen Raisonnement etwas Äußerliches untergeschoben ist."

Die Vorlesung selbst hat nun zuerst einen elementareren Charakter als die von Clebsch edierte; ziemlich ausführlich behandelt er die Beweise von Lagrange für das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten und streut überall allgemeine, sehr interessante Bemerkungen ein: „Lagrange hat in der 2. Ausgabe seiner Mécanique analytique Betrachtungen angestellt, die einen Beweis enthalten sollen. Ich werde die betreffende Stelle diktieren und dazu kritische Bemerkungen machen; wegen der Bedeutung und Autorität des Buches kann man sich verleiten lassen, Dinge für wahr und streng zu halten, die es in der Tat nicht sind. Überhaupt ist die analytische Mechanik ein Buch, vor welchem man in einiger Beziehung warnen muß, es enthält vieles, was mehr divinatorisch ausgesprochen als streng bewiesen ist, so daß man es mit Vorsicht gebrauchen muß, um sich nicht täuschen zu lassen, und zu dem Wahne verführen, man hätte etwas bewiesen, was nicht bewiesen ist. Es sind wenige Punkte, die nicht große Schwierigkeiten darbieten; ich habe Schüler gehabt, die die Mécanique analytique besser verstanden haben als ich; aber es ist manchmal kein gutes Zeichen, wenn man etwas versteht.“ Indem er zeigt, daß der Lagrangesche Beweis sich im glücklichen Falle nur auf das stabile Gleichgewicht beziehen würde, sagt er: „Mein verstorbener Freund Bessel trug immer in seinen Vorlesungen diesen Beweis von Lagrange vor. Bessel meinte, er reiche deshalb hin, weil das ständige Gleichgewicht der einzige Fall sei, der in der Natur vorkommt. Denn da immer unendlich viele kleine Kräfte in der Natur herumschwirren, von denen uns die meisten entgehen, so würde das nicht ständige Gleichgewicht für keine Dauer sich bilden können. Es könnte also scheinen, daß ohne mathematische Fiktion die Betrachtung des ständigen Gleichgewichts ausreiche . . .“

Sehr ausführlich erörtert Jacobi in dieser Vorlesung den Fall der Bedingungsungleichheiten und entwickelt die

bekannte Zeichenbestimmung der Multiplikatoren; bevor er zur Dynamik übergeht, beschäftigt er sich mit der Theorie der linearen Gleichungen und der Determinanten, und nun entwickelt er die dynamischen Prinzipien ähnlich wie früher, nur daß er bei der Anwendung derselben auf das Weltsystem interessante kritische Bemerkungen über die inzwischen von den Astronomen erhaltenen Resultate über die Bewegung der Fixsterne und die Existenz der Zentralsonne hinzufügt, und bei der Besprechung des Prinzips der kleinsten Wirkung ausführlicher als früher auf die Betätigung Maupertuis' bei der Aufstellung desselben eingeht. In der 49. Vorlesung beschließt er mit der Störungstheorie seine Vorträge über Mechanik.

„Ich lese in diesem Semester“, schreibt ihm Richelot, „zum ersten Male Elementar-Mechanik. Als mir Joachimsthal erzählte, daß Sie Mechanik lesen, wäre ich am liebsten zu Ihnen gekommen, um bei Ihnen zu hören. Ihre Vorträge hierüber von 1837 sind mir von unendlichem Nutzen, wie alles, was ich von Ihnen gelernt ... Eisenstein hat behauptet, daß die Auflösung der Gleichungen vom 5. Grade auf die Auflösung der Gleichung $x^5 + x + \lambda = 0$ zurückkommt; ist dies richtig und von ihm? ...“

Während er sich nun im Winter mit der Fertigstellung seiner großen Arbeit über die Rotation beschäftigte, wurde er auf einige Resultate in der Theorie der elliptischen Funktionen geführt, die er in mehreren kleineren Abhandlungen zusammenstellte, von denen die erste vom 10. November 1847 datiert unter dem Titel „Über die Differentialgleichung, welcher die Reihen $1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \cdots$, $2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \cdots$ Genüge leisten“ veröffentlicht wurde. Trotz der Einfachheit der Reihe $y = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots$ gibt es kein Mittel, um aus der Natur derselben zu erkennen, ob sie einer algebraischen Differentialgleichung genügt; Jacobi geht nun zur Herstellung derselben von den beiden Be-

ziehungen $y = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ und $\log\frac{1}{q} = \frac{\pi K'}{K}$ aus, zeigt, daß K' und K derselben Differentialgleichung 2. Ordnung mit der unabhängigen Variabeln $\varkappa$ genügen, und drückt sodann den Differentialquotienten $\frac{d\log q}{d\varkappa}$ durch y und $\varkappa$ aus, wodurch es möglich wird, in der zwischen y und $\varkappa$ stattfindenden Differentialgleichung 2. Ordnung die nach $\varkappa$ genommenen Differentialquotienten von y durch andere nach $\log q$ genommene zu ersetzen. Dadurch gewinnt er eine Gleichung, aus welcher man $\varkappa$ durch y und seine nach $\log q$ genommenen Differentialquotienten bestimmen kann, und durch eine neue Differentiation mittels Elimination von $\varkappa$ eine bloß zwischen y und seinen nach q genommenen Differentialquotienten stattfindende Gleichung 3. Ordnung und 2. Grades, welche die verlangte Differentialgleichung darstellt, die in bezug auf y und seine Differentialquotienten bis auf die 14. Dimension steigt. Bedeutet y eine der obigen drei Reihen, so findet somit, wenn $d\log q$ als das konstante Differential angenommen ist, zwischen y und q die Differentialgleichung 3. Ordnung und 2. Grades statt

$$\{y^2 d^3y - 15y\,dy\,d^2y + 30dy^3\}^2 + 32\{y\,d^2y - 3dy^2\}^3$$

$= y^{10}\{y\,d^2y - 3dy^2\}^2(d\log q)^2$, und er folgert leicht aus der Transformationstheorie, daß, wenn $q = e^{\pi\varrho}$ gesetzt wird, das vollständige Integral jener Differentialgleichung in der Form $y = \frac{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + \cdots}{\sqrt{a' + ib\varrho}}$ dargestellt wird, wenn $r = \frac{a\varrho + ib'}{a' + ib\varrho}$, und a, a', b, b' willkürliche Konstanten bedeuten, für welche $aa' + bb' = 1$ ist. Zum Schlusse wird noch als zur Konvergenz der ϑ notwendig gezeigt, daß, wenn der reelle Teil von ϱ negativ ist, auch für beliebige reelle Werte der willkürlichen Konstanten a, a', b, b' der reelle Teil von r immer negativ sein wird.

Eine zweite in dieser Zeit entstandene Notiz über elliptische Funktionen, welche **Borchardt** aus den hinter-

lassenen Papieren unter dem Titel „Darstellung der elliptischen Funktionen durch Potenzreihen“ publizierte, will die vier Funktionen $\vartheta(x), \vartheta_1(x), \vartheta_2(x), \vartheta_3(x)$ nach Potenzen von x entwickeln, und zwar mittels der Beziehungen, die aus der partiellen Differentialgleichung, welcher diese genügen, hergeleitet werden. Man erhält mit Benutzung bekannter Relationen der elliptischen Funktionen untereinander und des Moduls zu den Perioden, für $\vartheta_3(x)$, wenn man A, B, a, b durch $A = \frac{2K}{\pi}$, $B = \frac{2E}{\pi} - \varkappa'^2 \frac{2K}{\pi}$, $a = 4(1 - 2\varkappa^2)$, $b = 2\varkappa^2\varkappa'^2$ definiert — und ähnlich für $\vartheta_2(x)$ und $\vartheta(x)$ bei anderer Definition von A, B, a, b — die Entwicklung $\sqrt{A}e^{-\frac{1}{2}ABx^2}\left(1 + r_2\frac{A^4x^4}{\Pi 4} - r_3\frac{A^6x^6}{\Pi 6} + r_4\frac{A^8x^8}{\Pi 8} - \cdots\right)$, worin r_i rationale ganze Funktionen von a und b sind, und zwar, wenn man der Größe a eine, der Größe b zwei Dimensionen beilegt, homogene Funktionen der i^{ten} Dimension. Ähnlich ergibt sich die Entwicklung von $\vartheta_1(x)$.

Endlich stellte er im Laufe des Winters noch eine große und wichtige Arbeit fertig, die er unter dem Titel „Über unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiedenen quadratischen Formen enthalten sind“ im Crelleschen Journal veröffentlichte, und welche wesentlich neue Anwendungen der Analysis der elliptischen Funktionen auf die Arithmetik zum Gegenstande hat, und zwar auf die Simultanformen des 2. Grades, in denen gewisse Zahlenklassen immer enthalten sind. Die von Gauss und Dirichlet hergeleiteten Theoreme, daß z. B., wenn eine Primzahl p von der Form $8i + 1$ durch die beiden quadratischen Formen $(4m + 1)^2 + 16n^2$ und $(4m' + 1)^2 + 8n'^2$ dargestellt wird, die beiden Zahlen $m + n$ und n' immer gleichzeitig gerade oder ungerade sind, ließen sich nach Jacobi aus den Reihenentwicklungen der Theorie der elliptischen Funktionen herleiten, und um nun die allgemeinen hierher gehörigen Sätze zu erforschen, geht er von der

Fundamentalformel in der Theorie der elliptischen Transzendenten aus: $(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-qz)(1-q^3z)\ldots(1-qz^{-1})(1-q^3z^{-1})\cdots = 1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+\cdots$; aus dieser für jeden Wert von z und für q, deren Modul <1, gültigen Beziehung werden nun, indem man q^m für q, wenn m eine beliebige positive Größe, und gleichzeitig $+q^{\pm n}$ oder $-q^{\pm n}$ für z setzt, die Formeln abgeleitet:

$$\Pi(1-q^{2mi+m-n})(1-q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+m})=\Sigma(-1)^i q^{mi^2+ni}$$
$$\Pi(1+q^{2mi+m-n})(1+q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})=\Sigma q^{mi^2+ni},$$

worin i unter dem Zeichen Π die Werte $0, 1, 2, \ldots\infty$, unter dem Zeichen Σ die Werte $0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm\infty$ annimmt.

Wenn nun von den unendlichen Produkten, welche für spezielle Werte von m und n hervorgehen, irgendwelche zwei miteinander multipliziert werden, so erhält man ein neues unendliches Produkt, in dessen Reihenentwicklung nur solche Glieder vorkommen, deren Exponenten in einer bestimmten quadratischen Form zweier Variabeln enthalten sind; so oft daher ein solches unendliches Produkt noch durch die Multiplikation zweier anderer in jenen Ausdrücken enthaltener unendlicher Produkte entstehen kann, werden durch die Entwicklung desselben Reihen erhalten, in denen die Exponenten der Glieder in zwei bestimmten quadratischen Funktionen zugleich vorkommen. Zufolge ihrer Entstehungsart können diese Reihen durch zwei verschiedene Doppelsummen ausgedrückt und daher nach zwei verschiedenen Gesetzen gebildet werden. Nach dem einen erhalten die Exponenten der einzelnen Glieder eine andere quadratische Form als nach dem andern; wenn man aber in jeder Doppelsumme alle Glieder, in deren Exponenten die quadratische Form denselben Wert erhält, zusammenfaßt, müssen beide Bildungsgesetze zu demselben Resultate führen, und daher sowohl nach dem einen als nach dem andern die

Koeffizienten aller Glieder, in welchen die Exponenten nicht zugleich in den beiden quadratischen Formen enthalten sind, verschwinden. Wenn man hingegen die Koeffizienten der Glieder, deren Exponenten in den beiden quadratischen Formen enthalten sind, wie sie aus den beiden verschiedenen Bildungsweisen hervorgehen, miteinander vergleicht, erhält man jedesmal einen ähnlichen arithmetischen Satz wie für die beiden Zerfällungen der Primzahlen von der Form $8i+1$, wonach bei der Darstellung einer Primzahl von der Form $8i+1$ durch die beiden quadratischen Formen a^2+2b^2 und c^2+d^2, wo d die Wurzel des geraden Quadrates sein mag, immer gleichzeitig a die Form $8i\pm 1$ und d die Form $8i$, oder a die Form $8i\pm 3$ und d die Form $8i+4$ hat. Aber man erhält, wie Jacobi hervorhebt, durch arithmetische Herleitung und durch eine solche aus der Theorie der elliptischen Funktionen die Sätze in wesentlich verschiedener Fassung und nach der letzteren Methode von allgemeinerem Charakter. Schon früher hatte er gezeigt, daß der Satz, wonach für jede Zahl P, die nur Primzahlen von der Form $4i+1$ zu Teilern hat, die Gleichung $x^2+y^2=P$ so viel Lösungen in ganzen positiven oder negativen Werten von x und y zuläßt, als die vierfache Anzahl der ungeraden Faktoren von P beträgt, sich aus der Theorie der elliptischen Funktionen in der allgemeineren Fassung ergibt, daß für jede beliebige Zahl P die Gleichung $x^2+y^2=P$ so viel Lösungen in ganzen positiven oder negativen Werten von x und y gestattet, als der vierfache Überschuß der Anzahl der Faktoren der Zahl P von der Form $4i+1$ über die Anzahl ihrer Faktoren von der Form $4i+3$ beträgt, und so wird auch der oben angeführte Gauss-Dirichletsche Satz durch die Theorie der elliptischen Funktionen in der allgemeineren Fassung gefunden, daß für jede beliebige Zahl P der Überschuß der Anzahl der Lösungen der Gleichung $P=(4m+1)^2+16n^2$, in welchen $m+n$ gerade, über die Anzahl der

Lösungen, in welchen $m+n$ ungerade ist, ebensoviel beträgt als der Überschuß der Anzahl der Lösungen der Gleichung $P=(4m'+1)^2+8n'^2$, in welchen n' gerade, über die Anzahl der Lösungen, in welchen n' ungerade ist, so daß die nur für eine besondere Klasse von Zahlen geltenden Sätze durch andere ersetzt werden, welche auf alle Zahlen Anwendung finden. Bemerkenswert ist, daß bei mehreren der hier behandelten Reihenentwicklungen aus der Theorie der elliptischen Transzendenten die Vorzeichen der Glieder durch Größen ausgedrückt werden können, welche von den biquadratischen Charakteren der Zahlen abhängen.

Aus den Ausdrücken für $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\varkappa'}$ durch q, sowie aus den Transformationsformeln und den zugehörigen Modulargleichungen werden die mannigfachsten Beziehungen zum Zwecke der oben erwähnten Folgerungen aufgestellt; dem bekannten Satze für dreieckige Zahlen analog wird gefunden, daß, wenn man von den fünfeckigen Zahlen $\frac{1}{2}i(3i-1)$, welche durch 5 dividiert, 1 übrig lassen, die Einheit abzieht, der Rest nicht bloß durch 5, sondern auch durch 25 aufgeht, und daß man nach Division mit 25 wieder fünfeckige Zahlen erhält, und ähnliche Sätze für m-eckige Zahlen, wenn die i^{te} m-eckige Zahl durch $M=\frac{i}{2}\Big[(m-2)(i-1)+2\Big]$ definiert ist. Die Arbeit ist noch überaus reich an Einzelresultaten, die alle aus den in den Fundamenten begründeten Formeln hergeleitet sind.

Als nach dem plötzlichen Tode Galois' am 30. Mai 1832 dessen berühmte, ein Jahr zuvor geschriebene Arbeit „Mémoire sur les conditions de resolubilité des équations par radicaux" im Jahre 1846 im Liouvilleschen Journal veröffentlicht wurde, wandte sich Jacobi an dessen Bruder Alfred, um zu erfahren, ob in den nachgelassenen Papieren sich etwa Aufzeichnungen zur Theorie der Transzendenten vorfänden, und erhielt am 17. November 1847 die Antwort: „. . . Ainsi on n'a rien retrouvé concernant les fonctions

elliptiques et abéliennes; on voit seulement, qu'il s'était livré la plume à la main à une étude approfondi des vos ouvrages . . . quant à la théorie des équations monsieur Liouville et les autres géomètres, que j'ai consultés, m'affirment que son mémoire contient les bases d'une doctrine très féconde et une application importante de cette doctrine. 'Ce travail', me disaient ils, 'assure pour toujours une place à votre frère dans l'histoire des mathématiques.' Malheureusement étranger à ces matières, j'écoute avec plaisir de belles paroles: si votre precieuse suffrage qu' Evariste aurait ambitionné par dessus tout venait les confirmer, ce serait pour ma mère et pour moi une bien grande consolation, il deviendrait pour notre Evariste un gage d'immortalité et je croirais enfin, que mon frère n'est pas entré tout entier dans la tombe."

Noch im November dieses Jahres fand zwischen Jacobi und Hansen ein interessanter Briefwechsel in bezug auf Dase statt, der damals großes Aufsehen erregte und die Veranlassung gab zu bedeutungsvollen und charakteristischen Meinungsäußerungen von Gauss und Jacobi.

Am 1. Januar 1847 hatte Schumacher von neuem Gauss auf Dase aufmerksam gemacht, und daran anknüpfend schrieb er ihm am 7. April 1847: „Das sonderbare Rechengenie, der junge Dase, wünscht Ihnen, mein theuerster Freund, seine Aufwartung in Göttingen zu machen, damit er ein so wichtiges Zeugniß, als das Ihrige, über seine Leistungen erhalten kann . . . Er ist wirklich eine psychologische Merkwürdigkeit, die Sie, eben der Seltenheit wegen, interessiren wird, und die man gesehen haben muß, um an ihre Möglichkeit zu glauben. Er ist so bornirt, daß man mit ihm eine starke Brandmauer einlaufen könnte, kann nicht die ersten Elemente der Mathematik begreifen — wie denn der gute Petersen vor seiner i. e. Dase's Reise sich 6 Wochen umsonst gequält hat, ihm nur die ersten Anfangsgründe beizubringen — aber die Fertigkeit im nume-

rischen Rechnen setzt jetzt in Erstaunen. Ich sage jetzt, denn vor seiner Reise, etwa vor 4 oder 5 Jahren, wollte er mir ein specimen seiner Kunst geben, das aber nicht besonders ausfiel, was er auf heftige Kopfschmerzen, vielleicht mit Recht, schob. Er multiplicirt im Kopfe 2 Zahlen, jede von 20 Ziffern in 6 Minuten, jede von 40 Ziffern in 40 Minuten, jede von 100 Ziffern in $8^3/_4$ Stunden. Quadratwurzeln mit 60 Decimalstellen zieht er in unglaublich kurzer Zeit aus.“

Gauss wünschte nun nicht, daß Dase ihn besuche, da er in Göttingen nicht auf seine Kosten kommen würde; er schreibt am 10. April an Schumacher: „Was durch Briefe oder öffentliche Blätter zu meiner Kenntniß gekommen ist, enthält eigentlich noch gar kein Zeugniß für eine ganz außerordentliche Rechnensfähigkeit. Man muß hier zwei Dinge unterscheiden, ein bedeutendes Zahlengedächtniß und eigentliche Rechnungsfertigkeit. Dies sind eigentlich zwei ganz von einander unabhängige Eigenschaften, die verbunden sein können, aber es nicht immer sind. Es kann einer ein sehr starkes Zahlengedächtniß haben, ohne gut rechnen zu können, umgekehrt kann jemand eine superiore Rechnungsfähigkeit haben, ohne ein ungewöhnlich starkes Zahlengedächtniß. Das letztere besitzt Herr Dase ohne Zweifel im eminenten Grade; ich gestehe aber, daß ich darauf sehr wenig Werth legen kann. Rechnensfertigkeit kann nur danach taxirt werden, ob jemand auf dem Papier ebensoviel oder mehr leistet als andere. Ob dies bei Herrn Dase der Fall ist, weiß ich nicht; nur wenn er, um 2 Zahlen, jede von 100 Ziffern mit einander im Kopfe zu multipliciren, $8^3/_4$ Stunden bedarf, so ist dies doch am Ende eine thörichte Zeitverschwendung, da ein einigermaßen geübter Rechner dasselbe auf dem Papier in viel kürzerer, in weniger als der halben Zeit würde leisten können. Als Beweis eines stupenden Zahlengedächtnisses — aber hat man denn die Richtigkeit dieser Rechnung controllirt? — ist allerdings

jene Leistung etwas außerordentliches, aber psychologisch recht interessant würde es erst dadurch werden können, wenn man sich ein ganz adäquates Bild von dem, was dabei in seinem Geiste vorgeht, machen könnte. Schwerlich wird Herr Dase die uns dazu nöthige Erklärung geben können, worüber ich aber weit entfernt sein würde, ihm einen Vorwurf zu machen. Denn in der That, ich habe bei mir selbst manche Erfahrungen gemacht, die mir selbst räthselhaft bleiben. Eine davon ist folgende: Ich fange zuweilen, indem ich zu Fuß einen gewissen Weg mache, an, in Gedanken die Schritte zu zählen (beiläufig immer taktmäßig zu gehen, so: 1111111111 . . . 22222 etc.), so zähle ich fort bis 100 und fange dann wieder von 1 an. Aber alles dies thue ich, wenn es einmal eingeleitet ist, unbewußt von selbst, ich denke an ganz andere Dinge, beachte allerlei mir auffallendes mit Aufmerksamkeit — nur sprechen darf ich nicht dazwischen — und nach einiger Zeit werde ich erst wieder gewahr, daß ich noch immer im Tact fortzähle, und immer richtig, natürlich aber ohne zu wissen, ob oder wie oft ich durch hundert gegangen bin. Aehnliches gilt beim Secundenzählen, auch hier kann ich an ganz andere Dinge denken, beobachten, schreiben, auf- und abgehen — nur nicht sprechen! Übrigens hat, wenn ich nicht irre, diese Fähigkeit Lalande von jedem praktischen Astronomen verlangt, auch ohne das Sprechen auszuschließen. So, kann, wie gesagt, ich es nicht. Ich weiß auch Niemand, der es kann. Hier erwähne ich der Sache nur, weil das Zählen bei mir durchaus unbewußt sein kann.“

Schumacher erwidert Gauss am 12. April 1847: „. . . Übrigens hat Dase auch eine außerordentliche Rechnungsfertigkeit, wenn er auf dem Papier rechnet. Er hat, wie Encke mir schrieb, die Rechnungen zur Ausgleichung der Preußischen Dreiecke in unbegreiflich kurzer Zeit vollführt und die hyperbolischen Logarithmen bis über 100000

berechnet . . .", worauf ihm Gauss am 16. April entgegnet: „Dase hätte sich ja in Berlin von Jacobi Beschäftigung geben lassen können, da dieser ja früher, wenn ich mich recht erinnere, Clausen als Rechenknecht engagiren wollte und nachher, wenn ich nicht irre, den Pastor Lehmann zugeordnet erhalten hat, um Planetenstörungen zu berechnen, mit Königlicher Bezahlung."

So endete auch hier wieder, wie schon öfter, der Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher mit gereizten Bemerkungen von der einen oder der anderen Seite über Jacobi, dessen Charakter auch Gauss so wenig zu verstehen vermochte.

In ganz anderer Weise interessierte sich Jacobi für Dase; er schrieb an Hansen, welcher diesem ein sehr günstiges Zeugnis ausgestellt, am 23. November 1847:

„Es ist jetzt im Werke, den Dase hier etatsmäßig zu fixiren und soll ich einen umständlichen Bericht über Dase an den Unterrichtsminister machen, welchen derselbe seinem Vortrage beim Könige zum Grunde legen will. Ich erlaube mir daher Sie zu fragen, was das für Tafeln sind, welche Sie meinen, und ob Sie vielleicht geneigt wären, erforderlichen Falls die zur Berechnung der astronomischen Tafeln nöthigen besten Elemente anzugeben. Was die bei Dase nöthige mündliche Instruction und Einübung betrifft, würde ich dann gern, soweit ich kann, übernehmen . . . Als ersten Versuch, ob Dase zu wissenschaftlichen Arbeiten zu brauchen ist, habe ich ihn zur Auflösung linearer Gleichungen anzuleiten gesucht. Da er auch nur mit plus und minus gerechnet hatte, so kostete es eine vierwöchentliche Mühe, ihm die Sache beizubringen. Hernach aber zeigte sich diese Mühe sehr lohnend; denn er löste mit großer Schnelligkeit 47 Gleichungen auf, in denen freilich immer nur höchstens 12 Unbekannte vorkamen. Es waren dies die Preußische Gradmessung betreffende Gleichungen, welche mir Obristlieutenant Bayer mitgetheilt hatte, und die Auflösungen

besaßen eine absolute Genauigkeit. Später hat Bayer ihn die vollständigen Gleichungen, welche die ganze Messung von Lübeck bis zur Weichsel betreffen, aufzulösen gegeben. Es waren 83 Gleichungen, die in der Regel über 30 Unbekannte enthielten. Er hat dazu 4 Monate anhaltende Arbeit gebraucht, vorzüglich aber wegen der vielfachen Kontrollen, weil bei so vielen Unbekannten leicht eine Kontrolle zufällig stimmen kann. Weil er nicht mit Logarithmen rechnet, so hatte ich für ihn ein besonderes Schema entworfen. Es hat vorzüglich hierbei das Raumersparniß bewirkt, daß ich jede Gleichung nur von der Diagonale an schreiben ließ, aber von Anfang der Zeile an, indem die Unbekannten durch überschriebene römische Zahlen, um Mißverständnisse zu verhüten, bezeichnet wurden. Die Gleichungen wurden besonders geschrieben und unter jede die aus ihr durch Elimination abgeleiteten, bis zu der, welche selbst zur Elimination benutzt wurde ... Ganz außerordentlichen Nutzen hat von Dase Prof. Dove für seine meteorologischen Arbeiten gezogen, indem er mit seiner Hülfe Arbeiten in zwei Monaten gemacht hat, wozu er sonst mehrere Jahre gebraucht hätte. Er hat ihn auch zur Anschließung der Bb. der mittleren Temperatur an eine periodische Formel gebrauchen können ... Zu Tafeln natürlicher Logarithmen, die Dase von vielen Seiten angerathen worden, findet sich kein Verleger; auch hat man in der That nicht das Bedürfniß empfunden, die alten wieder aufzulegen; Primzahl- oder vielmehr Factorentafeln für die 4., 5., 6. Millionen liegen hier ungedruckt; ein Herr K. hat sich sogar mir erboten, sie bis 25 Millionen auszurechnen, ohne Entschädigung, wenn sie nur gedruckt würden. Ich selbst habe Dase abzählen lassen, wie oft 2 Primzahlen nur die Differenz 2 oder 4 haben, was einmal Gauss wünschte; auch die kleinste Anzahl Cuben, aus welchen jede Zahl bis 12000 zusammengesetzt werden kann. Bei letzteren hat sich der merkwürdige Umstand gezeigt, daß nur 2 Zahlen, 23 und

239, 9 Cuben erfordern, nur im 1. Tausend noch Zahlen vorkommen, bei denen man 8 braucht und vom 4. Tausend an nur eine Zahl sich findet, die aus nicht weniger als 7 Cuben zusammengesetzt wird; die Zahlen, die 6 Cuben erfordern, werden immer dünner, so daß es scheint, daß von einer hohen Gränze an, alle Zahlen die Summe von 5 oder weniger Cuben sind.“

Erst im Januar 1848 kommt Jacobi in dem Briefwechsel mit Hansen wieder auf Dase zurück:

„Dirichlet, Encke und ich sollten dem Minister einen Bericht über Dase machen; leider aber hat Encke ein Separatvotum gemacht, worin er sich gegen Dases Anstellung unter dem Vorwand erklärt, daß sich keine Arbeit für ihn finden würde. Er hat eine eigne Antipathie gegen ihn, die der Empfindung des Arbeiters gegen eine Dampfmaschine gleicht, die ihm zum Bewußtsein bringt, daß seine Thätigkeit auch nur eine mechanische war. Indessen glaube ich doch, daß hinlängliches für Dase geschehen wird, um ihn zu veranlassen, sich hier zu fixiren ... Bei den von Ihnen vorgeschlagenen Tafeln dürfte bei weitem die Hauptschwierigkeit sein, einen Verleger zu finden oder die Kosten des Druckes zu bestreiten. Können Sie hierfür Rath wissen, so glaube ich, würden die Berechnung und die Kosten dafür ohne Schwierigkeit beschafft werden können ... Ganz vorzüglich würde ich mich aber dafür interessiren, Dase für Ihre Mondörter und Ephemeriden zuzurichten. Wenn Sie Tafeln anlegen wollen, um die von einem Winkel abhängenden Coefficienten einer nach den cosinus und sinus eines anderen Winkels fortschreitenden Reihe zu geben, was, wie mir scheint, eine Vorarbeit für Ephemeriden aller Zeiten gäbe, so würde er sich gewiß zu deren Berechnung auch qualificiren. Ferner zur Berechnung der Coefficienten durch doppelte Quadraturen. Es brauchten nur die natürlichen cosinus und sinus der beiden excentrischen Anomalieen gegeben zu werden. Man muß freilich die Formeln zur

Berechnung der Entfernung zweier Planeten besonders für ihn zustutzen; ich habe mir aber das schon überlegt. Auch zu Entwicklungscoefficienten von $(1-2a\cos\varphi+a^2)^{-n}$ durch einen von hinten zu berechnenden Kettenbruch. Wenn Sie mir in Mondssachen das, was Sie gerechnet wissen wollen, genau specificiren wollten, so wäre jetzt eine günstige Zeit sogleich anzufangen, da er grade jetzt eine andere Arbeit fertig hat. Sie haben nur von allen zum Grunde gelegten Winkeln die natürlichen cosinus und sinus anzugeben, und alle Constanten selbst, nicht ihre Logarithmen. Ganz vorzüglich scheint mir Dase brauchbar, wenn man einige Rechnungen mit mehr als 7 Stellen führen will, weil das ihm verhältnißmäßig viel weniger Mühe macht als wenn man 10stellige Tafeln statt 7stelliger braucht ... Für die elliptischen Functionen und gewiß auch in andern Fällen kann man eine Tafel sehr gut brauchen, welche das Verhältniß des arithmetischen und geometrischen Mittels zweier Zahlen gäbe ... Ich komme jetzt zu einer ganz andern Sache, welche mir sehr am Herzen liegt. Die Königsberger Sternwarte hat das doppelte Unglück gehabt, Bessel zu verlieren, und daß Sie sie abgelehnt haben. Es war indessen Hoffnung vorhanden, daß die dort mit den großen Instrumenten ausgeführten Beobachtungen und Messungen noch eine lange Reihe von Jahren zum nicht geringen Nutzen der Astronomie so würden fortgeführt werden können, wie es Bessel eingerichtet hatte ... Encke will seinen jetzigen Gehülfen Galle als Director anbringen, ohne für Busch sich auch nur im Geringsten zu verwenden, um ihm eine Anerkennung oder höhere Stellung dort zu verschaffen. Ich habe die Vorstellung, daß die Berliner Sternwarte, was die Schärfe der Bb. betrifft, eine Sternwarte zweiten Ranges ist; ein berühmter Beobachter hat geäußert, daß die Berliner Sternwarte sich glücklich schätze, mittelmäßige Beobachtungen zu machen. Encke's fortwährende Rede ist, das Unglück für die Astronomie wären die großen Instrumente;

sein Bestreben geht durchweg dahin, alles, was damit von andern geleistet ist, zu verkleinern. Ich habe nun noch nie gesehen, daß einer die Bedeutung dessen, worin er sich auszeichnet, herabsetzt, sondern man pflegt nur das, was man nicht versteht, als von geringerer Wichtigkeit nachweisen zu wollen ... Galle hat sich durch Dinge ganz anderer Art ausgezeichnet; er hat in das Cometenentdecken neuen Schwung gebracht und zuerst den Leverrier'schen Stern gesehen, nicht daß er ihn aus eignem Antriebe gesucht hätte, sondern von Leverrier aufgefordert und angewiesen ... Da ich dort so lange in der Nähe der Sternwarte gelebt und ein Attachement an sie gewonnen habe, thut mir dies schmerzlich leid ... Obgleich es fast zu spät und unmöglich schien, noch etwas zu ändern, habe ich doch das meinige thun wollen, und mich sehr stark gegen den Minister und den König selbst darüber ausgesprochen, und mußte bei dem Dringenden der Sache dieses leider thun, ohne von Freunden, die competente Richter sind, mich zuvor belehren lassen zu können. Jetzt aber ist es ein doppeltes Bedürfniß für mich zu erfahren, ob die Vorstellungen, die ich mir als Laie über diese Dinge gebildet und die ich Ihnen im Obigen auseinanderzusetzen versucht habe, richtig sind, oder es nicht sind, und daher ergeht meine inständige Bitte an Sie, mich darüber aufzuklären. Ich bitte Sie dabei die Gewalt der Abstraction zu brauchen, daß Sie garnicht daran denken, was Sie aus dieser Sternwarte würden haben machen können; es kann von zwei Größen eine ein sehr großes Vielfaches der andern sein, wenn sie auch beide gegen eine dritte gänzlich vernachlässigt werden können ... Daß Ihre letzten Mißverhältnisse mit Bessel auf Ihr Urtheil keinen Einfluß haben werden, darf ich wohl annehmen ..."

In der Angelegenheit des von Bessel stets ausgezeichneten Schülers und Assistenten der Sternwarte Busch wendet sich Jacobi auch am 15. Januar 1848 an Gauss:

„Sie werden sich wundern, daß ich Ihnen in einer Angelegenheit der praktischen Astronomie schreibe. Aber was ich hier um mich vorgehen sehe, scheint mir der Art, daß selbst das steinerne Herz eines Mathematikers darüber schreien muß ... Es handelt sich darum, daß Encke seinen Gehülfen Galle Busch als Director vorsetzen will ... Als ich Encke vorstellte, daß Busch bei solcher Kränkung nach 17jähriger Arbeit an der Sternwarte gezwungen werden würde, ein anderes Unterkommen zu suchen, sagte er mit unglaublicher Kälte 'laß ihn gehen', und manifestirte dadurch, daß es ihm garnicht unangenehm sein würde, einen so störenden Vergleichungspunkt wie die Königsberger Sternwarte darbietet, los zu werden, wie es denn überhaupt sein Geschäft ist, da er sich selbst nicht erheben kann, jedes Große in den Staub zu ziehen ...“

Auch Leverrier hatte er in dieser Angelegenheit um seine Meinung gefragt, und dieser am 24. Januar 1848 in einem ausführlichen Briefe die verschiedenen Verdienste von Galle und Busch abgewogen, zugleich aber auch einige allgemein interessante Bemerkungen hinzugefügt:

„J'ai reçu avec un grand bonheur la lettre, que vous avez bien voulu m'adresser sur l'observatoire de Königsberg. Habitué que je suis à ne pas compter dans vos mémoires les grands évenements qui nous imposent la douce obligation de vous admirer, j'ai lu avec respect ces pages de notre grand géomètre, pages que je destine à mes archives de famille. Ce n'est pas non plus sans émotion que je puis jouir ces détails empruntés à l'intimité de l'illustre Bessel et dans lesquels respirent à la fois et votre entier dévouement à la science et les sentiments de l'amitié. Que ne puis-je vous donner un avis sur la haute question, que vous soulevez? Mais je ne suis que astronome calculateur; et en pareille matière on tiendrait sans doute peu de compte de mon opinion. Je suis loin de dire qu'on aurait tort; Struve, Encke, Airy sont nos maitres et je dois m'en rap-

porter à leur témoignage ... La science ne s'inquiète en aucune façon, que les observations, qui lui serviront de base, soient anglaises, prussiennes, russes ou françaises. Il n'y a que leur exactitude, qui lui importe. Et je ne croix pas me tromper en prédisant que dans un avenir éloigné, lorsque les intérêts particuliers auront disparu, il ne survivra réellement que le mémoire d'un établissement représentant à chaque époque le degré d'avancement de la science d'observation. Ce sera l'observatoire de Maskeline à la fin de dernier siècle, celui de Bradley en 1760, celui de Bessel vers 1820, celui de ... permettez de ne pas poursuivre cette énumeration ..."

Noch Ende Januar traf die gutachtliche Äußerung Hansens ein, dem Jacobi am 27. Februar antwortet:

„Ich kann Ihnen nicht sagen, welch' eine Wohlthat Sie mir durch Ihren Brief erwiesen haben; auch hat er einen sehr großen Erfolg gehabt ... Mit Encke habe ich mich lange bemüht, ein freundschaftliches Verhältniß zu unterhalten, was mir auch wegen der litterarischen Verbindungen, die er als Director einer Sternwarte und Secretär einer Akademie haben muß, bequem ist. Aber er hat einen wenig angenehmen Charakter, dem rein menschliches interesseloses Wohlwollen fremd zu sein scheint; man kann es sich kaum denken, daß er etwas aus edlen Motiven thut. Ich weiß nicht, ob er früher so war, denn es ist wohl möglich, daß durch das unangenehme Gefühl, seine Stellung nicht so ausfüllen zu können, wie er es wohl möchte, sein Charakter verdorben worden ist ..."

Jacobis Gesundheitszustand war seit dem Sommer wieder ein besserer geworden, nicht bloß die alte Arbeitslust und Arbeitskraft waren wiedergekehrt, er hatte auch wieder Freude an all den Beweisen der Hochschätzung und Bewunderung seiner unvergleichlichen Leistungen, nahm mit Befriedigung seine Wahl zum auswärtigen korrespondierenden Mitglied der Madrider Akademie und zum Mitgliede

der Wiener Akademie auf, welche letztere sehr bald für die Gestaltung seines weiteren Lebens von so großer Bedeutung werden sollte, und war hocherfreut durch die seinen mächtigen wissenschaftlichen Einfluß betonenden Worte, welche ihm ein Brief von Fuss aus Petersburg vom 9/21. Januar brachte: „Mit meinen besten Wünschen zum neuen Jahr schicke ich Ihnen heute p. Post den eben fertig gewordenen ersten Band der Opera arithmetica; Titelblatt und Vorrede fehlen, weil ich diesen Band noch nicht zu emittiren gesonnen bin. Sie aber haben ein Recht darauf, ihn früher als andere zu besitzen und werden mir Ihre etwaigen Bemerkungen darüber nicht vorenthalten ... Sie erinnern sich, daß, als die Aussicht auf eine Unterstützung vom Staate zu einer Gesammt-Ausgabe von Euler's Schriften zwar der Akademie nicht benommen, aber doch in's Unbestimmte hinausgeschoben war, und man geduldig abwarten zu wollen schien, ein Brief von Ihnen den Ausschlag gab, und die Akademie veranlaßte, aus eignen Mitteln wenigstens zu beginnen ...“

Sogleich machte er sich an die Durchblätterung der 100 Abhandlungen von Euler, welche der erste Band enthielt und „durch welche Euler die heutige höhere Zahlenlehre geschaffen hat“, und aus dem Anfang des Jahres 1848 stammt offenbar auch die kurze Aufzeichnung, die er bei der Lektüre einer dieser Arbeiten gemacht und die Kortum aus seinem Nachlasse unter dem Titel „Bemerkungen zu einer Abhandlung Eulers über die orthogonale Substitution“ veröffentlicht hat, in welcher er zeigt, daß die von Euler in seiner Abhandlung „Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile“ durch sukzessive Transformationen von immer nur zwei Variabeln gelöste Aufgabe, auf die allgemeinste Weise n lineare Funktionen von n Variabeln anzugeben, deren Quadratsumme der Quadratsumme der Variabeln selbst gleich wird, die später von andern für $n = 3$ und $n = 4$ entwickelten Formeln sämtlich schon als spezielle Fälle in sich schließt.

Noch vor Ende des Jahres 1847 hatte Jacobi am 9. Dezember der Akademie eine Note „Über die Zusammensetzung der Zahlen aus ganzen positiven Kuben; nebst einer Tabelle für die kleinste Kubenanzahl, aus welcher jede Zahl bis 12000 zusammengesetzt werden kann“ vorgelegt, die erst vier Jahre später publiziert wurde, und in welcher er auf eine schon früher veröffentlichte Tabelle zurückkam, durch welche der Satz von Waring, daß jede ganze Zahl die Summe von 9 oder weniger ganzen positiven Kuben ist, bestätigt, und wahrscheinlich gemacht war, daß alle ganzen Zahlen, welche eine gewisse Grenze übersteigen, aus 6 oder weniger ganzen positiven Kuben zusammengesetzt sind. Jacobi hatte jetzt die Rechnung durch Dase ausführen lassen, und es ergab sich als sehr wahrscheinlich, daß alle Zahlen, welche die Zahl 8042 an Größe übertreffen, die Summe von 6 oder weniger Kuben sind; zugleich lieferte er eine praktische Konstruktion zur Anlegung von Tafeln, welche für jede Zahl die kleinste Anzahl der Kuben angeben. In der von Jacobi veröffentlichten Tabelle fanden sich später vielfache Rechenfehler vor, die nach einer genauen Revision berichtigt wurden.

Da traten plötzlich die gewaltigen politischen Umwälzungen im März 1848 ein, und Jacobi, der eine feste Stellung an der Universität nicht innehatte und dem bei gewaltsamen Umgestaltungen der staatlichen Verhältnisse jeden Augenblick ein großer Teil seines Gehaltes entzogen werden konnte, mußte im Interesse seiner zahlreichen Familie bestrebt sein, ein festes Ordinariat an der Universität zu erhalten und vor allem auch eine streng geregelte, verantwortungsvolle und den andern Gelehrten koordinierte Stellung einzunehmen.

„In den jetzigen Zeitverhältnissen“, schreibt er am 18. April an den Minister, „ist es mir Bedürfniß, mich an eine Corporation anzuschließen, und bitte ich daher Ew. Excellenz, mich an der hiesigen Universität zum ordentlichen

Professor zu ernennen, damit ich an dem unter Ihrer Leitung bevorstehenden Reorganisationswerk der Universitäten nach meinen Kräften und meinen Erfahrungen Antheil nehmen kann ... Meine Gehaltsverhältnisse können ganz ungeändert bestehen bleiben ... Ich gebe daher mit dem gegen Sie, Herr Graf, soeben ausgesprochenen Wunsche eine schöne Freiheit und eine Ausnahmestellung auf. Aber ich habe geglaubt, daß der Staat jetzt alle Kräfte braucht, und daß jede Kraft nach allen Richtungen, in denen sie wirken zu können glaubt, sich ihm zur Verfügung stellen muß."

Es war Jacobi wesentlich darum zu tun, bei den politischen Wirren, die auch ihn nicht unberührt lassen konnten, den weiteren Ereignissen sorglos entgegensehen zu können; einige Tage nach dem Zeughaussturme in Berlin schrieb er an seinen Bruder in Petersburg:

„... Um nun auch die nächste Vergangenheit zu berühren, soweit sie mich persönlich betrifft, so bin ich einigemal, wie Du vielleicht auch aus der Spener'schen weißt, als Redner aufgetreten. Die erste Schuld trägt mein Arzt. Obgleich die politischen Aufregungen meiner Gesundheit eher genützt als geschadet haben, so mußte ich doch vielfach noch immer meine abgespannten Nerven, die mir im Winter die Schwäche häufig bis zum Schwindel steigerten, durch Chinin und undere remedia unterstützen. Mein Arzt meinte nun, ich könnte das Chinin durch die Aufregungen ersetzen, die mir das Besuchen des damals von Crelinger geleiteten constitutionellen Clubs verursachen würde, und so ließ ich mich überreden, einige Mal hinzugehen, was auch die beabsichtigte Wirkung hatte. Da kam es einen Freitag vor, daß dort mehrere ihr Glaubensbekenntniß ablegten, um sich als Deputirte zu empfehlen, bei welcher Gelegenheit mich Dove als Comitémitglied im Vorbeigehen aufforderte, auch zu sprechen, und als ich nicht abgeneigt war, dies sogleich von der Tribüne verkündete. So von der Nothwendigkeit gepackt, hielt ich aus dem Stegreif eine Rede,

wie ich sie vielleicht nicht wieder halten werde. Eine dreimal wiederholte Salve endlosen Beifalls ertönte am Schluß; dreimal mußte ich vom Platz aufstehen und wie ein Comödiant mich nach allen Seiten verbeugen. Schelling sagte mir, sein Sohn, der viel die alten griechischen Redner studirt, habe ihm gesagt, daß sie die größten Muster erreichte. Zwölf Buchhändler schrieben mir sogleich wegen des Druckes, aber ich wußte durchaus nicht mehr genau, was ich gesagt, ja nicht einmal den Faden, zumal da wohl keiner darin war. Aber die Sache sollte ein Ende mit Schrecken nehmen. In der nächsten Sitzung (Sonnabend), der ich nicht beiwohnte, da ich nur sehr unregelmäßig hinging, wurde ungestüm der Druck meiner Rede verlangt. Da stürzte Crelinger vor, der eine absolute Gewalt über die Gesellschaft ausübte. 'Meine Herren', rief er, 'was thun Sie, bedenken Sie, was Sie thun. Sie lassen sich von einer Rede hinreißen, die doch nur aus glänzenden Aphorismen, aus Phrasen aus der griechischen und römischen Geschichte bestand. Kennen Sie denn die politischen Antecedenzien dieses Mannes?' Als großer Beifall seinen Worten folgte, sagte er, 'gestern schenkten Sie diesem Redner einen Beifall, der nie enden wollte, heute wieder mir — ich will Ihren Beifall nicht, wenn Sie so inconsequent sind.' Mir war gleich nach meiner Rede etwas bange geworden, und ich hatte das unbestimmte Gefühl, daß eine große Anstrengung dagegen gemacht werden würde. Crelinger stand mit dem Ministerium in Verbindung; er ließ sich zuweilen Anträge von dem constitutionellen Club machen, um für das, was es beabsichtigte, einen Anknüpfungs- und Anhaltspunkt zu haben. Meine Rede war vollkommen unabhängig gewesen. Sie rühmte die Minister als edle und ehrliche Männer, im Finanzfach ausgezeichnet, wünschte aber, daß sie sich durch einen Politiker ergänzten. Bedenklicher war noch ein anderer Punkt, zumal ich wohl in der Hast der Improvisation den Gedanken nicht ganz klar ausgesprochen haben mag. Wie ich ihn

später entwickelte, war er so: Ich wäre zwar für eine constitutionelle Monarchie, lege aber auf die Verfassungen überhaupt nicht den großen Werth. Absolute Monarchieen hätten Großes für die Völker geleistet, aber auch bei dem Namen Republik überliefe mich keine Gänsehaut; es käme immer am meisten auf den patriotischen Sinn des Volkes an. Diese Gänsehaut — das pommersche Bild, wie Prutz sagte — ist so famos geworden, wie früher meine wirklichen, aber nicht vernünftigen Geheimräthe. Da jetzt jeder Reactionär oder Republikaner heißt, so bin ich dadurch, ich weiß nicht wie, in die letztere Klasse geworfen worden. Das Ministerium oder Auerswald, der einen Studenten an der Hand hatte, der ihm immer rapportiren mußte, scheint Crelinger aufgefordert zu haben, zumal bei dem bedenklichen Beifall, zu reagiren, was dieser denn auf die angegebene Art that . . .“

und am 20. Juni meldet Jacobi weiter:

„Von dem hinter meinem Rücken gegen mich gerichteten Attentat wurde ich unterrichtet, und es bildete sich in einer Weißbierkneipe um mich eine immer größer werdende Partei, mit der die zu ergreifenden Maßregeln verabredet wurden. In der nächsten Sitzung Sonntag interpellirte ich Crelinger über Äußerungen, die er über meine Rede und Person gemacht haben sollte. Er redete sich heraus, er habe garnichts gegen mich persönlich gesagt, sondern nur den allgemeinen Grundsatz aufgestellt, nicht bloß nach einer Rede zu urtheilen, sondern man müsse die ganze Vergangenheit untersuchen. Ich wollte mich schon zufriedengestellt erklären, da trat Prutz auf und erzählte, was ihm Crelinger privatim über mich gesagt. Ich gab die nöthigen Erklärungen, aber nach einander fiel nun alles über mich her, um mich todt zu hetzen. Es war ein furchtbarer Sturm, die höchste Aufregung. Denke Dir immerfort gleichzeitig 300 klatschen und 300 trommeln, und den Präsidenten mit dem Hammer die Tribüne zer-

klopfen, um Ruhe zu schaffen. Gleichwohl wurde auch von den wüthendsten Gegnern immer meiner Rede, deren Eindruck mir noch heute unerklärlich ist, mit einer Art Bewunderung gedacht. 'Diese glänzende Rede', sagte Crelinger, 'und weil glänzend, desto gefährlicher, also diese gefährliche Rede...' 'Das sei der Mann', sagte ein anderer, 'der in dem Moment, wo in Frankfurt vielleicht alles auf dem Spiele stände, durch die Gewalt seiner Rede alles in den Verderben bringenden Abgrund mit sich fortreißen könnte' usw. Ich stand unter dreierlei Anklage 1) früher gegen den König zu untertänig gewesen zu sein und nun eine plötzliche Schwenkung gemacht zu haben, 2) von jeher ein eingefleischter Jacobiner gewesen zu sein und 3) von Crelinger, der als kluger Mann allein das Richtige traf, des politischen Indifferentismus. Du siehst, da hieß es, incidit in Scyllam, qui vult vitare Charybdin; es war unmöglich, sich gegen eine Anklage zu vertheidigen, ohne der andern Recht zu geben. Die Wuth meiner Freunde ging so weit, daß sie einen Artikel der Magdeburger Zeitung vorbrachten, wo auf die Wichtigkeit der moralischen Unbescholtenheit der Clubsprecher hingewiesen wurde. Crelinger hatte sich nämlich früher als Assessor Vergehen zu Schulden kommen lassen und mußte deßhalb aus dem Justizdienst scheiden. Die Waffe war etwas unwürdig, aber die rücksichtslose, heftige, ja niederträchtige Art, wie ich von fast sämmtlichen Comitémitgliedern angegriffen wurde, hatte meine Partei erbittert. Die Sache wurde den Abend nicht beendigt, sondern auf die nächste Sitzung Donnerstag verschoben. Im Ganzen war die Strömung gegen mich die vorherrschende geblieben, auch mußte ich zweimal zu heftige oder unparlamentarische Ausdrücke zurücknehmen, ich war ermüdet, und durch die Menge, die über mich herfiel, etwas verwildert. Den Dienstag, wo Marie und Therese der Sitzung beiwohnten, ging es besser; der Zudrang von Menschen war ungeheuer, es hatten sich zu dieser Sitzung allein 200 neue

Mitglieder aufnehmen lassen; es waren hauptsächlich folgende Sachen, die gegen mich vorgebracht wurden: daß ich mich immer an den König in Königsberg herangedrängt und ihm sogar zu wiederholten Malen die Hand geküßt hätte, was den Tag nach der Huldigung geschehen war, wo ganz Deutschland ihm zu Füßen lag; daß ich den Brief der Akademie in der Raumer'schen Sache unterschrieben, und die Dedication an den König in meinen Opusculis mathematicis ... Was ich den Dienstag gesagt, davon habe ich jetzt keine Ahnung; in der Spener'schen Zeitung wird behauptet, ich hätte mich stellenweise bis zur Höhe classischer Beredsamkeit erhoben — wenn es wahr ist, soll es mir angenehm sein." — Schellbach, der Jacobi einen zweiten Newton nannte, wies alle Angriffe gegen diesen mit Entrüstung zurück. — „Auch diesen Tag wurde die Sache nicht beendet, sondern auf Donnerstag verschoben. Diesen Tag hatte sich das Blatt vollständig gewendet. Alle meine Gegner zogen mehr oder weniger zurück. Crelinger mußte sich durch meine Erklärungen befriedigt erklären. Die ganze Sache war eigentlich eine Kinderei, da Beifall oder Tadel dieses Clubs die gleichgültigste Sache von der Welt ist; sie war mir aber doch interessant und lehrreich, indem ich dabei mancherlei Erfahrungen machte; auch trat ich etwas aus dem absoluten Dunkel, in dem ich mich bei meiner zurückgezogenen Lebensweise befinde, heraus, wozu jeder jetzt das Bedürfniß fühlt, ja die Verpflichtung hat. Denn schon Cicero schreibt den Untergang des Römischen Staates daher, daß sich die anständigen Leute zurückzogen und andern das Feld überließen — in der stürmischen Woche war ich mit einem 20 Seiten langen Briefe an Fuss beschäftigt ... Übrigens lese ich, freilich vor sehr wenig Zuhörern, dreimal die Woche höhere Algebra ... mein zweiter Theil rückt nur sehr langsam vorwärts ..."

Sein überaus ruhig denkender und dem politischen Leben Deutschlands gänzlich entfremdeter Bruder wurde durch

diese Mitteilungen Jacobis, dessen Existenz zum Teil von der Gnade des Königs abhing, in Rücksicht auf seine und der Familie Zukunft ein wenig beängstigt, wiewohl er wußte, daß sein Bruder, wenn auch wie Dirichlet, Steiner, Dove und andere ausgezeichnete Gelehrte Berlins von liberaler Anschauung in politischen und religiösen Dingen beseelt, jeder radikalen Gesinnung fremd und jeder gewaltsamen Änderung der Verhältnisse abhold war; er schrieb ihm am Ende des Jahres:

„. . . So sehr viel Zukunft hat man am Ende doch nicht mehr vor sich, möge man daher die Spanne Zeit, die einem übrig bleibt, so würdig wie möglich benutzen. Schon diese Rücksicht geböte Dir, conservativ zu sein und Dich dem Könige, der Dir so manche Gnade erwiesen, so eng wie möglich anzuschließen. Es ist immer am besten, seinen Sympathien zu folgen. Der König ist ein durchaus edler geistreicher Mann, und Du bist wenigstens in Deiner Wissenschaft so monarchisch und absolutistisch gesinnt, wie nur einer. Mit dem Pöbel Dich zu befassen, darin hast Du Gott sei Dank gleich beim Debut ein Haar gefunden und an Herzweh für das Wohl der ganzen Menschheit hast Du, soviel ich weiß, nicht gelitten. Als Du Dich vom Kitzel eines bon-mots hinreißen ließest, dachtest Du gewiß in Erinnerung Deiner philosophischen Studien an das Alterthum und glaubtest, ein edleres Material als der getretene Quark wäre vorhanden, aus dem der freie Geist sich seine Wohnung errichten könne. Wer in der Welt war wohl geistig freier als Du z. B. in Deinen Verhältnissen vor dem März. Erst nachdem die Freiheit erfunden war, wurdest Du unfrei . . .“

Inzwischen hatte der Minister auf Jacobis Ansuchen vom Anfang des Jahres, zum ordentlichen Professor an der Berliner Universität ernannt zu werden, die Fakultät zu einer Meinungsäußerung aufgefordert, welche auch am 5. Juli erstattet wurde. Die Fakultät hebt in ihrem Gutachten

hervor, daß bereits drei Mathematiker, Dirksen, Ohm und Dirichlet ihr angehörten, und daß sie die von Jacobi geltend gemachten Motive nicht als genügend betrachte; „eine Einwirkung auf ihre Sonderinteressen kann aber die Facultät von jemand, der bisher außer ihr gestanden, nicht erwarten. Auch giebt die Art, wie Professor Jacobi in der letzten Zeit sich öffentlich hat vernehmen lassen, uns nicht einmal die Sicherheit, daß seine Mitwirkung an dem Reorganisations-Werke eine heilsame für die Universität sein werde.“ Die drei Mathematiker hatten dieses Gutachten nicht unterzeichnet, wohl aber Magnus, Encke, Mitscherlich. Jacobi wurde daraufhin von dem Minister mit seiner Bitte abschlägig beschieden.

Nachdem er seine Vorlesung über höhere Algebra, die er vor nur zehn Zuhörern hielt, am 10. August geschlossen, nimmt er wieder seine astronomischen und mathematischen Arbeiten auf, und noch vor Beginn des Wintersemesters richtet er am 10. Oktober 1848 ein Schreiben an Schumacher, das nicht, wie dieser glaubte, etwa nur durch eine persönliche Gereiztheit gegen einen akademischen Kollegen veranlaßt war, sondern den rein wissenschaftlichen und universellen Gedanken Jacobis seine Entstehung verdankte:

„. . . Die Discussion der Fragen, zu welchen die große Leverrier'sche Entdeckung Anlaß giebt, hat in der neuesten Zeit eine beklagenswerthe Wendung genommen. Diese Fragen könnten für den Astronomen ein neuer Sporn sein, die Theorieen der einzelnen Theile des Sonnensystems bis zu derjenigen Vollkommenheit auszuarbeiten, welche die Höhe der Praxis und die reichen Hülfsmittel der mathematischen Analysis jetzt möglich machen, um das Ziel zu erreichen, welches Bessel in dem von ihm hinterlassenen Fragment seiner Selbstbiographie als den leitenden Gedanken seines arbeitsamen Lebens angiebt . . . Man muß bewundern, daß aus so kleinen und unsicheren Quantitäten, wie die hier

gegebenen, so genaue Resultate gezogen werden konnten... Denen, welche die Entdeckung für zufällig ausgeben, weil die Übereinstimmung nicht größer ist, als es die Natur der Sache verstattet, wäre der Rath zu geben, auch solche zufällige Entdeckungen zu machen..."

Schumacher sieht sich veranlaßt, Gauss am 27. Oktober darüber zu berichten: „Von Jacobi habe ich ein paar Worte gegen die, welche die Neptuns-Entdeckung dem Zufall zuschreiben, erhalten ... ich konnte nicht verstehen, weßhalb Jacobi dringend um baldige Aufnahme bittet, bis ich vorgestern von Weyer hörte, daß ... in der Academie das Thema in einer Rede berührt habe. Nach Weyer's Relation hat er freilich in demselben Sinne wie Jacobi gesprochen, ich vermuthe aber doch, daß Jacobi's Aufsatz eigentlich eine Polemik gegen ... ist, weil vielleicht auch nur Nebenpunkte angegriffen werden..."

In dem Briefe an Schumacher hatte Jacobi zugleich eine andere umfangreiche astronomische Arbeit in Aussicht gestellt, über welche Schumacher am 27. Oktober an Gauss berichtet: „...Bessel's Wittwe hatte mir einen Aufsatz unseres verstorbenen Freundes über das Saturnsystem gesandt, bei dem eine von Bessel gemachte Abschrift einer strengen Entwicklung der großen Ungleichheit von Jacobi lag. Ich mußte natürlich erst vorfragen, ob er den Abdruck seiner Abhandlung erlaube, was er auch erlaubte, aber vorher das Manuscript zur Durchsicht haben wollte. Bei Übersendung des Artikels über Neptun kündigt er mir nun die baldige Rücksendung seiner Arbeit an. Er hat, wie er mir schreibt, nur wenige Veränderungen gemacht, ist aber dabei wieder in die Störungsuntersuchungen gekommen und will sie wieder aufnehmen..."

Die sehr bald Schumacher zurückgesandte Arbeit, welche eine ausführliche Darlegung der vor fünf Jahren in der Akademie gelesenen Note enthält, wurde nun in den Astr. Nachrichten unter dem Titel „Versuch einer Berech-

nung der großen Ungleichheit des Saturns nach einer strengen Entwicklung" veröffentlicht. Nachdem er zunächst das Quadrat der Distanz auf die Form $\Delta^2 = h + k\cos(u + u' + B - \overline{B}) + b\cos(u + B) + b'\cos(u' + B') + c\cos(u + u' - \gamma) + j\cos 2u + j'\cos 2u'$ gebracht, worin u und u' die exzentrischen Anomalien bedeuten, zeigt er, daß die für Jupiter und Saturn geltenden Werte der Koeffizienten gestatten $\varrho_0 = h + k\cos(u + u' + B - \overline{B}) + b\cos(u + B) + b'\cos(u' + \overline{B})$ als Hauptbestandteil, $\varrho_1 = j\cos 2u + j'\cos 2u' + c\cos(u + u' - \gamma) + b'[\cos(u' + B') - \cos(u' + \overline{B})]$ als Korrektionsglied zu behandeln, und stellt zunächst die Entwicklung nach Potenzen von $\frac{\varrho_1}{\varrho_0}$ fest. Indem er sodann Winkel η und η' einführt, die zu $u + B$, $u' + \overline{B}$ in denselben Beziehungen stehen, wie exzentrische zu wahren Anomalien in Ellipsen von geeignet gewählten Exzentrizitäten, und mit β, β' die Tangenten der halben bez. Exzentrizitätswinkel bezeichnet, bringt er $\varrho_0^{-\frac{1}{2}}$ auf die Form

$$\frac{1}{A}\left\{\frac{(1 - 2\beta\cos\eta + \beta^2)(1 - 2\beta'\cos\eta' + \beta'^2)}{1 - 2\frac{A'}{A}\cos(\eta - \eta') + \frac{A'^2}{A^2}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

entwickelt zunächst die $-\frac{1}{2}^{\text{te}}$ Potenz des Nenners nach den Vielfachen von $\eta - \eta'$ und sucht dann durch Rekursionsformeln oder direkt durch hypergeometrische Reihen die Koeffizienten der Entwicklung von $e^{\varkappa\eta i}(1 - 2\beta\cos\eta + \beta^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - \beta^2)\Sigma b_m^{(\varkappa)} e^{(m+\varkappa)(u+B)i}$ zu bestimmen; ähnlich behandelt er die Entwicklung von $\frac{\varrho_1}{\varrho_0^3}$ und fügt diesen theoretischen Untersuchungen noch eine große Anzahl von darauf bezüglichen numerischen Rechnungen bei.

Jacobi begann seine Wintervorlesung über „Differentialrechnung mit verschiedenen Anwendungen" am 30. Oktober; da sich jedoch nur sieben Zuhörer zu dieser meldeten, gab er sie in großer Mißstimmung auf, hielt statt dieser eine Vorlesung über elliptische Funktionen und gewann

nach den Stürmen des Sommers allmählich auch wieder Lust und Ruhe zur Vertiefung in seine wissenschaftlichen Arbeiten. Am 9. November 1848 las er in der Akademie eine Note „Über quadratische Formen und hyperelliptische Funktionen“, aus der er einen Auszug unter dem Titel „Über die Reduktion der quadratischen Formen auf die kleinste Anzahl Glieder“ veröffentlichte, und in welcher er als Ergänzung zu dem Satze, daß alle quadratischen Formen durch lineare Substitutionen auf die reduzierte Form zurückgeführt werden können, deren Koeffizienten in solchen Grenzen eingeschlossen sind, daß keine andere äquivalente Form denselben Grenzbedingungen genügen kann, die Frage nach der kleinsten Anzahl Glieder aufwirft, auf welche jede quadratische Form von einer gegebenen Anzahl Variabeln gebracht werden kann. Bei binären quadratischen Formen ist keine derartige Reduktion möglich oder es wird im allgemeinen keines ihrer drei Glieder zum Verschwinden gebracht werden können, dagegen zeigt Jacobi, daß die quadratischen Formen von mehr als zwei Variabeln immer auf eine kleinere Anzahl Glieder reduziert werden können; während die Anzahl der Glieder der vollständigen quadratischen Formen mit der Zahl der Variabeln wie die dreieckigen Zahlen 1, 3, 6, 10, ... wächst, wird diese Anzahl bei den auf die kleinste Anzahl der Glieder reduzierten quadratischen Formen wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 ... wachsen, so daß man bei quadratischen Formen von 3, 4, 5, ... Variabeln resp. 1, 3, 6, ... Koeffizienten zum Verschwinden bringen kann, indem man für jede quadratische Form von n Variabeln durch ganzzahlige Substitutionen mit der Determinante 1 eine äquivalente Form finden kann, welche außer den Quadraten derselben nur noch $n - 1$ Produkte enthält, und zwar diejenigen, welche bei einer angenommenen Reihenfolge der Variabeln durch Multiplikation jeder Variabeln in die nächstfolgende erhalten werden.

Aus dieser Zeit rührt auch eine Aufzeichnung her,

welche Borchardt aus den hinterlassenen Papieren Jacobis im Jahre 1857 unter dem Titel „Über eine elementare Transformation eines in bezug auf jedes von zwei Variabelnsystemen linearen und homogenen Ausdrucks“ veröffentlicht hat, und in welcher Jacobi auf eine zweifach lineare homogene Funktion eine ähnliche Transformation anwenden will wie diejenige, vermittels welcher man eine von $n+1$ Variabeln $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängige quadratische Form nur auf eine Weise als Quadratsumme $A_0 z_0^2 + A_1 z_1^2 + \cdots + A_m z_m^2 + \cdots + A_n z_n^2$ so darstellt, daß, für jedes m von $m = 0$ bis $m = n$, z_m eine nur die Variabeln $x_m, x_{m+1}, \ldots x_n$ enthaltende lineare homogene Funktion ist, und welche er independent darzustellen gelehrt hat. Setzt man $u_i = \alpha_{i0} x_0 + \alpha_{i1} x_1 + \cdots + \alpha_{in} x_n (i = 0, 1, \ldots n)$, bildet hieraus durch Vertauschung der Horizontal- mit den Vertikalreihen neue $n+1$ homogene lineare Funktionen $v_i = \alpha_{0i} y_0 + \alpha_{1i} y_1 + \cdots + \alpha_{ni} y_n$ der Variabeln $y_0, \ldots y_n$, so daß man für diese zwei konjugierten Systeme von Variabeln die identische Gleichung $y^0 u_0 + y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n = x_0 v_0 + x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ erhält, und wird f durch die Doppelgleichung $f = y_0 u_0 + y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n = x_0 v_0 + x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ definiert, so ist diese Funktion der allgemeinste sowohl in bezug auf $x_0, x_1, \ldots x_n$ als auf $y_0, y_1, \ldots y_n$ lineare homogene Ausdruck. Daraus ergibt sich durch sukzessive einfache Transformationen, durch welche immer je eine Variable herausfällt, das Theorem, daß eine lineare homogene Funktion von $x_0, x_1, \ldots x_n$ und von $y_0, y_1, \ldots y_n$ $f = \sum_0^n {}^i \sum_0^n {}^\varkappa \alpha_{\varkappa i} x_i y_\varkappa$ stets und nur auf eine Weise in der Form $f = A_0 U_0 V_0 + A_1 U_1 V_1 + \cdots + A_m U_m V_m + \cdots + A_n U_n V_n$ so dargestellt werden kann, daß U_m und V_m für jedes m zwei resp. nur die Variabeln $x_m, x_{m+1}, \ldots x_n$ und $y_m, y_{m+1}, \ldots y_n$ enthaltende lineare Funktionen sind, und daß diese Darstellung lautet $f = \frac{U_0 V_0}{p_0} + \frac{U_1 V_1}{p_0 p_1} + \cdots + \frac{U_m V_m}{p_{m-1} p_m} + \cdots + \frac{U_n V_n}{p_{n-1} p_n}$, worin U_m und V_m die aus den α bis zum

Index $m-1$ und den nach y resp. x genommenen Differentialquotienten von f gebildeten Determinanten, p_m die Determinante aus den α bis zum Index m bedeuten.

Zu gleicher Zeit mit den ebenerwähnten Sätzen und im Zusammenhange mit seinen Untersuchungen über die Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus verfaßte er im Jahre 1849 eine Aufzeichnung, die aus seinen hinterlassenen Papieren von E. Heine unter dem Titel „Über die Auflösung der Gleichung $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = f \cdot u$“ herausgegeben wurde, und welche vier Lösungen für eine Aufgabe liefert, deren Lösbarkeit er in seiner Arbeit über die Reduktion der quadratischen Formen nur angedeutet hatte. Hermite hatte bereits das Problem behandelt, wenn $x_1, x_2, \ldots x_n$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen, $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ gegebene ganze Zahlen sind, deren gemeinschaftlicher Teiler f ist, für die Größen $x_1, \ldots x_n$ mittels linearer Substitutionen eine gleiche Anzahl anderer Größen einzuführen, welche ebenfalls jede beliebige ganze Zahl werden können, wenn man für $x_1, x_2, \ldots x_n$ entsprechende Werte setzt, und von denen eine derselben durch die Gleichung $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = f \cdot u$ gegeben ist, oder für eine Reihe von n gegebenen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, deren gemeinschaftlicher Teiler f ist, $n-1$ andere Reihen von n Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß die Determinante der n^2 Zahlen gleich $\pm f$ ist; für dieses Problem gibt Jacobi nun mehrere Auflösungen. Aus $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = f \cdot u$ folgt bekanntlich, daß, wenn man zwei ganze Zahlen γ und β bestimmt, welche der Gleichung $\gamma \cdot \frac{\alpha_1}{f} - \beta \cdot \frac{\alpha_2}{f} = 1$ genügen, $x_1 = \gamma u - \frac{\alpha_2}{f} z$, $x_2 = -\beta u + \frac{\alpha_1}{f} z$ wird, worin z eine beliebige ganze Zahl bedeutet, und es ist das System der Größen u und z den Größen x_1, x_2 äquivalent, da die Determinante $\gamma \frac{\alpha_1}{f} - \beta \frac{\alpha_2}{f} = 1$ ist; durch Umkehrung erhält man $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = fu$, $\beta x_1 + \gamma x_2 = z$, von denen die erste die vorgelegte Gleichung selbst ist;

genau auf diesem Wege behandelt nun Jacobi die Auflösung der unbestimmten Gleichung $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = f \cdot u$ in ganzen Zahlen, indem er dieselbe sukzessive auf eine ähnliche mit einer Unbekannten weniger zurückführt, deutet aber noch eine neue Methode für die Behandlung desselben Problems vermöge eines erweiterten Kettenbruchalgorithmus an.

Am 26. November 1848 traf Jacobi der Tod der zärtlich von ihm geliebten Mutter schwer, der Ausblick in die Zukunft und das Schicksal seiner Familie stimmte ihn trüb und ernst; die Reaktion begann in Preußen ihr Haupt zu erheben, alle liberal denkenden Männer sahen sich der Verfolgung ausgesetzt; im November schrieb Eisenstein an Stern:

„... Ich dagegen, was mich persönlich betrifft, habe nur das Bittere von der Freiheit zu kosten bekommen; denn obgleich ich mich nicht im Mindesten thätig in die Politik gemischt habe, sondern nur einigemal die Clubs besuchte, was jeder that, ohne aber Reden zu halten, so bin ich doch, bloß deshalb schon, von den Räthen des Ministeriums, gewiß in Folge von Verläumdungen, als Republicaner angefahren worden. Sie wissen vielleicht, daß ich aus dem Königlichen Fonds jährlich eine Unterstützung von 500 ߀ beziehe; dieses Geld ist aber schlimmer als nichts, denn ich hänge dadurch ganz speciell von der Gnade des Königs ab, und das ist, wie Sie wohl denken können, in jetzigen Zeiten sehr übel. Ich bin überzeugt, daß, welcher Umschwung aller Verhältnisse in politischer und socialer Hinsicht auch stattfinden möge, man doch Männern, namentlich Gelehrten, die bereits in Amt und Brod sind, schwerlich das Ihrige entziehen wird; jedoch wird man sich auch ebensowenig um Menschen, wie ich z. B., kümmern, die eine vorübergehende Unterstützung ohne feste Stellung genießen ... Es kommt bei der Freiheit des Willens darauf an, jedesmal so zu handeln, daß man im nächstfolgenden Zustande nach der That möglichst unfrei sei ...“

Zunächst trug man noch Bedenken, sich an Jacobi heranzuwagen, und er durfte sich ungestört seiner Vorlesung und der wissenschaftlichen Arbeit widmen. Wie er bereits Schumacher mitgeteilt, war er durch seine letzte Saturnsarbeit wieder ganz in Störungsuntersuchungen verwickelt worden und trotz der im Februar 1849 von Rosenhain an ihn gerichteten Bitte: „Es wäre mir sehr wünschenswerth, wenn Sie Ihre Arbeiten über das auf Doppelintegrale ausgedehnte Abel'sche Additionstheorem bekannt machten und dabei dasselbe ähnlich behandelten, wie das Theorem über einfache Integrale im 32. Bande des Journals" widmete er doch vorerst seine Zeit der Fertigstellung seiner astronomischen Untersuchungen und las in der Akademie am 19. Februar eine Note „Über die Erweiterung der Laplaceschen Methode, die Funktionen großer Zahlen zu bestimmen", deren Inhalt er unter dem Titel „Über die annähernde Bestimmung sehr entfernter Glieder in der Entwicklung der elliptischen Koordinaten, nebst einer Ausdehnung der Laplaceschen Methode zur Bestimmung großer Zahlen" in den Astr. Nachr. veröffentlichte. In der Abhandlung „Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero" hatte Carlini gefunden, daß die Entwicklung der wahren Anomalie nach den Vielfachen der mittleren Anomalie zu konvergieren aufhört, wenn die Exzentrizität e eine Wurzel der Gleichung $\frac{e\,i^{\sqrt{1+e^2}}}{1+\sqrt{1+e^2}}=1$ oder $e=0,66$, wenn i die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, und daß die Entwicklung des Radiusvektors nach den Vielfachen der mittleren Anomalie zu divergieren beginnt, wenn $e=0,62$. Da nun aber Dirichlet, Bessel u. a. nachgewiesen hatten, daß sich alle Funktionen innerhalb gegebener Grenzen in konvergierende Reihen, welche nach den cosinus oder sinus der Vielfachen ihres Argumentes fortschreiten, entwickeln lassen, wenn sie innerhalb der gegebenen Grenzen keine unendlichen Werte annehmen, so

sah sich Jacobi veranlaßt, die Fehler aufzusuchen, die sich in die Deduktion von Carlini eingeschlichen haben mußten, und welche er auch leicht auffand. Er entwickelt bei dieser Gelegenheit einige Näherungsmethoden zur Berechnung von Integralen, die den jedesmaligen speziellen Problemen angepaßt sind, und findet, daß für sehr große Werte von p der Koeffizient von sin pu, worin u die mittlere Anomalie ist, in der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung nach der Lagrangeschen Reihe

$$P = \left\{ \frac{e\, i^{\sqrt{1-e^2}}}{1+\sqrt{1-e^2}} \right\}^p \left(\frac{1}{p} + \frac{4}{3\sqrt{2\pi p^3}} \frac{1}{\sqrt[4]{(1-e^2)^3}} \right)$$

ist, wodurch eine wesentliche Ergänzung der aus den hinterlassenen Papieren von Laplace veröffentlichten Untersuchung über die Konvergenz der beiden verschiedenen Entwicklungsarten der elliptischen Koordinaten gegeben ist: „Ich vermute, daß diese Lücke Laplace selbst abgehalten hat, diese Arbeit zu veröffentlichen. Man sieht aber, daß alle wesentlichen Schwierigkeiten dieser Aufgabe schon von Carlini im Jahre 1817 überwunden waren, und daß er nur durch ein Versehen in den Zeichen bei Entwicklung der Potenzen des sinus nach den sinus oder cosinus der Vielfachen des Winkels verhindert wurde, das Resultat selbst zu finden.“

Schon seit einem Jahre war Jacobi dem politischen Leben Berlins völlig fern geblieben, und noch am 28. April 1849 sprach er in einem Briefe an seinen Bruder „von der Sorge und Angst der Gemäßigten“, zu denen auch er sich rechnete; aber trotzdem unterließen es seine Feinde und Neider nicht, beim Könige und bei den Ministern Mißtrauen gegen Jacobis Gesinnung und Charakter wachzurufen, und unmittelbar, nachdem er eben seine Vorlesung über „Variationsrechnung nebst Anwendung auf isoperimetrische Aufgaben“ begonnen, erging an ihn am 31. Mai eine Anfrage des Ministers Ladenberg, ob er, der seiner Gesund-

heit wegen seinen Wohnsitz von Königsberg nach Berlin verlegt habe, dergestalt gekräftigt sei, daß er imstande wäre, die mit seiner ordentlichen Professur verbundenen Pflichten wieder vollständig zu übernehmen.

Jacobi antwortet am 5. Juni 1849 unter Beilegung eines Attestes des Assistenten von Schönlein, er hoffe das Übel, an dem er leide, hier durch Pflege und fortgesetzte Aufmerksamkeit in Schranken gehalten zu sehen:

„Bei meiner Versetzung nach Berlin haben S. M. Allerhöchsten, Allergnädigsten Willen dahin auszusprechen geruht, daß ich mich bei den Universitätsvorlesungen nur so weit betheiligen möge, als dies ohne Nachtheil für meine Gesundheit und ohne Beeinträchtigung meiner andern wissenschaftlichen Arbeiten geschehen könne. Indessen habe ich geglaubt, meine bisherige ersprießliche Wirksamkeit als Universitätslehrer auch hier nicht ganz aufgeben zu dürfen, sondern der Allerhöchsten Intention gemäß, welche einer auf die Erweiterung der Wissenschaften gerichteten Thätigkeit keinerlei Hinderniß entgegengesetzt wissen wollte, nur die für die Vorlesungen zu bestimmende Stundenzahl zweckmäßig beschränken zu müssen. In den ersten Jahren, in welchen ich auf die Vorlesungen eine größere Stundenzahl verwandte, haben dieselben allerdings durch meinen Gesundheitzustand zeitweilige Hemmungen erfahren; in den beiden letzten Semestern, wo ich mich auf drei Vorlesungen die Woche beschränkte, habe ich dieselben ohne Unterbrechung zu Ende geführt ... Was die Hauptaufgabe meines Lebens betrifft, die mathematischen Wissenschaften, welche auf ihre heutige Höhe zu erheben, meine Arbeiten wesentlich beigetragen haben, fort und fort zu fördern und so den Willen Sr. Majestät zu erfüllen, so macht es mich sehr glücklich, daß mein Gesundheitzustand mir auch noch hierzu Zeit und Kraft gelassen hat, so daß ich in dieser Beziehung noch immer den Wettstreit mit den Besten und Thätigsten in meinem Fache aushalten kann. Einen ersten

Theil der von mir herauszugebenden mathematischen Werke in Stärke von 54 Bogen, dessen Zueignung des Königs Majestät anzunehmen geruht haben, habe ich hier bereits vor einigen Jahren publicirt. Einen zweiten, an welchem ich jetzt arbeite, und von welchem schon 20 Bogen gedruckt sind, hoffe ich bald E. Exc. überreichen zu können. Sehr groß ist die Menge desjenigen, was ich neben diesem zu späteren Werken vorbereite und zu vollenden hoffe, wenn mir meine Gesundheit auch nur in dem jetzigen Zustande erhalten bleibt. Glücklich, wenn ich so durch erhöhte Ehre seines wissenschaftlichen Ruhmes meinem Vaterlande den Dank dafür abbezahlen kann, daß es durch Zurückversetzung in meine Heimath mir Leben und Kraft erhalten hat, und mir die Mittel giebt, meine Kinder zu erziehen ... In den Zeiten, in welchen mir meine Gesundheit die volle Anstrengung des Nachdenkens, wie sie jene Arbeiten fordern, nicht gestatteten, habe ich mich, um auch in diesen für die Wissenschaft thätig zu sein, geschichtlich mathematischen Untersuchungen zugewendet, worin mir meine früher begonnene philologische Carrière zu Statten gekommen ist. Herr v. Humboldt hat die Güte gehabt, dieser Untersuchungen im 2. Bande seines Kosmos Erwähnung zu thun. Auch beschäftigt mich die Herausgabe des griechischen Mathematikers Diophantus, behufs welcher ich während meines Aufenthaltes in Rom sechs Handschriften der Vaticanischen Bibliothek verglichen habe, und noch jetzt eine kostbare Handschrift brauche, welche ich der Gefälligkeit der Wolfenbüttler Bibliothekare verdanke. Ich hoffe diese Arbeit bald abschließen und der Oeffentlichkeit übergeben zu können ... Mit meinen Schülern, welche jetzt fast an allen inländischen und vielen auswärtigen Universitäten lehren, unterhalte ich eine für mich oft lehrreiche Correspondenz, durch die ich fortgesetzt an ihren Arbeiten theilnehme. Auch aus andern Ländern, aus Frankreich und England, erhalte ich häufige Mittheilungen über unternommene oder voll-

endete Arbeiten. Einen Theil dieser Correspondenz habe ich in dem ersten Theil meiner neueren Werke aufgenommen und werde damit für die folgenden fortfahren, da sie wichtige Beiträge für die Zeitgeschichte der Wissenschaft liefern ... Lebhafte Theilnahme habe ich an der von der Petersburger Akademie unternommenen Herausgabe der Werke Euler's genommen ... Ob ich ein nützliches Mitglied unserer Akademie der Wissenschaften bin, erlaube ich mir dem hochgeneigten Urtheil E. Exc. anheim zu stellen ..."

Als Antwort auf dieses Schreiben erhielt Jacobi die Mitteilung, daß ihm der bisher von dem Könige gewährte Zuschuß zu seinem in Königsberg bezogenen Gehalte von nun an entzogen sei; man hoffte ihn dadurch zur Rückkehr nach Königsberg zu zwingen. Am 13. August wandte sich Jacobi, dessen Familie in ihrer Existenz gefährdet war, an die Frau seines Freundes Hansen in Gotha: „Die Freundlichkeit, die Sie mir bei meinem Aufenthalte in Gotha erwiesen, macht mich so kühn, die nachfolgende Bitte an Sie zu richten. Ein Ereigniß, welches ich längere Zeit vorhersah, ist jetzt eingetreten und hat mich eines so großen Theiles meines Einkommens beraubt, daß ich meine große Familie nicht mehr in dem theuren Berlin unterhalten kann, sondern sie an einem möglichst billigen Orte unterzubringen suchen muß, der für meine Jungen ein Gymnasium hat. Ich selbst würde wahrscheinlich hier bleiben müssen, und nur etwa 4 Monate im Jahre bei meiner Familie sein können. Ich habe dabei vor allem an Gotha gedacht, weil es für mich eine herrliche Aussicht wäre, einen Theil des Jahres mit Hansen zusammen zu sein; auch habe ich schon öfter mit Hansen über die Kostbarkeit des dortigen Lebens im Vergleich zum hiesigen gesprochen, aber nur oberflächlich. Jetzt, wo es Ernst wird, möchte ich nun das genaueste Detail wissen und nehme dafür Ihre Wissenschaft in Anspruch. Ich habe aber die Erfahrung gemacht, daß jeder sich seine Ausgaben billiger herauszurechnen pflegt, als das

wirklich der Fall ist, und daher auch für andere ähnliche Schätzungen unter dem wirklichen Betrage macht. Man pflegt dabei gewisse Beihülfen, die man in der Wirthschaft hat, nicht nach ihrem Werthe zu taxiren oder dergleichen. Ich würde Sie also bitten, von dieser Regel eine Ausnahme zu machen, und mir, wie man zu sagen pflegt, ganz reinen Wein einzuschenken. Meine Familie besteht aus Frau und 7 Kindern, 3 Knaben von 17, 12, 11 Jahren, 3 Mädchen von 9, 7 und 4 Jahren und einem Knaben von 2 Jahren. Es wird ziemlich bei Ihnen ein ähnliches Verhältniß stattfinden ... Ich falle gleich mit der Thüre in's Haus, und frage, ob (abgerechnet den Mehrbedarf während meines Aufenthaltes dort, den ich besonders in Rechnung ziehen würde) Sie glauben, daß meine Familie ohne mich selbst für 1500 ℛ︁ jährlich, die ich ihr höchstens würde geben können, dort anständig, wenn gleich bescheiden, würde leben können, ohne daß meine Frau, die mehr gewohnt ist, sich mit den Kindern zu beschäftigen, nöthig hätte, zu sehr selbst Hand an's Werk zu legen ...“

In diesen für ihn und seine Familie so schweren Tagen legte er noch am 16. August der Berliner Akademie eine Note „Über das Vorkommen eines Ägyptischen Bruchnamens in Ptolemaeus' Geographie“ vor, worin er durch die Konjektur, daß es in der Handschrift des Ptolemäus TO statt ΓO heißen muß, eine rätselhafte Bezeichnung desselben aufklärt und andrerseits eine unerwartete Bestätigung der neueren ägyptischen Forschungen aus einem klassischen Autor erhält, und noch an demselben Tage las er eine kurze, nicht veröffentlichte Note „Über neue das Problem der Rotation der Körper betreffende Formeln“, deren Ausführung für das mathematische Journal bestimmt war.

Aber zunächst konzentrierten sich alle seine Gedanken in der Sorge um die Seinigen, und ein reger Briefwechsel mit der Hansenschen Familie führte schon im September zur Übersiedlung seiner Frau und Kinder nach Gotha. Von

hohem Interesse ist der am 21. September an seinen Bruder gerichtete Brief, der uns in die politischen Intrigen und die wahren politischen Anschauungen Jacobis Einsicht verschafft:

„Meine Familie siedelt nach Gotha über, ich werde mich Deinem früheren Rathe gemäß in einem Gasthof in Pension geben und zwar in der Stadt London ... 'Man hätte bei dieser Bewilligung nicht geglaubt, daß meine Wiederherstellung so lange dauern würde; S. M. hätten sich um so eher dazu bewogen gefunden, als es mir selbst, bei meiner politischen Stellung gegen Allerhöchstdieselben, nicht wünschenswerth sein könne, von Allerhöchstderselben eine Wohlthat anzunehmen'! Der constitutionelle Minister deckt sich, indem er mir dies im Allerhöchsten Auftrage anzeigt. Gegen die politische Richtung gegen Allerhöchstdieselben habe ich sogleich in einem Schreiben an S. M. protestirt. Ich erkenne darin an, bei den Wahlgelegenheiten mich gegen einige Maßregeln der Regierung mit aller Stärke, die die Erregtheit des Augenblicks eingegeben, mit gleicher Stärke aber auch gegen die Anträge der Nationalversammlung, die Anerkennung der Revolution, Verminderung des Militärs, Abschaffung von Gottes Gnaden, Adel und Orden, sowie gegen das ewige Pochen auf eine Volkssouveraenität, die ich mir höchstens als ideale, unsichtbare Macht denken könne, ausgesprochen zu haben. Propaganda für meine Meinung zu machen, habe ich niemals gesucht, und diese meine politische Richtung mit meiner warmen Anhänglichkeit an die Person Sr. M. (so wie mit meiner Vorrede) vereinbaren zu können geglaubt, und wie ich oftmals früher meine Hoffnungen und Wünsche Sr. M. in kindlichem Vertrauen zu Füßen gelegt, so möge S. M. auch aus diesen wenigen Zeilen über ein reiches Thema zu ersehen geruhen, daß dieses Vertrauen in meiner Seele nicht erloschen sei. In Bezug auf die Wohlthat kommt der Passus vor: Indem ich mich unter dem harten Schlage, der mich getroffen,

beuge, danke ich E. M. für die mir bisher bewiesene Güte und Gnade, und suche mich in dem Gedanken zu stärken, daß ich, wie mir Mit- und Nachwelt bezeugen werden, durch Erhöhung des preußischen und deutschen Namens in der Wissenschaft diese Gnade redlich zu verdienen bemüht gewesen bin. Es war mir ein Bedürfniß, mein persönliches Verhältnis zu dem Könige nicht durch einen zu grellen Mißton zu endigen und zugleich ohne Trotz zu zeigen, daß ich noch aufrecht stehe. Vorzüglich wünschte dies auch meine Frau ... Daß ich mit Dirichlet zu Gauss Jubiläum war, wirst Du wohl wissen. Ich hatte dort den Ehrenplatz neben ihm und hielt einen großen speach. Du weißt, er hat in den 20 Jahren weder mich noch Dirichlet jemals citirt; diesmal aber wurde er nach einigen Gläsern süßen Weines so über sich weggerissen, daß er zu Dirichlet, der sich gegen ihn rühmte, mehr vielleicht als irgend ein anderer seine Schriften studirt zu haben, sagte, er habe sie nicht bloß studirt, er sei weit darüber hinausgegangen. Ein wissenschaftliches Gespräch ist mit G. nicht mehr gut zu entriren; er sucht es zu vermeiden, indem er in continuirlichem Fluß die uninteressantesten Dinge spricht. Außer Hansen und Gerling aus Marburg war niemand da; unsere Reise war daher wichtig, um eine Manifestation zu Ehren der Mathematik doch einigermaßen zu stützen. Auf der Rückreise habe ich mich unter den Handschriften der Wolfenbüttler Bibliothek 1 Tag aufgehalten und mehrere mich interessirende entdeckt, z. B. eine lateinische Übersetzung der noch unedirten Schrift, in der zuerst 200 Jahre vor Christus die Formel $\varDelta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ aufgestellt und wundervoll geometrisch bewiesen wird ... Grüße Ostrogradski und sage ihm, die Note in den Comptes rendus über die Rotation hätte ich nur für ihn geschrieben. Sie gehört auch zu den Dingen, die trotz ihrer nicht abzusehenden Wichtigkeit und innern Schönheit n'ont pas même le mérite d'une difficulté vaincue. Man

nennt das idées simples, die immer am schwersten sein sollen. (Eine idée simple war, als Harriot und Descartes alle Glieder einer Gleichung auf eine Seite brachten, womit Algebra und Analysis erst anfangen konnten; früher brachte man die Gleichungen so in Ordnung, daß auf beiden Seiten nur positive waren.) Wichtige Complicationen, wie über die Abel'schen Transcendenten, machen meine Schüler mit einer Kraft, der ich schon wegen meiner physischen Kräfte nicht nachkann. Sage O., daß man die Rotation eines schweren Rotationskörpers ebenso behandeln könne, nur kämen da 3 periodische Bewegungen vor. Sehr schön würden auch die Formeln für die Geodäsie; die Basis der ganz neuen Formel hierfür wäre, wenn man bei Legendre Traité des F. E. S. 361 setzt $w = \operatorname{am}(u)$, $\vartheta = \cos\operatorname{am}(a, \varkappa')$, $\psi_1 = \psi - Au$ die Formel $\sin\varphi e^{i\psi_1} = \frac{\Theta(\varkappa)\Theta(u+ia)}{\Theta(\varkappa+ia)\Theta(u)}$, wo $i = \sqrt{-1}$. Beides hoffe ich nächstens auszuarbeiten oder eigentlich niederzuschreiben, was mir sehr sauer wird... Neu wird Dir meine Beschäftigung mit der ägyptischen Sprache sein. In den Berliner Monatsberichten vom August findest Du eine Note von mir über das Vorkommen eines demotischen Bruchnamens in Ptolemaeus Geographie. Viel habe ich mich mit der berüchtigten Zahl in Plato's Republik beschäftigt, in der das Geheimniß der Dauer der Staaten liegt; ich glaube in der That die betreffende Stelle, in der alles ein Räthsel ist, vollständig aufgeklärt zu haben... Die meisten Akademiker benehmen sich gegen mich nicht zum allerbesten; aber am elendesten R., so daß er mich schon lange nicht mehr grüßt; M. und P. bewiesen sich ähnlich albern, fangen aber an einzulenken, wie es scheint; doch dürfte dies seine Schwierigkeiten haben..."

Nachdem Jacobi aus Gotha zurückgekehrt, wo er alle Einrichtungen für seine Familie getroffen, begann er am 29. Oktober seine Vorlesung über die allgemeine Theorie der Flächen und Kurven doppelter Krümmung; doch weder

die Vorlesungen noch die wissenschaftliche Arbeit konnten ihm in seiner Einsamkeit Befriedigung gewähren. In einer kurzen, aus der damaligen Zeit stammenden Aufzeichnung sagt Frau Jacobi:

„Jacobi's ungewöhnliche Gabe, seine Ideen unvorbereitet, klar geordnet und geistvoll geschmückt darzulegen, drängte ihn ohne sein Wollen unvermeidlich in den Vordergrund. Er sprach mehreremal öffentlich, und wenn er sprach, seine wahren, eigensten Gedanken und Ansichten. Bei seinen großen persönlichen Verpflichtungen gegen den König konnte das allerdings nur traurige Resultate für ihn haben und mußte auf die Gegenparthei einen scheinbar gerechtfertigten unangenehmen Eindruck machen. Natürlich fehlte es damals nicht an böswilligen Zwischenträgern, die das Aufgefangene nicht allein zutrugen sondern es noch nach ihrem Interesse formten und färbten, und so mußte sich höchsten Orts das Wohlwollen in Zorn umwandeln. Nach beruhigter Aufregung blieben die Folgen nicht aus. Jacobi hatte es erwartet. Es wurden ihm 1000 ℛ, die der König bei Jacobi's Versetzung nach Berlin, um einen Aufenthalt mit der Familie dort zu ermöglichen, seinem Gehalte zugefügt hatte, plötzlich entzogen. Jacobi war überzeugt, daß er, in der nun über ihn kommenden pecuniären Beschränkung seiner Wissenschaft nicht dauernd und fördernd leben könne, leidend wie er ohnehin schon war. Er zeigte dem Ministerium an, daß er sich unter diesen Umständen genöthigt sehen würde, den ersten günstigen Ruf in's Ausland anzunehmen — und brachte seine Familie nach dem dazumal billigen Gotha, wo er dieselbe einige Mal im Jahr, auf Wochen oder Monate, besuchte."

Der längere Aufenthalt in Gotha und das enge Zusammenleben mit Hansen hatte nun Jacobi immer mehr astronomischen Arbeiten zugewendet, und schon am 29. November schrieb Schumacher an Gauss: „Jacobi ließ mich durch Hansen ersuchen, Carlini's Abhandlung wieder

abzudrucken, weil sie so wenig bekannt und doch so trefflich sei. Ich glaubte dies nicht thun zu dürfen, ohne die Einwilligung des Verfassers zu haben und schrieb deßhalb an ihn. Er antwortete mir: '... Je vous avoue que puisque Mr. Jacobi a noté des erreurs assez graves, j'aimerai que cet essai de ma jeunesse restât oublié, et il me semble que pour donner une bonne théorie de la convergence des séries (véritable complement de l'analyse moderne), il n'a pas besoin du faible appui de mes calculs. Mais si je me trompe en cela, je ferai de bon gré ce sacrifice de mon amour propre au progrès de la science . . . il me parait, que les arguments mathématiques gagnent beaucoup étant exprimés dans cette langue éminent philosophique' . . ."

Bezüglich dieser letzten Äußerung Carlinis antwortet Gauss am 4. Dezember: „Ich stelle nicht in Abrede, daß bei mehreren Stellen meiner Arbeit mir fühlbar geworden ist, daß ich denselben Gedanken in einer andern Sprache nicht ebenso prägnant und adäquat hätte ausdrücken können. Aehnliches Bewußtsein habe ich auch bei manchen meiner früheren Arbeiten gehabt, so wie umgekehrt, in den Zeiten, wo ich die meisten meiner Arbeiten lateinisch zu schreiben hatte, ich sehr oft den mir vorschwebenden Gedanken erst lange hin und her wenden mußte, bis ich eine einigermaßen genügende und doch oft keineswegs mich ganz befriedigende Wendung gefunden hatte. Doch kommt dergleichen nie vor, so lange man sich bloß im rein mathematischen (ich möchte sagen, im technisch-mathematischen Felde) bewegt, sondern hauptsächlich, wo man den Gegenstand und das Charakteristische seines Wesens aus einem höheren, gleichsam philosophischen — wie Lagrange zu sagen pflegte, metaphysischen — Standpunkte betrachtet . . . Über die Sache selbst, nemlich die Convergenz der Reihe für die Mittelpunktsgleichung, kann ich für jetzt mich nicht weiter auslassen. Da ich lange vor 1817 (Carlini's Arbeit erhielt ich 1818) die Aufgabe selbst und auf eine ohne allen Ver-

gleich kürzere Art aufgelöst hatte, so habe ich damals diese Abhandlungen ebenso wie jetzt Jacobi's Aufsatz nur ganz flüchtig angesehen, und nachdem ich in jener die Übereinstimmung des Hauptresultates mit dem meinigen bemerkt hatte, nicht weiter gelesen, daher war das von Jacobi gerügte Versehen von mir nicht bemerkt ..." und er fügt am 6. Dezember hinzu: „Ich muß eine Unrichtigkeit am Schluß meines letzten Briefes berichtigen. Ich glaubte nemlich, in Jacobi's Aufsatz stehe, daß Carlini die Convergenz für die Mittelpunktsgleichung richtig, aber für den Radius vector falsch angegeben habe, auch die Formel selbst hatte ich nur ihrer Form nach im Gedächtniß und meinte, daß sie mit meiner vor 40 oder mehr Jahren übereinstimmend gewesen sei. Das Wahre ist, daß meine Convergenzformel mit der von Jacobi übereinstimmt, nemlich wenn ε die Excentricität, e die Basis der hyp. Log. bedeutet, so convergiren die Coefficienten jener Reihe langsamer als jede fallende geometrische Progression, deren Exponent kleiner ist als $\frac{\varepsilon e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ oder als $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi \cdot e^{\cos\varphi}$ (wenn $\varepsilon = \sin\varphi$), aber etwas schneller als die geometrische Progression, deren Exponent dieser Größe gleich ist."

Auf diese Bemerkungen hin erklärte sich Schumacher sogleich Jacobi gegenüber zu einem Neudruck der Carlinischen Arbeit bereit und berichtete Gauss am 10. Dezember wiederum wie gewöhnlich in einer gegen Jacobi wenig freundlichen Weise: „Als ich Ihnen den ersten Brief schrieb, schrieb ich zugleich an Jacobi und ersuchte ihn, die Abhandlung von Carlini zu übersetzen ... Gestern Abend bekam ich einen Brief von Jacobi, daß er Sonntag d. 16. auf 3 Wochen nach Gotha ginge und dort die Übersetzung machen wolle. Es wären 3 Wochen, die er ruhig habe, nachher 'würde es für ihn vielleicht nicht mehr möglich sein' (stehen etwa neue Unruhen bevor?). Er will aber nicht allein übersetzen, sondern auch verbessern, und ist

sehr ungehalten mit Carlini, daß er diese Arbeit eine Jugendarbeit nenne, als hätte er jemals wieder etwas ähnliches gemacht. Es sei ohne Zweifel, daß Laplace sich sein ganzes Leben mit der Aufgabe gequält habe, ohne sie lösen zu können. Er kenne die Schwierigkeit, da er dazu ganz neue Methoden habe schaffen müssen, die er mir, sowie er Zeit habe, senden werde, und Dirichlet, der in ähnlichen Dingen der erste Meister sei?, habe die Aufgabe auch nicht lösen können. 'Aehnlich habe ich mich über Hamilton geärgert, dem ich über seine neue Methode (Princip?) in Dynamics ein Compliment machte, die das wichtigste ist, was seit 100 Jahren in England mathemathisches gemacht worden, und der auch vornehm thun wollte, und mir sagte, er hätte sie schon wieder vergessen' . . ."

Am 1. November legte Jacobi die in dem Briefe an seinen Bruder angekündigte Untersuchung „Über die Platonische Zahl" der Berliner Akademie vor; von dieser nicht veröffentlichten Arbeit findet sich ein Bruchstück in seinem Nachlaß, das zunächst zum Zwecke der Emendierung der fraglichen Stellen des Plato eine Fülle von scharfsinnigen philologischen Konjekturen bietet und schließlich in interessanten Erörterungen über die Frage endet, welche Beziehungen die arithmetischen Untersuchungen der alten Mathematiker zur Frage der Auflösung der Pellschen Gleichung $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ hatten.

Vom 7. November datiert fand sich in den hinterlassenen Papieren Jacobis eine Aufzeichnung: „Solution nouvelle d'un problème fondamental de géodésie", welches von M. E. Luther herausgegeben wurde und sich mit der Aufgabe beschäftigt, für eine gegebene Länge s eines geodätischen Bogens, die Breite B' seines Anfangspunktes und seinen Azimutwinkel T' in diesem Punkte, die Breite B'' des Endpunktes des Bogens, dessen Azimutwinkel T'' und die Längendifferenz dieser beiden Punkte zu bestimmen,

wofür Jacobi eine praktische Lösung mit Hilfe der Reihenentwicklungen der elliptischen Funktionen liefert; zugleich entwickelt er hier die in dem obigen Briefe an seinen Bruder erwähnten geodätischen Formeln.

In seiner Einsamkeit wurde auch wieder der Briefwechsel mit seinen Freunden und Schülern reger als in der letzten Zeit; er wurde im Laufe weniger Tage des Dezember wiederholt von Hesse über seine Resultate betreffs des Eliminationsverfahrens durch Determinanten für Gleichungen 2. und 3. Grades, sowie über die Form der Kurve 14. Grades unterrichtet, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer Kurve 4. Ordnung hindurchgeht, und noch kurz vor Beginn seiner Vorlesungen wurde er durch einen Besuch Richelots erfreut, der, wie alle Schüler Jacobis, durch die traurigen Erlebnisse seines Meisters tief erschüttert war.

Am 11. November erfreut er seine Frau zu deren Geburtstag durch Übersendung des Bildes, mit welchem Borchardt die gesammelten Werke Jacobis geschmückt hat, und noch bevor er während der Weihnachtsferien nach Gotha ging, schreibt er derselben am 7. Dezember: „Von Königsberg war ein junger Anatom Brücke nach Wien berufen worden, der Richelot einlud, ihn von Teplitz aus dort zu besuchen und bei ihm zu wohnen. Da jetzt viel für die Wiener Universität geschieht, und von allen Seiten die besten Leute hierher berufen werden, so äußerte R. dort zu einem Ministerialrath Koller, wenn ich nach Wien käme, könnte die Mathematik einen großen Aufschwung nehmen. Als R. in K. zurück war, reiste dort der junge Littrow, der Director der Wiener Sternwarte, von Petersburg zurückkehrend durch, dem R., der unterdeß hier meine jetzige Lage gesehen hatte, sagte, jetzt wäre der Zeitpunkt, mich zu acquiriren. Littrow ergriff dies mit Feuer, ging sogleich nach seiner Rückkehr zum Grafen Thun, und gerade an Deinem Geburtstage erhielt ich den ersten Brief in dieser

Sache, das Anerbieten einer mathematischen Professur in Prag mit 2500 Thlr. Gehalt. Theils durch mein Bedenken, daß man sich in der gelehrten Welt wundern würde, wenn man mich nach Prag und nicht nach Wien beriefe, theils ganz von selber kam man von Prag zurück, und es war nur noch von Wien die Rede. Es war dort schon der Antrag für einen andern österreichischen Mathematiker fertig, den man noch zur rechten Zeit zurückhielt. Das Gehalt sollte dasselbe bleiben, 2500 Thlr. und noch 100 Thlr. Wohnungsentschädigung, ich sollte nun meine Bedingungen stellen. Ich stellte dieselben Bedingungen, die ursprünglich Eichhorn und Flottwell für mich hier beim Könige beantragt haben, nämlich 3000 Thlr. Gehalt und günstigere Bedingungen für die Wittwenpension. Da man nicht ohne Weiteres auf diese Bedingungen einging, sah ich mich veranlaßt, alles dies dem Könige anzuzeigen . . ."

Jacobi war schon in den ersten Tagen des November von der Absicht der österreichischen Regierung unterrichtet worden, ihn nach Prag zu berufen, wußte aber auch bereits durch Du Bois-Reymond, dem es Brücke mitgeteilt hatte, daß der österreichische Minister durch direkte Intervention von Littrow und Brücke gedrängt wurde, Jacobi, wenn dieser weniger geneigt sein sollte, nach Prag zu gehen, eventuell für Wien zu gewinnen. Eine darauf bezügliche Mitteilung von Littrow beantwortete er deshalb, wie er an Richelot am 10. November schreibt, folgendermaßen: „Ich würde allem Vermuthen nach wohl auch in Prag glücklich und zufrieden leben können, müßte doch aber folgende Bemerkungen machen. Es würde meine Vocation nach Prag in der gelehrten Welt einige Verwunderung erregen; ich hätte in allen großen europäischen Akademieen als wirkliches Mitglied Sitz und Stimme, und sogar die große und seltene Ehre, einer der 8 Associés der Pariser Akademie zu sein, und da wäre es wie eine Art Ironie, wenn ich grade bei keiner ansäßig sein sollte. Obgleich ihm die

Menge der Arbeiten, die ich publicirt, bekannt sei, so wären es doch nur Vorarbeiten zu größeren, die ich seit 20 Jahren vorbereitet, und die in mehr oder weniger fertiger Form in meinem Pulte liegen. Es würde mir vielleicht gelingen, mit diesen Arbeiten die Memoiren der Wiener Akademie in mathematischer Hinsicht in ähnlicher Art zu heben, wie einst Euler die Petersburger. Dies würde aber nur möglich sein, wenn ich an der Akademie selber wäre. Überhaupt fürchtete ich, in Prag nicht die Erleichterung für die Publication meiner größeren und kleineren Werke zu finden, die ich wahrscheinlich in Wien haben würde. Er solle mich darüber beruhigen, denn die Stadt würde mir immer mit großen Vorzügen ausgestattet erscheinen, die mir für die Publication meiner Werke die größte Bequemlichkeit böte.“

Ohne daß die Berufungsangelegenheit irgend festere Form angenommen hatte, reiste Jacobi für 14 Tage nach Gotha und sandte schon am 5. Januar 1850 die umgearbeitete und verbesserte Arbeit von Carlini unter dem Titel „Untersuchungen über die Konvergenz der Reihe, durch welche das Keplersche Problem gelöst wird. Von Franz Carlini. Bearbeitet von C. G. J. Jacobi“ zur Aufnahme in die Astr. Nachr. an Schumacher, während Gauss auf die von Schumacher an ihn gerichtete Bitte, ihm seine kürzere, so viel früher gefundene Auflösung mitzuteilen, am 5. Februar 1850 mit den Worten erwiderte: „Von meiner Methode, den Grad der Convergenz der nach den cosinus und sinus der Vielfachen eines Winkels fortschreitenden eine beliebige periodische Function ausdrückenden Reihe zu bestimmen, habe ich noch eine numerische Rechnung, welche sich auf ein Beispiel der Mittelpunktsgleichung bezieht, aufgefunden, welches Blatt wohl 50 + Jahre alt sein mag. Die Methode leistet aber viel mehr, als bloß einen genäherten Ausdruck für ein sehr weit vom Anfange entferntes Glied zu finden ... Mir fehlt die Zeit, um die ganze Theorie in einer mir selbst genügenden Gestalt auszuführen ... Sie sind ganz im Irrthum,

wenn Sie glauben, daß ich darunter nur die letzte Politur in Beziehung auf Sprache und Eleganz der Darstellung verstehe. Diese kosten vergleichungsweise nur unbedeutenden Zeitaufwand; was ich meine, ist die innere Vollkommenheit. In manchen meiner Arbeiten sind solche Incidenzpunkte, die mich jahrelanges Nachdenken gekostet haben, und deren in kleinem Raum concentrirter Darstellung nachher niemand die Schwierigkeit anmerkt, die erst überwunden werden muß."

Die Bearbeitung der Carlinischen Abhandlung leitet Jacobi mit folgenden allgemeinen Betrachtungen ein: „Unter den Differentialgleichungen, auf welche die Anwendungen der Mechanik auf Astronomie führen, gibt es wenige, die streng integriert werden können. Die Astronomen nahmen deshalb zu unendlichen Reihen ihre Zuflucht, auf die sich, kann man sagen, das ganze Gebäude der neueren Astronomie stützt. In der Theorie der Bewegung der Erde und der alten Planeten schreiten die nach den Potenzen und Produkten der Exzentrizitäten, Neigungen und störenden Kräfte geordneten sukzessiven Approximationen mit so reißender Schnelligkeit fort, daß die Summe der fortgelassenen Glieder schwerlich eine beträchtliche Größe erreichen kann. Nichtsdestoweniger wäre es, um der Berechnung der Störungen größere Strenge zu geben, auch hier von Nutzen, bei jeder Entwicklung die Natur der numerischen Koeffizienten, ihr Verhältnis und den Grenzwert, dem es sich nähert, zu untersuchen. Man würde dann, wenn nicht den genauen Wert des vernachlässigten Teils der Reihe doch wenigstens Grenzen, innerhalb derer man ihn sich eingeschlossen denken kann, zu erkennen imstande sein. Aber wichtiger und fast unumgänglich notwendig wird diese Untersuchung in der Theorie der vier neuen Planeten und besonders der Pallas, bei der sich wegen ihrer großen Exzentrizität und Neigung und wegen der Nachbarschaft der störenden Jupitersmasse kaum die von den Größen der 10. Ordnung abhängenden Gleichungen mit den Gleichungen der 1. oder 2. Ordnung der alten Planeten

vergleichen lassen. Dieselben Schwierigkeiten bietet zum Teil die Mondtheorie dar, wie denn bekanntlich die Mathematiker anfänglich die Bewegung des Perigäums wegen Vernachlässigung der Glieder von höherer als der 2. Ordnung aus der Rechnung kaum halbsogroß fanden als die Beobachtung gibt ... Man denke sich jetzt, durch genaue Untersuchung der Art und Weise, wie die verschiedenen Koeffizienten zusammengesetzt sind, gelänge es allgemein, sei es durch bestimmte Integrale oder auf andere Art, das n. Glied als Funktion seines Index n auszudrücken, so würde man dann diese Funktion in eine nach den absteigenden Potenzen n fortschreitende Reihe entwickeln können. Man würde hierdurch ein Mittel besitzen, die Konvergenz oder Divergenz der aufeinanderfolgenden Koeffizienten zu erkennen, und in den Stand gesetzt sein, für sie mit geringer Mühe einen Näherungswert zu erhalten, und zwar einen solchen, der der Wahrheit desto näher kommt, je größer der Index der Koeffizienten wird. Dieser mit so glücklichem Erfolge auf die Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandte Kunstgriff scheint nicht minder wichtig in seinen Anwendungen auf die Astronomie werden zu können", und nun liefert er eine Übersetzung der Arbeit Carlinis, „die, obgleich sie von zahlreichen Fehlern entstellt ist und ihre Resultate falsch sind, doch unstreitig wegen der darin angewandten Methode und der Kühnheit ihrer Komposition zu den wichtigsten und bedeutendsten Arbeiten über die Bestimmung der Werte der Funktionen großer Zahlen gehört"; er verbessert die schon früher bezeichneten Fehler und fügt noch einen selbständigen Anhang für den Fall sehr kleiner Exzentrizitäten hinzu.

Kaum war Jacobi von dem Besuche der Seinigen in Gotha zurückgekehrt, als er statt einer Antwort auf die dem Minister gemeldete Berufung nach Wien eine Vorladung vor den Unterstaatssekretär Lehnert erhielt. Die Verdächtigungen, welche von den verschiedensten Seiten gegen Jacobi verbreitet wurden, waren so gehässiger Natur, daß im Ministe-

rium selbst von der offenkundigen politischen Tätigkeit Jacobis, wie sie bereits seit Ende des Jahres 1848 allgemein bekannt war, und die eine durchaus patriotische und monarchische Gesinnung bekundete, gar keine Notiz genommen wurde; daß er und der Kammergerichtspräsident von Stumpf in den Bezirksversammlungen einen Antrag an den Berliner Magistrat eingebracht, sich gegen den Huldigungsbefehl des Reichsverwesers zu erklären, wurde ignoriert; „es ist Zeit", heißt es in diesem von Jacobi verfaßten Antrage, „daß das Preußenvolk aus dieser Betäubung erwache; die abgetretene Politik des Überganges und der Versöhnung hat das preußische Staatsschiff einige Zeit als ein Fahrzeug erscheinen lassen, das in den stürmischen Wogen nicht mehr seinen eignen Bewegungen gehorcht. Man glaubt vielleicht diesen Augenblick benutzen und sich seiner als herren- und führerlos bemächtigen zu können... Noch niemals in der Geschichte hat ein Staat von 16 Millionen Einwohnern und 500 000 tapferen Soldaten freiwillig ohne Kampf und Widerstand seine Selbständigkeit aufgegeben ... Die Nationalversammlung hat ihr Mandat erhalten, für Preußen eine neue Verfassung zu gründen, nicht aber Preußens Selbständigkeit aufzugeben ... Sprecht aus, daß Ihr bei brüderlicher Hingebung an Deutschland und seine Einheit ein freies starkes preußisches Volk und eine starke preußische Regierung wollt, in welcher Ihr zugleich ein Palladium deutscher Freiheit seht, und daß Ihr gegen jede Maßregel protestirt, welche die Selbständigkeit des preußischen Volkes gefährdet und seine Regierung in der Leitung seiner innern Angelegenheiten bevormundet..."

Aber all diese Expektorationen eines im besten Sinne freiheitlich gesinnten und patriotischen Mannes konnten die gehässigen Verleumdungen der Reaktion nicht zurückdrängen. Lehnert erklärte Jacobi, „ein allgemein verbreitetes und durch mancherlei tatsächliche Angaben unterstütztes Gerücht bezeichne den Herrn Komparenten als einen Anhänger derjeni-

gen politischen Partei in Preußen, welche früher unter dem Namen der demokratischen, jetzt unter dem der Volkspartei, nicht nur der gegenwärtigen Staatsregierung und deren System, sondern überhaupt jeder konstitutionell-monarchischen Regierung feindselig gesinnt sei, zur Erreichung ihrer Zwecke für die Wiederherstellung der unbedingten Kopfzahl-Wahlen agitiere und die Pflicht der Treue gegen Se. Majestät den König gering achte ...", verlangte von Jacobi die Abgabe einer auf ausdrücklichen Befehl des Königs geforderten Erklärung, und berichtete darüber am 9. Januar 1850 dem Minister: „Herr Professor Jacobi erklärte hierauf, ich nehme keinen Augenblick Anstand, die gewünschte Erklärung abzugeben und kann nur bedauern, daß dieselbe nicht schon früher, namentlich vor der eingetretenen Verminderung meines Diensteinkommens von mir gefordert worden ist. Ich erkläre demnach hiermit, daß das in der obigen Vorhaltung angegebene Gerücht ein durchaus unbegründetes ist, und daß ich jedenfalls in der Zukunft in politischer Beziehung mich so, wie es einem treuen und dankbaren Diener Sr. Majestät geziemt, verhalten werde. Insbesondere bin ich entschlossen, die Treue gegen Se. Majestät den König, wie ich mir dessen auch in der Vergangenheit bewußt bin, auch in der Zukunft stets und unter allen Umständen zu bewahren und mich einer feindseligen Parteinahme gegen die Staatsregierung zu enthalten."

Jacobi selbst schreibt darüber am 15. Januar seiner Frau: „Lehnert war zweifelhaft, ob meine Gehaltsansprüche sich würden realisiren lassen. Bevor er die Sache befürworten könnte, müßte ich ihn von der Ungegründetheit der Gerüchte vollständig überzeugen, wonach ich zu einer Partei gehöre, die die constitutionelle Monarchie nicht wollte u. s. w.; diese Überzeugung würde er erlangt haben, wenn ich erklärte, daß dies nicht wahr wäre, und daß ich mich in Zukunft jeder feindseligen Parteinahme gegen die Regierung enthalten und als Beamter zu besonderer Treue gegen den

König verpflichtet fühlte. So ungefähr. Es ist der Wortlaut eines Gesetzes vom vorigen Juli, wonach man jeden Beamten, der dawider fehlt, absetzen kann. Indem ich mich zu dieser Erklärung bereit erklärte, ließ ich noch mein Bedauern hinzufügen, daß diese Erklärung nicht vor Ergreifung der Maßregel gegen mich mir abgefordert worden wäre und bei dem Treuversprechen für die Zukunft 'wie ich mir deren auch bisher bewußt gewesen wäre'. Mündlich aber nicht officiell sagte ich noch dem Geh. R. Lehnert, daß ich mich nicht für gebunden erachten würde, wenn mir die 1000 ₰ wieder gegeben würden, unter allen Umständen hier zu bleiben, sondern dies zum Theil auch von der Art, wie dies geschähe, abhängen würde; ferner daß ich von meinem Standpunkte aus das Verfahren gegen mich als eine reine Gewaltthat angesehen und mich daher begnügt hätte, den Minister zu fragen, ob man vielleicht mir auch noch mein übriges Gehalt zu nehmen beabsichtigte. Die Abnahme meiner Erklärung war erst, wie ich höre, dem Geh. R. Schulze aufgetragen worden, der es aber ablehnte, weil es nicht seine Sache sei ..."

Als Jacobi nach all den moralischen Pressionen, denen er ausgesetzt gewesen, trotzdem aus dem Ministerium auf seine Mitteilung von dem an ihn nach Wien ergangenen Rufe keine befriedigende Antwort erhielt, nahm er den Ruf dorthin an und gab am 16. Februar dem Minister davon Kenntnis:

„Als ich im November v. J. Sr. Majestät eine a. u. Anzeige der mir von Wien aus gewordenen Anerbietungen machte, erlaubte ich mir gleichzeitig, dem Herrn Geh. Cabinetsrath Illaire mitzutheilen, wie sehr ich dort um eine baldige Entscheidung gedrängt würde. Nachdem ein Monat verflossen war, ohne daß ich eine Nachricht erhielt, ob Sn. Majestät diese Angelegenheit zu berücksichtigen geruht hätte, und mir auch gesagt worden war, mein hoher väterlicher Freund, Alexander von Humboldt, habe dieserhalb

an E. Exc. und an den Herrn Ministerpräsidenten geschrieben und sei ebenfalls ohne Antwort geblieben, mußte ich meinen Verhandlungen mit dem Wiener Ministerium ihren ungehemmten Verlauf lassen. Bei meiner Rückkehr von Gotha, wo ich die Weihnachtszeit bei meiner Familie zugebracht, erhielt ich das erste Zeichen, daß diese Sache von Seiten des Königl. Cabinets an E. Ex. abgegeben worden war, indem E. Exc. mir eröffnen ließ, daß Sie bedingungsweise meinen Wunsch, womöglich im Vaterlande zu bleiben, befürworten würden, daß aber auch dann diese Angelegenheit noch sehr große Schwierigkeiten haben würde. Ich erfüllte die mir auferlegte Bedingung, weil sie mir nichts zu enthalten schien, was meinen Gesinnungen widerstrebte, konnte aber aus solcher mir gemachter Eröffnung keinen Anlaß entnehmen, den Gang der Wiener Unterhandlungen aufzuhalten. Auch erschien es mir aus mehreren Gründen zweifelhaft, ob diese Angelegenheit hier zu einem ersprießlichen Resultate würde geführt werden können. Es war mein sehnlicher Wunsch zwar, in meinem Vaterlande zu bleiben, dem ich ein Vierteljahrhundert lang mit allen Kräften, welche mir Gott verliehen, mich hingegeben; aber ich durfte dies doch nur wollen, wenn es mit Ehren geschehen könnte. Wenn Sn. Majestät geruht hätten, ein Wort des Wunsches auszusprechen, daß ich in Preußen bliebe, so hätte ich augenblicklich alle andern Unterhandlungen abgebrochen und alles der Gnade Sr. Majestät anheimgestellt. Es ist dieses aber bis jetzt nicht geschehen, und mir auch kein beruhigendes Anzeichen irgend einer Art kundgeworden, daß schließlich Sn. Majestät auch nur auf den Antrag Ew. Excellenz eingehen würden. Auch konnte ich mich der Besorgniß nicht entschlagen, daß dies unter Formen geschehen könnte, welche doch mir die Annahme unmöglich gemacht hätten. Als eine wesentliche Bedingung meines Hierbleibens betrachtete ich ferner die freiwillige Erstattung der Geldstrafe, mit welcher ich gewissermaßen belegt worden

war. Auch über eine solche Absicht war mir keine Kunde geworden. Und doch schien mir die Nothwendigkeit hiervon so selbstredend und einleuchtend, daß ich selber darüber keinen Antrag bilden konnte. Es mußte dies aber auch, so war meine Meinung, ganz unabhängig von jeder anderweitigen Verhandlung über mein Hierbleiben geschehen. Denn abgesehen davon, ob überhaupt vom privatrechtlichen Standpunkt aus jene Entziehung geschehen durfte, und ob nicht die Motive derselben jetzt vollständig fortgefallen sein mußten, so wäre es doch jedenfalls etwas sehr trauriges, wenn ich aus einer langjährigen Laufbahn, in der ich fortwährend von der freundlichsten Theilnahme des ganzen Auslandes begleitet worden bin, von der Regierung meines Vaterlandes mit einem solchen Schlusse entlassen würde. Aus diesen Gründen und Befürchtungen, welche auszusprechen mir jetzt erst durch das Schreiben Ew. Exc. Gelegenheit geworden ist, habe ich die unter dem 19. Januar an mich ergangene förmliche Vocation an die Wiener Universität, obgleich sie mir keine namhaften pecuniären Vortheile bietet, angenommen. Seitdem bin ich durch ein Handbillet des Ministers des Innern Graf Leo Thun vom 5. h. benachrichtigt worden, daß die K. Resolution über meine dortige Anstellung bereits bei demselben eingegangen sei, und mein Anstellungsdecret sofort ausgefertigt werden solle. Ich vermuthe, daß die Antrittszeit meines dortigen Amtes auf den 1. April h. bestimmt werden wird, in welchem Falle ich wahrscheinlich Ende April dorthin übersiedeln müßte. Nachdem diese Sache soweit gediehen ist, könnten nur triftige Anlässe es rechtfertigen, wenn ich gegen die dortigen Behörden den Wunsch ausspräche, meiner dort eingegangenen Verbindlichkeit enthoben zu werden. Obgleich für mich wenig Grund zu der Annahme ist, als könnte die diesseitige Regierung zur Bietung solchen Anlasses bereit sein, so will ich doch nicht unterlassen auszusprechen, was mir zur Veranlassung eines dergl. Schrittes genügend

erscheinen könnte. Es wären dies Maßnahmen, welche mich ganz in dieselbe Lage setzen, als wenn mir die bei meiner Übersiedlung nach Berlin verheißene, wegen meiner zahlreichen Familie an diesem theuren Orte unentbehrliche, auf Veranlassung Sr. Majestät Selbst von den beiden betheiligten Ministern beantragte, und später von dem hohen Unterrichtsministerium auf's neue lebhaft befürwortete, feste Besoldung von jährlich 3000 ℛ nicht auf eine allen Theilen unerwartete Art um 333 ℛ verkürzt worden wäre ... Ew. Excellenz bitte ich, Vorstehendes nicht als ein Gesuch oder als einen Antrag ansehen zu wollen, sondern nur als eine ausgesprochene Ansicht, in welchem Falle ich glaube, meiner gegen die oesterreichische Regierung eingegangenen Verbindlichkeit enthoben werden zu können."

Nun aber traten die Freunde Jacobis mit aller Kraft dafür ein, daß ihm alles, was er verlangte, bewilligt werde; Johannes Schulze, der überall erklärte, er wolle alle fortlassen, nur Jacobi nicht, der sei eine Naturkraft, schrieb an den König, er habe sich aus den Akten überzeugt, daß man ihm damals unrecht getan, als man ihm bei seiner Übersiedelung die versprochenen 3000 Taler nicht gegeben, und wieder war es die Hochherzigkeit des Königs, die alles in die gewünschten Wege leitete. Schon am 20. Februar schrieb der Minister an Humboldt: „Um Ew. Excellenz in einem wünschenswerthen Zusammenhange mit den Verhandlungen zu erhalten, welche hinsichtlich des Akademikers Prof. Dr. Jacobi noch gegenwärtig stattfinden, halte ich mich verpflichtet, Ew. Excellenz unter Bezugnahme auf das verehrliche Schreiben vom 28. v. M. in der Anlage Abschrift meines unter dem 11. d. M. an Jacobi gerichteten Erlasses und seine Antwort vom 16. d. M. zur geneigten Kenntnißnahme ganz ergebenst mitzutheilen. Durch die in der Antwort Jacobi's angeführten Umstände bin ich bestimmt worden, Allerhöchsten Orts auf Gewährung eines Jahrgehaltes von 3000 ℛ vom 1. October v. J. ab für Jacobi

anzutragen und den Herrn Finanzminister zu ersuchen, sich diesem Antrage anzuschließen."

Humboldt, von der Bereitwilligkeit des Königs unterrichtet, meldet sogleich Dirichlet: „. . . je crois cependant, que nous n'aurons pas à déplorer une perte si cruelle", und durch Kabinettsorder vom 5. März 1850 werden Jacobi „zu der Besoldung von 1667 ℛ der früher neben seinem Gehalt genossene, durch Meinen Erlaß vom 18. Juli v. J. entzogene Zuschuß in einem um 333 ℛ erhöhten Betrage, also mit 1333 ℛ vom 1. October vorigen Jahres ab wieder bewilligt und genehmigt, daß diese Summe so lange, bis sie für das Jahr 1851 etatmäßig gemacht werden kann, aus Meinem Dispositionsfonds gezahlt werde."

Am 20. März teilt Jacobi seinem Schwager, dem Chefpräsidenten von Wißmann in Frankfurt a. O., mit, daß alles erledigt sei; „während der Geldpunkt zwischen S. M. und dem Minister augenblicklich geordnet war, so wollte doch weder die vom Minister verfaßte Cabinetsordre der König unterzeichnen, noch die vom Cabinet ausgegangene der Minister mir praesentiren. Man hatte S. M. die Meinung beigebracht, ich hätte im Sommer 1848 gegen ihn und sein Haus declamirt, was mir natürlich nie eingefallen war. So waren 3 Cabinetsordres ent- und verworfen worden, bis dann endlich der Minister selbst eine vereinbarte, die alle befriedigte. Schulze brachte mir die Ordre vom König unterzeichnet, aber noch nicht vom Minister contrasignirt, ging sie genau mit mir durch und erklärte, der Minister würde sie nur contrasigniren, wodurch sie erst Gültigkeit bekäme, wenn ich mich mit der Fassung einverstanden und bereit erklärte, in Wien ablehnen zu wollen, was ich denn that. Ich kriege mein altes Gehalt, in einem um 333 ℛ erhöhten Betrag vom 1. October v. J. an, von wo die Entziehung datirte, wieder, als Gehaltszuschuß und nicht mehr wie früher als Unterstützung. Dies geschah am 8. Maerz . . . Marie wird gewiß noch den Sommer über in Gotha bleiben,

wahrscheinlich auch den Winter, und es ist nicht unmöglich, daß auch ich den ganzen Winter über mich dort aufhalte, behufs einer bestimmten mathematisch-astronomischen Arbeit, zu der ich den dortigen Astronomen Hansen brauche."

Jacobi erklärte nun dem österreichischen Ministerium, daß er unter den obwaltenden Umständen sein Vaterland nicht verlassen könne, und schlug statt seiner in Wien Rosenhain und Eisenstein vor, unbekümmert darum, daß letzterer nicht immer Jacobi gegenüber die schuldige Pietät bewiesen und den großen Mathematiker mit Unrecht stets als seinen Gegner betrachtet hat. So blieb denn Jacobi Deutschland, seinen Freunden und seinen Schülern erhalten, aber er ging aus dieser schweren Zeit an Geist und Körper gebrochen hervor. „1850 erging an Jacobi ein Ruf an die Universität Wien", lautet die nur aus wenigen Zeilen bestehende Aufzeichnung seiner Frau. „Er meldete dem Preuß. Ministerium seinen Beschluß, daß er diesen Ruf nur ausschlagen könne, wenn er wieder in sein früheres Gehalt zurückversetzt würde. Das Ministerium, in seiner nachhaltigen Verstimmung, wollte nicht gleich in sein Verlangen eingehen, und konnte andererseits einen Mann von Jacobi's Bedeutung nicht ohne Blame vor der allgemeinen wissenschaftlichen Welt fahren lassen. Es zögerte ohne Ende mit der Entscheidung, bis Jacobi — von Wien aus gedrängt — die Hoffnung aufgab, bleiben zu können, wie sein dringender Wunsch war, den Ruf nach Wien annahm, die Kisten zur Bibliothek bestellte und den Reisepaß nach Wien löste, der sich noch unter seinen Papieren findet. Da endlich — und entschieden zu spät — lief der Ministerial-Beschluß ein, der Jacobi nicht allein in sein früheres Gehalt zurückversetzte, sondern dasselbe noch um 300 ℔ erhöhte. Jeder Andere hätte es wohl unmöglich gefunden, sich aus dieser Situation noch herauszuziehen, aber Jacobi's großer Wunsch, im Vaterlande zu bleiben, wie in

seinen wissenschaftlichen Verbindungen bewog ihn, es noch durchzusetzen. Hieraus folgten natürlich höchst widerliche Verhandlungen mit dem nun beleidigten Wiener Ministerium, was sein Anrecht an Jacobi nun nicht wieder aufgeben wollte, und nur mit unendlicher Mühe war das Ziel zu erreichen. Alle diese Unruhen und gespannten Stimmungen mußten natürlich Jacobi's schon leidende Gesundheit schwächen; Leonhard's Abgang vom Gymnasium in Gotha mußte ohnehin bis zum Frühjahr 1851 abgewartet werden. Es wurde beschlossen, daß nach demselben Jacobi noch mit den Seinigen ein paar Monate in Thüringen zu seiner Stärkung zubringen, und dann gegen den Herbst 1851 die ganze Familie wieder nach Berlin zurückziehen sollte."

Humboldt waren in seiner eximierten Stellung beim Könige natürlich alle diese mit Jacobi geführten Verhandlungen im höchsten Grade peinlich, und wenn er auch das mögliche getan, um ihn in Berlin zu halten — „drei Monate habe ich für ihn gearbeitet" —, so hatte er doch schon im Jahre 1848 die politische Parteinahme des „rötlichen Mathematikers" nicht billigen können, und konnte sich, auch noch in den letzten Monaten nicht imstande, sich in den Geistes- und Gemütszustand des durch schwere Sorgen um die Existenz seiner Familie tief gedrückten Jacobi zu versetzen — freilich in der Annahme, daß seine Mitteilungen streng privater Natur bleiben — nicht enthalten, Schumacher gegenüber einige scharfe Bemerkungen über Jacobi zu machen, welche letzterer aber bei seiner steten Gereiztheit dem großen Mathematiker gegenüber sogleich Gauss mitteilte. Während Jacobi Eisenstein an seiner Stelle in Wien vorgeschlagen, schreibt Schumacher an Gauss am 31. März: „Dr. Friedländer aus Berlin erzählte mir, Eisenstein sei allerdings Mitglied eines demokratischen Clubs gewesen, mit Jacobi ist er nach F.'s Aussage ganz zerfallen ..." Und wie wenig stimmen alle diese Mitteilungen und Verdächtigungen mit

dem wahren Tatbestande! Das erste Schriftstück, welches Jacobi in seiner neuen festen Position am 27. März 1850 an den Minister richtete, lautete:

„. . . ich bitte, die Existenz des hiesigen Privatdocenten Dr. Eisenstein durch eine mit einem auskömmlichen Einkommen versehene Anstellung sicher zu stellen . . . ich muß auch meinerseits — wie es schon Humboldt und Gauss gethan — gegen E. E. aussprechen, daß E. E. durch diese Fürsorge für die Erhaltung eines mathematischen Genies, das durch seine Leistungen bereits einen sehr ehrenvollen Platz unter den ersten jetzt lebenden Mathematikern einnimmt, der Wissenschaft einen wesentlichen Dienst leisten, und die Genugthuung erlangen werden, eine mathematische Professur in einer so ausgezeichneten Weise zu besetzen, wie sich E. E. nur selten dazu die Gelegenheit darbieten wird . . . Gleichzeitig mit dem Dr. Eisenstein erlaube ich mir Ew. Exc. noch das Schicksal eines anderen bedeutenden Mathematikers dringend an's Herz zu legen, des Privatdocenten an der Breslauer Universität, Dr. Rosenhain, welcher neuerdings die Auszeichnung erfahren hat, daß eine seiner Arbeiten von der Pariser Academie d. W. durch ihren großen mathematischen Preis von 3000 frs. gekrönt worden ist. Diese Arbeit ist ebenso durch Tiefe wie durch einen fast colossalen Umfang ausgezeichnet und wird einen bleibenden Platz in der Wissenschaft einnehmen. Da sie zugleich eine von unserer Academie vorlängst bei einer feierlichen Gelegenheit gestellte Preisfrage erledigt, so wird wahrscheinlich auch die Berliner Academie d. W. dieselbe Arbeit, sobald ihr ein Preis zur Verfügung steht, mit demselben belohnen. Es ist daher eine Pflicht für mich, zu welcher ich aber noch ausdrücklich durch die Bitte des Prof. Kummer in Breslau aufgefordert werde, Ew. Exc. hohes Augenmerk auf die dringende Nothwendigkeit der Anstellung des Dr. Rosenhain zu richten . . . Der mathematische Universitätsunterricht kann, wenn er nicht hinter

der Zeit zurückbleiben soll, von einem einzigen Docenten unmöglich bestritten werden. Für die dazu durchaus nothwendigen zwei Ordinarien oder einem Ordinarius und Extraordinarius ist eine Summe von 2000 ℛ erforderlich, wofür in diesem Augenblicke, der vielleicht bald vorübergeht, das Fach der Mathematik mit 2 Professoren besetzt werden kann, welche mit dem heutigen Zustande der Wissenschaft vertraut sind, zu ihrer Entwicklung beitragen und sich bereits einen Namen erworben haben. Oft müssen, wenn ein solcher Zeitpunkt versäumt wird, später größere Summen für weniger bedeutende, ruhm- und namenlose Subjecte aufgewendet werden. Wenn man von Berlin absieht, so ergiebt eine kurze Rundschau über die andern preußischen Universitäten, daß dort für den mathematischen Unterricht kaum die Hälfte von jener mäßigen Summe aufgewendet wird. In Königsberg, wo durch Richelot und Hesse der mathematische Unterricht vollkommen auf seiner früheren Höhe erhalten wird, von denen der erstere Correspondent unserer Academie d. W. ist, und auch der andere in einigen Theilen der Mathematik den ersten Rang behauptet und deßhalb, besonders von englischen Mathematikern, häufig mit Auszeichnung genannt wird, hat der erstere 700 ℛ, der andere 300 ℛ Gehalt. In Breslau bedarf die große und segensreiche Wirksamkeit des alleinigen Professors Kummer einer nothwendigen Ergänzung, zu der sich Rosenhain's Talent und Gelehrsamkeit auf glückliche Weise darbietet. Wie schwach in Halle für Mathematik gesorgt ist, ist Ew. Exc. bekannt; hier ist die nothwendige Stelle für Dr. Eisenstein, der diese Universität aus ihrem mathematischen Dunkel erlösen kann. In Bonn besteht die Abnormität, daß für Mathematik und Physik zusammen nur ein einziges Ordinariat da ist. Der höhere mathematische Unterricht liegt in den Händen des Professor Heine, der ohne Gehalt ist... Nach dieser Sachlage erscheinen die Zustände des mathematischen Unter-

richts auf diesen Universitäten, so wie die persönlichen Verhältnisse der betreffenden Docenten einer Abhülfe bedürftig, von der zu wünschen ist, daß sie nicht zu lange beanstandet werde, da sie grade jetzt auf eine im Verhältniß zu den aufzuwendenden Mitteln sehr günstige Art geleistet werden kann. Schließlich bemerke ich, daß die im Vorstehenden von mir ausgesprochenen Ansichten ganz diejenigen meines hochgeehrten Collegen, des Professor Dirichlet, sind . . .“

Nachdem Jacobi noch am 10. Januar eine nicht veröffentlichte Note „Über die Entwicklung des inversen Quadrats der Entfernung zweier in derselben Ebene befindlichen Planeten“ in der Akademie gelesen und im Februar derselben eine „Mittheilung über einen Codex der Ptolemäischen Optik im Besitze der Königl. Bibliothek zu Berlin“ vorgelegt, welcher, eine lateinische Übersetzung aus dem Arabischen, wie Jacobi glaubte, Pertz aber später bestritt, seit unbestimmter Zeit im Besitze der Königl. Bibliothek befindlich, erst neuerdings wieder aufgefunden sein sollte, machte er noch in demselben Monat der Akademie eine „Vorläufige Mittheilung über den von Lagrange behandelten Fall der Rotation eines schweren Körpers. Angabe des Resultats, daß sich diese Rotation durch die gegenseitige Lage zweier rotirender Körper darstellen läßt, welche gar keiner beschleunigenden Kraft unterworfen sind“, und sandte die teilweise Ausführung dieser Arbeit, datiert vom 17. März 1850 aus Berlin Hôtel de Londres, wo er seit der Trennung von seiner Familie wohnte, unter dem Titel „Sur la rotation d'un corps“ an die Pariser Akademie, welcher dieselbe am 30. Juli vorgelegt wurde.

Das Problem der Rotation eines beliebigen festen Körpers, der keiner beschleunigenden Kraft unterworfen ist, kann, wie Jacobi findet, mittels der Funktionen $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x \ldots$, $H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x$

$+\cdots$ in eleganter Form dadurch gelöst werden, daß sich mit Hilfe derselben die neun cosinus durch die Zeit ausdrücken lassen, und zwar findet man, wenn x proportional der Zeit ist, die cosinus der Winkel, welche in jedem Augenblick die Lage der Hauptachsen des Körpers bestimmen, Brüchen gleich, welche die Funktion Θ zum gemeinsamen Nenner haben, während die neun Zähler, von konstanten Faktoren abgesehen, dieselbe Funktion Θ sind, in welcher nur x um eine imaginäre Konstante vermehrt ist, und zwar setzt sich die in Frage stehende Rotation aus zwei periodischen Rotationen zusammen, deren Perioden im allgemeinen untereinander inkommensurabel sind. Um eine klare Vorstellung von der Bewegung zu geben, läßt Jacobi die Achsen x und y in der unveränderlichen Ebene eine gleichförmige Rotationsbewegung mit einer bestimmten Geschwindigkeit vollziehen und bezieht die Lage des Körpers auf diese beweglichen Achsen und die feste z-Achse, welche perpendikulär zur unveränderlichen Ebene ist. Setzt man nun $x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$, $y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z'$, $z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'$, worin die Achsen der x', y', z' die Hauptachsen des Körpers sind, seien h die lebendige Kraft, l das Rotationsmoment in der unveränderlichen Ebene, A, B, C die drei Trägheitsmomente in bezug auf die Achsen der x', y', z', setzt man ferner voraus, daß man für das mittlere Moment B $Bh > l^2$, $A > B > C$, und $Bh < l^2$, $A < B < C$ habe, sei der Modul der in die Formeln eintretenden elliptischen Transzendenten $\varkappa = \sqrt{\frac{A-B}{B-C}}\sqrt{\frac{l^2-Ch}{Ah-l^2}}$, werde endlich a durch die Gleichung definiert $\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}} = \sin\operatorname{am}(K'-a, \varkappa')$, oder wenn $\sin\beta = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}}$ gesetzt wird, durch $a = \int\limits_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1-\varkappa'^2\sin^2\beta}}$, und die Zeit t durch $u = nt + \tau$ er-

setzt, worin τ eine willkürliche Konstante, so erhält man, wenn $n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}$, $\Theta_1(u) = \Theta(K-u)$, $H_1(u) = H(K-u)$, für die neun Größen $\alpha, \beta, \ldots$ die einfach periodischen Funktionen der Zeit

$$\alpha = -\frac{\Theta_1(0)[H(u+ia)+H(u-ia)]}{2H_1(ia)\Theta(u)},$$

$$\beta = -\frac{\Theta(0)[H_1(u-ia)+H_1(u+ia)]}{2H_1(ia)\Theta(u)},$$

$$\gamma = \frac{H_1(0)[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)]}{2iH_1(ia)\Theta(u)},$$

und ähnliche Ausdrücke für die sechs anderen cosinus, während die Rotationsgeschwindigkeiten um die Achsen der x, y, z, wenn $f = n\sqrt{\varkappa\varkappa'}\,.\,\Theta_1(0)$, durch die Ausdrücke bestimmt sind

$$-\frac{f[\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)]}{2iH_1(ia)\Theta(u)},\quad \frac{f[\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)]}{2H_1(ia)\Theta(u)},\quad \frac{h}{l}.$$

Für die Achsen der x und y, welche in der unveränderlichen Ebene eine gleichförmige Rotationsbewegung um den festen Punkt in dem Sinne des zuerst auf den Körper ausgeübten Stoßes haben, wird der der Zeit proportionale Winkel, welchen sie in dem Zeitintervalle t beschreiben, $nn't$ sein, worin

$$n' = \frac{1}{A-C}\left(C\frac{d\log H(ia)}{da} - A\frac{d\log\Theta(ia)}{da}\right)$$

ist. Indem er ferner die H e r m i t e schon früher mitgeteilten Formeln zugrunde legt

$$H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\frac{i[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}{2H(ia)\Theta(u)} = \frac{2q^{\frac{1}{2}b}}{1-q^b}$$

$$-2\left(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b}\right)\left(\frac{q(1+q^2)\cos 2x}{(1-q^{2-b})(1-q^{2+b})}\right.$$

$+\left.\frac{q^2(1+q^4)\cos 4x}{(1-q^{4-b})(1-q^{4+b})}+\cdots\right)$, und ähnliche, welche, wie er früher nachgewiesen, am direktesten zur inversen Transformation und der Division der elliptischen Funktionen führen, leitet

er analoge Fouriersche Reihenentwicklungen für die Werte der sechs Größen $\frac{\alpha}{\alpha''}$, $\frac{\alpha'}{\alpha''}$, $\frac{\beta}{\beta''}$, $\frac{\beta'}{\beta''}$, $\frac{\gamma}{\gamma''}$, $\frac{\gamma'}{\gamma''}$ oder für die Tangenten der Winkel her, welche die Projektionen der Achsen x', y', z' auf den Ebenen der xz und der yz mit der Achse der z bilden. Jacobi bemerkt noch, daß die Formeln des Rotationsproblems als Ausgangspunkt dienen können, um die Fragen zu beantworten, welche analog denen sind, die Gauss in der theoria motus in bezug auf die elliptische und hyperbolische Bewegung behandelt hat.

Nachdem er in den Osterferien wieder einige Wochen bei seiner Familie in Gotha verweilt, wo er mit Hansen gemeinsam unternommene mathematisch-astronomische Arbeiten weiter ausführte, kehrte er mit Beginn des Sommersemesters nach Berlin zurück, um am 30. April die angekündigte Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Anwendung auf die Kreisteilung zu beginnen, die er auch bis zum 14. August vor zwölf Zuhörern fortsetzte.

Kaum hatte Jacobi seine Vorlesungen begonnen, als er in den ersten Tagen des Mai durch den Besuch von Rosenhain überrascht wurde, den man seiner politischen Bestrebungen wegen aus Breslau ausgewiesen hatte; es bedurfte des ganzen Einflusses von Jacobi, dem man jetzt in Regierungskreisen sehr freundlich entgegenkam, um auszuwirken, daß Rosenhain einige Tage zu einer wissenschaftlichen Konferenz mit ihm in Berlin sich aufhalten durfte.

Jacobi nahm nun in diesem Sommer, durch seinen Briefwechsel mit Hesse veranlaßt, frühere Untersuchungen über algebraische Kurven wieder auf und unterbreitete der Akademie am 13. Juni den „Beweis des Satzes, daß eine Kurve n^{ten} Grades im allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten hat“. Poncelet hatte den Grund eines Paradoxons, welches die Theorie der gegenseitigen Polarität zweier Kurven bietet, in den Doppeltangenten und Wendepunkten einer Kurve n. Ordnung erkannt, denen die Doppelpunkte und

Rückkehrpunkte ihrer Polarkurve entsprechen. Wenn im allgemeinen die Anzahl der Doppeltangenten der Kurve n. Grades α, die Anzahl der Wendepunkte β ist, so war zur Beseitigung des Paradoxons zu zeigen, daß $2\alpha + 3\beta = n^3(n-2)$ ist; da nun einzelne Sätze vermuten ließen, daß die Kurven n. Grades im allgemeinen — wenn sie keine Doppelpunkte besitzen — $3n(n-2)$ Wendepunkte haben, so erfüllte Plücker diese Gleichung durch die Annahme der Werte $\alpha = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$, $\beta = 3n(n-2)$ und erwies später die allgemeine Richtigkeit des Wertes von β; Jacobi will nun auch den 1. Teil bewahrheiten, daß die Kurven n. Ordnung im allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten besitzen. Nachdem er den bereits früher entwickelten Satz von neuem bewiesen, daß, wenn h die Wurzel einer Gleichung m. Grades $0 = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m$ ist, deren Koeffizienten rationale ganze Funktionen von x und y sind, und $B_0, B_1, \ldots B_m$ resp. die daß diese Gradzahlen dieser Funktionen bedeuten, für den Fall, Zahlen eine arithmetische Reihe bilden, die Bedingungsgleichung, welche erforderlich ist, damit die vorgelegte Gleichung zwei gleiche Wurzeln habe, auf den Grad $(m-1)(B_0 + B_m)$ steigt, indem er zeigt, daß die Diskriminante $\varDelta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m)$ eine von allen überflüssigen Faktoren freie, rationale ganze homogene Funktion von $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$, von der $2m-2$. Dimension ist, stellt er den invarianten Charakter der Diskriminante durch den Nachweis fest, daß, wenn eine gegebene Gleichung m. Grades $0 = F(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_m h^m$ durch die Substitution $h = \frac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}$ in die Gleichung $0 = (\gamma + \delta g)^m \cdot F\left(\frac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}\right) = \beta_0 + \beta_1 g + \cdots + \beta_m g^m$ transformiert wird, hierdurch die Bedingungsgleichung $\varDelta = 0$, welche zwischen den Koeffizienten der gegebenen Gleichung stattfinden muß, damit zwei ihrer Wurzeln gleich werden, keine weitere Veränderung erleidet, als daß der Ausdruck $\varDelta$ mit $(\gamma\delta' - \gamma'\delta)^{m^2-m}$

multipliziert wird, oder daß $\Delta(\beta_0, \beta_1, \cdots) = (\gamma\delta' - \gamma'\delta)^{m^2-m} \cdot \Delta(\alpha_0, \alpha_1, \cdots)$ ist. Um nun die Anzahl der Doppeltangenten einer Kurve n. Ordnung zu finden, die er auf die homogene Form $f(x, y, z) = 0$ bringt, worin z eine beliebige Konstante oder die Einheit bedeutet, stellt er dieselbe mit der Gleichung der Tangente zusammen und fragt, wann zwei der weiteren $n-2$ Schnittpunkte der Tangente mit der Kurve zusammenfallen, die Tangente also Doppeltangente wird. Das Problem führt unmittelbar auf die für die Diskriminante entwickelten Hilfssätze, und es ergibt sich leicht, daß die Kurven n. Grades im allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten haben, und ebenso einfach folgt, daß eine Kurve n. Grades mit der erwähnten Einschränkung im allgemeinen $3n(n-2)$ Wendepunkte besitzt; was endlich noch die Frage nach der Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kurven m. und n. Ordnung betrifft, so ergibt sich mit Hilfe ähnlicher Schlüsse für dieselbe $mn(m-1) \cdot (n-1)$, was auch aus der Theorie der Polarkurven gefolgert werden kann.

Die Aufregungen des letzten Jahres hatten Jacobis Gesundheit derart erschüttert, daß er den Anstrengungen der wissenschaftlichen Arbeit und der Lehrtätigkeit nicht gewachsen zu sein fürchtete, und deshalb für den Winter keine Vorlesung ankündigte; er schrieb im Juni seiner Frau, daß er beabsichtige, in der ersten Hälfte des August nach Gotha zu kommen, um dort bis zum 14. Oktober zu bleiben, später sie wieder zu ihrem Geburtstag bis zum 17. Januar zu besuchen und „sodann bis Pfingsten in Berlin zu bleiben, um mich dann den ganzen nächsten Sommer Thüringen zu weihen — doch hängt alles von dem Fortgange des Druckes des zweiten Bandes meiner Abhandlungen ab“.

Als Jacobi nach Ablauf der Herbstferien aus Gotha nach Berlin zurückgekehrt war, legte er am 11. November der Akademie eine Note vor „Über ein neu aufgefundenes

Manuskript von Leibniz, nebst Bemerkungen über die Schrift: opusculum de praxi numerorum, quod algorismum vocant", in der er Mitteilungen macht über einen Bericht des Dr. Gerhardt, der in Hannover die verloren gegangene 20jährige Korrespondenz von Leibniz mit dem älteren Bernoulli wieder aufgefunden, aus der ersichtlich, daß das Zeichen $\int$ von Leibniz und nicht von dem jüngeren Bernoulli herrührt, ohne daß jedoch Leibniz zu der Funktion unter dem Zeichen das Inkrement der Variable hinzufügt. Jacobi bespricht außerdem die oben betitelte, in seinem Besitze befindliche und im Jahre 1503 gedruckte kleine Schrift opusculum etc., worin schon die Regeln für die Ausziehung der Kubikwurzeln gegeben werden.

Die nahen Beziehungen zu Hansen, dessen Familie mit der Jacobis in Gotha eng befreundet war, hatten eine äußerst rege Korrespondenz über die ausgezeichneten Störungsuntersuchungen dieses Astronomen zur Folge. Am 13. November schreibt Jacobi an Hansen:

„Meinen größten Dank für Ihre gütige Mittheilung, durch welche mir und, will's Gott, vielen andern das Leben wesentlich erleichtert wird, indem man nun zu der neuen Form Ihrer Störungsgleichungen auf eine ebenso einfache und klare als naturgemäße Weise, und nicht mehr mit verbundenen Augen gelangt . . . Vielleicht erlauben Sie mir, die Stelle desjenigen zu übernehmen, der von einer herrlichen Statue den Staub abwischt, damit sie in ihrer ganzen Schönheit erscheint. Es soll nichts so die Unbefangenheit des Beobachters stören, als wenn er zuvor das Resultat kennt: aehnliche Gefahr bietet die Kenntniß des Resultats auch dem Mathematiker bei seinen Schlüssen. Ich will Ihnen im Folgenden einige Bedenken unterbreiten, die mir aufgestoßen sind; sie sind rein formeller Natur und tangiren den Gang des Ganzen nicht im Mindesten. Nur scheint mir, muß einiges in der Art auf den Kopf gestellt werden, daß Folge Ursache und Ursache Folge wird . . . Mit dieser

kleinen Aenderung scheint mir jetzt die Sache ganz vollkommen und in der Form, in welcher sie in der Wissenschaft bleiben wird. Wenn diese Aenderung nicht zu machen wäre, hätte ich Sie gern um die Vergünstigung gebeten, Ihren Brief hier abdrucken lassen zu dürfen, um mich damit prahlen zu können, daß eine so capitale Sache, wie diese Ableitung, mir zuerst mitgetheilt worden ist ... Anfangs des nächsten Monats hoffe ich Sie wiederzusehen, und brenne danach, weiter zu sehen, wie Sie diese Form der Differentialgleichungen anwenden. Ich schreibe jetzt an einer zweiten Abhandlung über die Rotation ... Übrigens bin ich durch dieses alles wieder auf meine Differentialgleichungen des Problems der drei Körper aufmerksam geworden, die ich wohl zu sehr vernachlässigt habe ..."

Die 2. Abhandlung über die Rotation, von welcher Jacobi in diesem Briefe spricht, wurde in der Tat von ihm im Laufe des Jahres 1850 nahezu vollendet, aber nicht mehr veröffentlicht; erst im Jahre 1891 gab Lottner dieselben aus seinem Nachlasse unter dem Titel „Fragments sur la rotation d'un corps" heraus, eine schwierige Arbeit, welche der Herausgeber, der sich selbst schon früher eingehend mit diesem Probleme beschäftigt hatte, überaus befriedigend durchgeführt hat. In dem ersten Abschnitte „Second mémoire sur la rotation d'un corps non soumis à des forces accélératrices" leitet Jacobi zunächst nach Entwicklung einiger Hilfsformeln aus der Theorie der Transformation 2. Grades der elliptischen Funktionen und auf Grund der in dem ersten Mémoire über die Rotation entwickelten Formeln den Satz her, daß, wenn wieder A, B, C die Hauptträgheitsmomente, l das Rotationsmoment in der unveränderlichen Ebene, h die lebendige Kraft, und man auf die unveränderliche Ebene die drei Trägheitsachsen der x', y', z' und die augenblickliche Drehungsachse projiziert, zwischen der Zeit t und jeder der Winkelgeschwindigkeiten S dieser vier Projektionen dieselbe Differentialgleichung

$$dt = \frac{\pm dS}{2\sqrt{-\left(S-\frac{l}{A}\right)\left(S-\frac{l}{B}\right)\left(S-\frac{l}{C}\right)\left(S-\frac{h}{l}\right)}}$$

bestehen wird, wobei die Integralwerte von S, welche zwischen $\frac{l}{A}$ und $\frac{l}{B}$ liegen, die Winkelgeschwindigkeiten der Projektionen auf die unveränderliche Ebene von der Achse der z' und der momentanen Drehachse, die, welche zwischen $\frac{l}{C}$ und $\frac{h}{l}$ liegen, die Winkelgeschwindigkeiten der Projektionen auf dieselbe Ebene von den Achsen der x' und y' darstellen. Aus dem elliptischen Integral werden Grenzen für die Oszillationsdauer und Beziehungen zwischen den Bewegungen des Körpers hergeleitet für den Fall, daß die Konstanten oder die Anfangsdaten der Bewegung in bestimmten Beziehungen zueinander stehen. Bezeichnet man eine zweite Rotation als die konjugierte, wenn diese von denselben Größen $\frac{l}{A}, \frac{l}{B}, \frac{h}{l}, \frac{l}{C}$ abhängt, aber in umgekehrter Ordnung, so wird die, welche belebt ist von einer größeren lebendigen Kraft, auch in jedem Zeitmoment eine größere Rotationsgeschwindigkeit um die momentane Drehachse haben, und ähnliche Eigenschaften, welche aus der Natur des elliptischen Integrales entspringen. Es werden sodann die bekannten Ausdrücke der neun cosinus $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ durch drei Winkel ψ, ψ_1, ψ_2 hergeleitet, und diese mit Hilfe von ϑ-Funktionen durch die Zeit ausgedrückt. Ein Supplement zu diesem Mémoire ist betitelt „Expressions elliptiques des cosinus des angles, qu'un système quelconque d'axes rectangulaires fixes dans le mobile fait avec les axes des x, y, z fixes dans l'espace", und enthält Formeln, welche mit Hilfe der früheren durch Koordinatentransformation und die Relationen zwischen Produkten von vier ϑ-Funktionen hergeleitet sind.

Der zweite und dritte Abschnitt, den Jacobi nach Lottners Ansicht zu einem einzigen Mémoire zum Zwecke

der Entwicklung der gesamten Theorie von Lagrange vereinigen wollte, sind betitelt: „Nouvelle théorie de la rotation d'un corps de révolution grave suspendu en un point quelconque de son axe“ und „Sur la rotation d'un corps de révolution grave autour d'un point quelconque de son axe.“

In dem ersten Teile der Arbeit war der Winkel ψ durch ein elliptisches Integral 3. Gattung ausgedrückt, und sein Wert als Funktion der Zeit durch $\psi = -n'u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$ dargestellt; doch wäre die Lösung des mechanischen Problems, wie Jacobi hervorhebt, unvollkommen geblieben, wenn man nicht den Umstand benutzt hätte, daß der Divisor des Logarithmus den besonderen Wert $2i$ hat, „on aurait fait tort à l'analyse des fonctions elliptiques“; dadurch erhielt man, wenn $\psi + n'u = \psi'$ gesetzt wurde,

$$\psi' = \frac{1}{2i}\log\frac{1+i\operatorname{tg}\psi'}{1-i\operatorname{tg}\psi'} = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

und somit $\operatorname{tg}\psi' = \frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{i[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}$. Jacobi wirft nun die Frage ganz allgemein auf, wann ein Integral 3. Gattung auf Θ-Funktionen reduziert für den $\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$ den Faktor $\frac{1}{2i}$ liefern wird, und spricht den Satz aus, daß, wenn $F(x)$ eine ganze Funktion von x vom 4. Grade, a und m Konstanten sind, das auf ein elliptisches Integral 1. Gattung und den Logarithmus des Quotienten von zwei ϑ-Funktionen reduzierte elliptische Integral 3. Gattung $\int\frac{m\,dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}}$ zum Multiplikator des Logarithmus den konstanten Faktor $\frac{m}{\sqrt{F(a)}}$ hat. Es muß also der „Faktor des elliptischen Integrales 3. Gattung“ $\frac{m}{\sqrt{F(a)}} = \frac{1}{2i}$ sein, wenn die Lösung des Problems so soll vervollkommnet werden können, wie es bei der Rotation eines Körpers ohne sollizitierende Kräfte der Fall ist.

Dirichlet hatte ferner Jacobis Aufmerksamkeit darauf gelenkt, zu untersuchen, wie es bei dem von Lagrange behandelten Falle sich verhalte, wo für den Fall der Rotationsbewegung eines schweren Umdrehungskörpers um einen beliebigen Punkt seiner Achse die Winkel, welche die Schnittlinie des beweglichen Äquators des Körpers und der festen Horizontalebene mit zwei festen Graden in diesen Ebenen macht, resp. der Summe und Differenz von zwei elliptischen Integralen 3. Gattung gleich sind, und Jacobi findet, daß die Faktoren der beiden elliptischen Integrale ebenfalls $\frac{1}{2i}$ sind, daß also auch hier die obenbezeichnete Durchführung des Problems möglich ist. Indem Jacobi aber diese Betrachtung auch auf diejenigen elliptischen Integrale anwendet, durch welche Lagrange die Rotation eines durch die Schwere bewegten Körpers bestimmt hat, in welchem der feste Punkt auf einer der Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes gelegen ist, und die Trägheitsmomente in bezug auf die beiden anderen Hauptachsen einander gleich sind, zeigt er zunächst, daß, wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei ganze Funktionen, bei denen der Grad von $\varphi(x)$ den von $f(x)$ nicht übersteigt, und $a, b, c, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind, das Integral $\int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)\sqrt{F(x)}}$ die Summe von mehreren elliptischen Integralen 3. Gattung, und daß der Faktor eines jeden einer Wurzel a entsprechenden Integrales $\frac{\varphi(a)}{f'(a)\sqrt{F(a)}}$ ist. Daraus folgt aber wieder unmittelbar, daß in dem von Lagrange behandelten Falle die Faktoren der Integrale 3. Gattung, durch welche sich die Winkel ψ_1 und ψ_2 ausdrücken, $\pm\frac{1}{2i}$ sind, und es daher auch hier gelingt, die neun cosinus als einfache algebraische Funktionen der ϑ-Transzendenten auszudrücken.

Mit Hülfe dieser Formeln leitet nun Lottner den hier von Jacobi ohne Beweis ausgesprochenen Satz her, daß die Rotation eines schweren Umdrehungskörpers um einen be-

liebigen Punkt seiner Achse ersetzt werden kann durch die relative Bewegung zweier Körper, welche beschleunigenden Kräften nicht unterworfen sind, welche sich um ein und denselben festen Punkt bewegen und in ihren Rotationsbewegungen dieselbe unveränderliche Ebene und dieselbe mittlere oszillatorische Bewegung besitzen. Auch mit Hilfe dieses Satzes kann wieder der schon oben behandelte Fall auf ϑ-Funktionen zurückgeführt werden.

Auf den Brief, in welchem er Hansen von seinen Aufzeichnungen über das Rotationsproblem berichtete, antwortet ihm dieser bezüglich der Verbesserungen seiner Störungsformeln: „Sie haben zu den vielen Belehrungen, die ich Ihnen verdanke, durch Ihre letzte Mittheilung eine neue und wichtige hinzugefügt, und mich dadurch wieder unendlich erfreut. Indem Sie bloß das bescheidene Amt des Reinigers einer Statue übernehmen zu wollen versicherten, nahmen Sie den Meißel in die kunstgeübte Hand, meißelten die unschönen Stellen derselben ab und verhalfen ihr dadurch zu schönen dauernden Formen.“ Als Frucht dieser Korrespondenz veröffentlicht Hansen im Crelleschen Journal den „Auszug eines Schreibens des Herrn Direktor P. A. Hansen an Herrn Professor C. G. J. Jacobi“, in welchem er auf Jacobis Vorschlag alle Systeme von Koordinaten, welche die Eigenschaft besitzen, daß ihre ersten Differentiale in bezug auf die Zeit in der gestörten Bewegung dieselbe Form haben wie in der ungestörten, als ideale Koordinaten bezeichnet und folgert, daß, wenn L eine Funktion bloß von idealen Koordinaten ist, ohne deren Differentiale oder die veränderlichen willkürlichen Konstanten sonst zu enthalten, und A die Funktion bedeutet, in die L übergeht, wenn man darin τ statt t substituiert, insofern die Zeit t nicht in den, in den Ausdrücken für x, y, z enthaltenen veränderlichen willkürlichen Konstanten vorkommt, dann in der gestörten wie in der ungestörten Bewegung $\frac{dL}{dt} = \frac{\overline{\partial A}}{\partial \tau}$

*

ist, wo der Strich über der Funktion bedeutet, daß man nach der Differentiation τ in t verwandeln soll.

Aber nicht bloß mit Hansen stand Jacobi in dieser Zeit in reger Korrespondenz, auch Richelot, Rosenhain, Heine und Hesse teilten ihm stets die Resultate ihrer Arbeiten mit und suchten bei ihm Belehrung; so schreibt ihm Hesse am 27. November: „Der Grad der Gleichung der Schmiegungsebene einer Curve doppelter Krümmung, entstanden aus dem Schnitt zweier algebraischer Oberflächen, läßt sich immer um 2 Einheiten in Rücksicht auf die Coordinaten des Berührungspunktes mit Hülfe der Gleichungen der beiden Oberflächen reduciren . . .“ Für den Satz, den ihm Hesse mitteilt, daß $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} : \cdots : \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} : \cdots = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} : \cdots : \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} : \cdots$, wenn u eine homogene Funktion von x, y, z, ferner $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, und v die Determinante der 2. Differentialquotienten ist, liefert ihm Jacobi umgehend einen einfachen Beweis mit Hilfe der Eulerschen Relationen für homogene Funktionen.

Nachdem er noch am 9. Dezember der Akademie eine nicht veröffentlichte Note „Über die Zusammensetzung der Zahlen durch Potenzen“ vorgelegt, beendet er am 15. Dezember eine größere Arbeit über die Fragen, welche in der letzten Zeit den Gegenstand seiner Korrespondenz mit Hansen gebildet hatten, und veröffentlicht dieselbe unter dem Titel „Auszug zweier Schreiben des Prof. C. G. J. Jacobi an Herrn Direktor P. A. Hansen“ im Crelleschen Journal. Jacobi bezeichnet als veränderliche willkürliche Konstanten oder Elemente in der Theorie der Störungen gewisse Funktionen der Koordinaten, ihrer ersten Differentialquotienten und der Zeit, welche in der ungestörten elliptischen Bewegung einer willkürlichen Konstante gleich werden oder deren Differential durch die Substitution der Differentialgleichungen des ungestörten Problems identisch verschwindet,

und diese Funktionen haben die Eigenschaft, daß sie in der gestörten Bewegung von wirklichen Konstanten nur um kleine Größen von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden bleiben. Indem er nun die Funktion der Koordinaten, ihrer ersten Differentialquotienten und der Zeit, welche einem Elemente gleich ist, die Bedeutung dieses Elementes nennt, hat jedes Element in der gestörten Bewegung dieselbe Bedeutung wie in der ungestörten. Da die sechs Elemente denselben Funktionen der drei Koordinaten, ihren ersten Differentialquotienten und der Zeit im gestörten und ungestörten Problem gleich sind, so werden auch umgekehrt die drei Koordinaten und ihre ersten Differentialquotienten im gestörten wie im ungestörten Problem denselben Funktionen der sechs Elemente und der Zeit gleich sein, und hieraus der bekannte Satz folgen, der auch zur Definition der veränderlichen Elemente zu dienen pflegt, daß in den ersten Differentialen der Ausdrücke der Koordinaten durch die Elemente und die Zeit der aus der Veränderlichkeit der Elemente hervorgehende Teil verschwindet. Da nun allgemein folgt, daß keine Funktion der Elemente und der Zeit, welche sich nicht auf eine Funktion der Koordinaten und der Zeit reduzieren läßt, die Eigenschaft der Koordinaten haben kann, daß ihr erster Differentialquotient im gestörten Problem durch dieselbe Funktion der Elemente und der Zeit ausgedrückt wird wie im ungestörten, so ist damit eine frühere Behauptung von Hansen widerlegt. „. . . Es wird zwar insgemein angenommen, daß man bei einem vorgelegten System von Differentialgleichungen dahin trachten müsse, die Ordnung des Systems zu verringern; wie es z. B. gelungen ist, das Problem der drei Körper, welches ursprünglich von der Integration eines Systems von Differentialgleichungen der 18. Ordnung abhängt, welche 18 willkürliche Konstanten fordert, auf ein System von Differentialgleichungen der 6. Ordnung zurückzuführen, dessen vollständige Integration nur sechs willkürliche Konstanten

fordert. Aber andererseits hat man doch auch früher bisweilen kein Bedenken getragen, die Ordnung einer gegebenen Differentialgleichung absichtlich sogar zu erhöhen; z. B. wenn man sie dadurch linear machen konnte. In dem vorliegenden Störungsproblem kann aber diese Erhöhung der 6. Ordnung des Systems von Differentialgleichungen auf die 7. am allerwenigsten Bedenken erregen, wenn man dadurch andere Vorteile erreicht. Denn überall, wo bei dem zur angenäherten Integration eines gegebenen Systems von Differentialgleichungen eingeschlagenen Verfahren die Annäherung nach den Potenzen einer kleinen Konstante geschieht, welche die Differentialgleichungen selbst enthalten, führt man eigentlich unendlich viele voneinander unabhängige willkürliche Konstanten ein, indem jede neue Annäherung neue Integrationen fordert und diese ebensoviel neue willkürliche Konstanten zulassen . . ." Schließlich beweist Jacobi noch die Verallgemeinerung des obigen Satzes, daß man nämlich von jeder Gleichung zwischen den Koordinaten, den Elementen und der Zeit, $u = 0$, welche gleichzeitig im gestörten wie im ungestörten Problem gilt, das erste Differential so nehmen kann, als wären die Elemente konstant, und daß in du der von der Veränderlichkeit der Elemente, soweit sie in u explizite vorkommen, herrührende Teil besonders verschwindet.

In den Weihnachtsferien reiste er wieder zu seiner Familie nach Gotha und traf bei Hansen mit Scheibner zusammen, der uns darüber berichtet:

„Ich muß dabei eines Weihnachten 1850 zu Gotha mit Jacobi geführten Gespräches gedenken, in welchem er gegen mich etwa äußerte, er sei auf dem Gebiete der Störungstheorie im Besitze einer wichtigen und höchst merkwürdigen Methode, welche Ausdrücke liefere, die für gewisse Werte der darin enthaltenen Größen das Problem lösten, während die Formeln eine ganz abweichende Bedeutung erhielten, sobald jene Größen die ihnen vorgeschriebenen

Grenzen überschritten. Er habe mit Erfolg numerische Rechnungen nach der bezeichneten Methode anstellen lassen durch N. N. in Danzig, doch nannte er den Namen nicht, auch deutete er nicht auf einen Zusammenhang mit den elliptischen Funktionen hin.“ Hansen bestätigte später, daß Jacobi ihm von der Anwendung einer Formel aus seinen „Fundamentis“ zu ähnlichem Zwecke gesprochen, daß er sich jedoch dieser Formel nicht mehr entsinne.

Was die Störungsrechnungen selbst betrifft, so sagt Scheibner: „Bei einer andern Gelegenheit erzählte mir Hansen, daß Jacobi ihm eine vorteilhafte Entwicklung der Störungsfunktion vorgelegt und ihn gebeten habe, die Anwendbarkeit seiner Formeln numerisch zu prüfen. Dies habe er getan und die betreffenden Resultate Jacobi mitgeteilt. Diese Rechnungen müßten sich unter Jacobis nachgelassenen Papieren befinden, mit Hilfe derselben hoffe er imstande zu sein, das Verfahren zu reproduzieren. Der Versuch, aus dem Nachlasse die Papiere zur Einsicht zu erhalten, gelang indes nicht, da alles auf Astronomie bezügliche Material nach des von den Erben bevollmächtigten Professor Borchardt Angabe Herrn Prof. Luther in Königsberg übergeben worden war.“

In der Sitzung der Berliner Akademie vom 19. April 1852 erstattete auch Luther einen „Bericht über die Störungsrechnungen C. G. J. Jacobi's“, in welchem er bemerkt: „Prof. C. G. J. Jacobi ist nach brieflichen Mitteilungen an mich zu einer neuen Methode, die störenden Kräfte zu entwickeln, gelangt. Diese Methode, die Störungsfunktion zu entwickeln, beruht hauptsächlich auf einer besonderen Darstellung des Quadrats der Entfernung zweier Planeten. Die Endformeln für das Quadrat der Entfernung zweier Planeten sind mir von Jacobi mitgeteilt, damit ich die Konstanten derselben für alle Kombinationen der Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars, Vesta, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun berechnen möchte. Am 18. Januar a. c.

schickte ich der Königl. Akad. d. Wissenschaften zu Berlin einen Bericht über diesen Gegenstand ein, welcher die Jacobischen Formeln, eine Ableitung derselben und die Resultate der Rechnung enthält. Die von mir gegebene Ableitung dieser Formeln ist von keinem Interesse, da die mir inzwischen von Herrn Professor Dirichlet gütigst anvertrauten Papiere Jacobis eine Herleitung derselben enthalten, welche anderweitig veröffentlicht werden wird. Ich gebe daher, von den Herren Akademikern Dirichlet und Encke aufgefordert, eine Mitteilung für die Monatsberichte der Königlichen Akademie zu machen, in dem Folgenden 1. die Jacobischen Formeln, 2. die Resultate meiner Rechnung, 3. Jacobis Formeln zur Berechnung der sphärischen Dreiecke, deren Eckpunkte die Perihelien zweier Planeten und der Durchschnittspunkt ihrer Bahnen sind, und die Resultate meiner Rechnung.“ Scheibner hat endlich im Jahre 1882, da die in Aussicht gestellte anderweitige Veröffentlichung nicht stattgefunden hat, die Entwicklung der von Jacobi gegebenen Formel behandelt. Bruns sagt in seinem „Bericht über den astronomischen Nachlaß C. G. J. Jacobis“, daß sich in demselben noch Bemerkungen über eine Ausdehnung der Hansenschen Idee vorfinden, die in der Störungstheorie vorkommenden Reihen zu integrieren, ohne die beiden Winkel in andere, der Zeit proportionale zu verwandeln, sondern den Integralen dieselbe Form zu lassen, welche für die Entwicklung der störenden Kräfte passend erschien, und daß Jacobi, während bei Hansen die Winkel aus der exzentrischen Anomalie des einen und der mittleren des anderen Planeten bestehen, den Fall durchzuführen bestrebt war, wo unter dem cosinus- oder sinus-Zeichen sich inkommensurable Vielfache eines elliptischen Integrales und seiner Amplitude befinden.

Unmittelbar vor seiner Abreise aus Gotha wendet sich Jacobi noch am 10. Januar 1851 brieflich an Heine in betreff einer von diesem gegebenen neuen Lösung einer von Lamé

behandelten Aufgabe, und beweist in dem im Crelleschen Journal veröffentlichten „Auszug eines Schreibens von C. G. J. Jacobi an E. Heine“, daß man mit Hilfe der elliptischen Additionsformeln durch einfache Betrachtungen zu dem von Heine gefundenen Ausdrucke für die Lösung der etwas umgestalteten partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 X_n}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2 X_n}{\partial v_2^2} + n(n+1)(\Delta^2 \operatorname{am} v_1 + \varkappa'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am}(i v_2)) X_n = 0$ gelangt, wenn man die alleinige Voraussetzung macht, daß X_n die n. Potenz einer von n unabhängigen Funktion sein soll. Es gelingt ihm dies zu zeigen durch die Substitution $v_1 + i v_2 = w'$, $v_1 - i v_2 = w''$, $X_n = U^{-n}$, aus der unmittelbar zu erkennen, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß n aus der Differentialgleichung herausfällt, $\frac{\partial^2 U}{\partial w' \partial w''} = 0$ ist, und also $X_n = (U' + U'')^{-n}$ wird, worin U' nur von w', U'' nur von w'' abhängt. Die transformierte Differentialgleichung $4 \frac{\partial U'}{\partial w'} \frac{\partial U''}{\partial w''} + (U' + U'')^2 (\Delta^2 \operatorname{am} v_1 + \varkappa'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} i v_2) = 0$ hat zur allgemeinsten Lösung, wenn $e^{i \operatorname{am} w'} = t'$, $e^{i \operatorname{am} w''} = t''$ gesetzt wird, $U = \frac{\beta(t' + t'')}{(t' - \alpha)(t'' + \alpha)}$, worin α und β Konstanten sind; daraus ergibt sich unmittelbar die Lösung von Heine.

Nach Berlin zurückgekehrt, erkrankte er an der Grippe, überwand den Anfall jedoch scheinbar schnell und teilte noch am 20. Januar 1851 Hansen ergänzende Bemerkungen zu seinem letzten veröffentlichten Briefe mit, welche die Aufgabe betrafen, Funktionen der veränderlichen willkürlichen Konstanten und der Zeit zu finden, welche sich durch bloßes Hinzufügen eines Elementes in eine ideale Koordinate verwandeln; er bestimmt die Aufgabe dahin, eine Funktion von t und den sechs veränderlichen willkürlichen Konstanten a, b, c etc. von der Beschaffenheit zu suchen, daß ihr, in bezug auf die sechs Größen a, b, c etc. genommenes Differential mittels der drei Bedingungsgleichungen $\frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \cdots = 0$, $\frac{\partial y}{\partial a} da + \cdots = 0$, $\frac{\partial z}{\partial a} da + \cdots = 0$ in einen

Differentialausdruck $Ada + Bdb + Cdc + \cdots$ verwandelt werden kann, in welchem $A, B, C, \ldots$ bloß Funktionen von $a, b, c, \ldots$ sind, ohne t zu enthalten. „Obgleich es mir nicht gelungen ist, diese Aufgabe allgemein zu lösen, so will ich Ihnen doch in der Kürze die Betrachtungen, die ich darüber angestellt habe, mitteilen.“ Jacobi deutet jedoch nur einen Weg an, auf dem man zur Lösung dieser Aufgabe gelangen könnte.

„Da er sich schnell erholte“, sagt Dirichlet, „und wieder mit großem Eifer zu arbeiten anfing, so durften seine Freunde sich der Hoffnung überlassen, daß er ihnen und der Wissenschaft noch lange erhalten bleiben würde, als er plötzlich am 11. Februar von neuem erkrankte. Sein Zustand erregte sogleich die größten Besorgnisse, und als man nach einigen Tagen erkannte, daß er von den Blattern ergriffen sei, die auf dem durch das alte Übel unterwühlten Boden den bösartigsten Charakter zeigten, schwand jede Hoffnung. Am 18. Februar abends 11 Uhr, acht Tage nach seiner Erkrankung, erlag er ohne Kampf.“

Seine Frau wurde durch einen Brief seines Neffen vom 17. an das Sterbelager gerufen, traf ihn jedoch nicht mehr lebend an. Wenige Monate später sollte die Familie nach langer Trennung wieder in Berlin vereinigt sein und auf eine sorglose Zukunft blicken dürfen!

„Noch während seiner Krankheit“, sagt Dirichlet, „kaum vier Tage vor seinem Tode, beklagte er das Mißgeschick, welches über vielen seiner größeren Arbeiten gewaltet habe, die Krankheit oder häusliches Unglück unterbrochen habe. Wenn ich dann, setzte er wehmütig hinzu, später an die Arbeit zurückkehrte, habe ich lieber etwas Neues angefangen, als Untersuchungen wieder aufnehmen wollen, die so traurige Erinnerungen in mir erweckten. Aber ich sehe ein, daß ich nicht länger zögern darf, jene älteren Arbeiten, denen ich einen so großen Teil meiner besten Kraft gewidmet habe, der Öffentlichkeit zu übergeben, wenn

sie noch erfolgreich in den Gang der Wissenschaft eingreifen sollen. Glücklicherweise bedarf es dazu nur noch sehr kurzer Zeit, die mir ja hoffentlich nicht fehlen wird. Der Tod, welcher ihn zu früh von der Arbeit hinweggenommen, hat der Wissenschaft so große Bereicherungen nicht gegönnt.“

Überall war die Bestürzung über den frühzeitigen Tod dieses genialen Mathematikers eine große, die Teilnahme eine aufrichtige, überall hatte man das Gefühl, daß jetzt kein anderer neben Gauss treten kann, daß Deutschland seinen größten mathematischen Lehrer verloren; aber nicht bloß der Verlust des großen Forschers und Lehrers wurde betrauert, seine Freunde im In- und Auslande fühlten auch, daß ein Mann ihnen entrissen von reinem und lauterem Charakter, mit einem warmen Herzen für alles Gute und Schöne. So klagt Chelini im Namen der Freunde, die Jacobi in Rom sich gewonnen:

„Se l'annunzio della morte dell' illustre Jacobi, mancato nell' ancor fresca età di 46 anni, ha vivamente afflitto tutti i cultori delle matematiche per essersi estinto, cosi innanzi tempo, il più grande o almeno uno de' più grandi luminari che si avesse la scienza, non è a dire di quanto dolore abbia costernato gli amici suoi, e tutti coloro che hanno avuto l'occasione di ammirarne, insieme coll' altezza dello ingegno, la semplicità et la bontà del cuore. Affabile, cortese, amabile e spiritoso nei conversare, di fede incorrotta, disinteressato, amico leale, sposo tenero e padre eccelente, egli era un vivo spechio, uno splendido esempio di virtù domestiche e cittadine. . . . . Ei ci sta tuttora presente (o! dolce rimembranza) con quella sua maestosa persona dalla fronte omerica e dall' occhio vivace e penetrante; . . . . Ancora ci suonano all' orecchio le parole onde egli esternava la sua ammirazione ed il suo affetto per la nostra Roma, che volentieri avrebbe scelta a sua patria seconda; e le parole onde commendava la nostra

bellissima lingua nella quale si volle provare di scrivere. E scrisse egli tedesco in italiano, e, chi, lo crederebbe? scrisse non senza grazia, proprietà ed eleganza .... Ma di ciò non è da maravigliare; poichè sappiamo che sino da' più teneri anni ei fè conoscere, simile a Pascal, di qual penetrazione e vastità si fosse la sua mente, accoppiando allo studio delle scienze esatte (delle quali poi ha tanto servito al progresso, versando nelle loro profondità tesori di nuova luce) la coltura delle lettere greche e latine, e delle più nobili tra le moderne, non discaro alle muse avendo più di una volta composto versi nelle lingue di Omero, di Virgilio, e di Klopstock ......"

Am 28. Februar 1851 schrieb Frau Dirichlet:

„An demselben Tage, an dem wir den lieben kleinen Felix begruben, hatten wir noch einen andern harten Verlust zu beklagen. Jacobi ist in der Nacht vom Dienstag zum Mittwoch gestorben und zwar an der furchtbarsten Krankheit, die es nur giebt, den schwarzen Pocken. Ich erlasse Dir und mir alle sonstigen Beschreibungen des Entsetzens dieser letzten Tage, genug, daß er dahin, und die Welt um einen gewaltigen Geist ärmer ist, und daß dieser gewaltige Geist mit allen seinen Fehlern und Tugenden uns nahe stand. Sein Verhältniß zu Dirichlet war gar zu hübsch, wie sie so stundenlang zusammen saßen, ich nannte es Mathematik schweigen, und wie sie sich garnicht schonten, und Dirichlet ihm oft die bittersten Wahrheiten sagte, und Jacobi das so gut verstand und seinen großen Geist vor Dirichlet's großem Charakter zu beugen wußte: Er war ein Mann, nehmt alles nur in allem, Ihr werdet nimmer seinesgleichen sehen."

Wenige Monate nach seinem Tode schildert sein langjähriger und intimer Freund ihn in schönen und tief empfundenen Worten seinen akademischen Kollegen:

„Soll ich jetzt den Versuch wagen", sagt Dirichlet in seiner Gedächtnisrede, „ihn zu schildern, wie er außer-

halb der wissenschaftlichen Sphäre denen erschien, die den mathematischen Wissenschaften fern stehen, so muß ich es als den Grundzug seines Wesens bezeichnen, daß er ganz in der Welt der Gedanken lebte und daß in dem Das, wozu es bei den meisten, selbst bedeutenden Menschen eines besondern Anlaufs bedarf, das Denken, zum habituellen Zustande und wie zur zweiten Natur geworden war. Wenn etwas im Leben oder in der Wissenschaft einmal seine Aufmerksamkeit erregt hatte, so ruhte er nicht, bis er es zu eignen Gedanken verarbeitet hatte, und mit dieser ununterbrochenen geistigen Tätigkeit war in ihm ein so seltenes Gedächtnis vereinigt, daß er alles, womit er sich einmal beschäftigt hatte, sich sogleich vergegenwärtigen und darüber verfügen konnte.

Der unerschöpfliche Vorrat an Wissen und eigenen Gedanken, welcher Jacobi jeden Augenblick zu Gebote stand, eine seltene geistige Beweglichkeit, durch die er sich jedem Alter, jeder Fassungskraft anzupassen wußte, und eine eigentümlich humoristische, die Dinge scharf bezeichnende Ausdrucksweise verliehen dem großen Mathematiker auch im geselligen Verkehr eine ungewöhnliche Bedeutung, die noch durch die Bereitwilligkeit, wissenschaftliche Fragen aus dem Stegreif zu behandeln, erhöht wurde. Diese Bereitwilligkeit entsprang aus dem innersten Wesen seiner Natur, die in der Überwindung von Schwierigkeiten ihre eigentliche Befriedigung fand, und es lag daher für ihn ein ganz besonderer Reiz darin, wissenschaftliche Ergebnisse durch einfache Betrachtungen selbst solchen verständlich zu machen, denen die dazu scheinbar unentbehrlichen Vorkenntnisse fehlten. Nur mußte er, um einen solchen Versuch anzustellen, die Überzeugung haben, daß die, mit welchen er sich unterhielt, ein wirkliches Interesse an der Sache nahmen. Wo er hingegen gedankenlose Neugier zu bemerken glaubte oder entschiedene Meinungen mit Selbstgefälligkeit von solchen aussprechen hörte, die sich nie die harte Arbeit

des Selbstdenkens zugemutet hatten, verließ ihn die Geduld, und er machte dann gewöhnlich der Unterhaltung durch eine ironische, nicht selten scharf abweisende Bemerkung ein Ende. Man hat ihm oft vorgeworfen, daß er sich bei solchen Anlässen seiner geistigen Kraft zu sehr bewußt gezeigt habe. Aber die, welche ihn so beurteilten, würden vielleicht ihre Meinung geändert haben, hätten sie den Preis gekannt, um welchen er das Recht auf ein solches Bewußtsein erlangt hatte ...

Daß es bei Jacobi keine bloße Phrase war, wenn er von sich sagte, daß er die Dinge danach abschätze, wie sich der menschliche Geist in ihnen offenbare, und daß er wirklich alles, was die Welt der Gedanken nicht berührte, wenn nicht mit Gleichgültigkeit doch mit Gleichmut behandelte, hat er in den schwierigsten Lagen seines Lebens gezeigt. Am bewunderungswürdigsten offenbarte sich dieser wahrhaft philosophische Gleichmut, als ihn das Unglück traf, sein ganzes von seinem Vater ererbtes Vermögen zu verlieren, ein Verlust, der ihm um so empfindlicher hätte sein können, als er seit 10 Jahren verheiratet, für eine zahlreiche Familie zu sorgen hatte. Wer ihn damals sah, als er herbeigeeilt war, um seiner von ähnlichem Verluste betroffenen Mutter mit Rat und Tat beizustehen, konnte in seiner Stimmung nicht die geringste Änderung wahrnehmen. Er sprach mit demselben Interesse wie immer von wissenschaftlichen Dingen und klagte nur darüber, daß die unerwartete Reise ihn aus einer Untersuchung gerissen habe, die ihn gerade lebhaft beschäftigte ...

Wie Jacobis Gedankenkultus sich in der Anerkennung von Abels großer Entdeckung kundgab, so zeigte er einen ähnlichen Sinn für alles geistig Bedeutende. Seine Anerkennung umfaßte das ganze geistige Gebiet, und in seiner Wissenschaft war Jacobis Freude über eine fremde Erfindung um so lebhafter, je mehr sich diese durch ihr Gepräge von seinen eignen Schöpfungen unterschied. Er verstärkte häufig den

Ausdruck seines Beifalls durch das Geständnis, daß er diesen Gedanken nie gehabt haben würde."

Und dieser Empfindung gab er oft Ausdruck, wenn ihm Dirichlet von seinen Arbeiten und Entdeckungen berichtete, welche dieser stets rückhaltlos ohne Zögern und vertrauensvoll Jacobi mitteilte; denn jeder dieser beiden großen und eng verbundenen Freunde mied feinfühlig das Arbeitsgebiet des andern. „Da diese beiden Männer", sagt Kummer, „gleichzeitig, ein Vierteljahrhundert hindurch, an der Fortentwicklung der mathematischen Wissenschaften gearbeitet haben, und, persönlich nahe befreundet, in regem wissenschaftlichen Verkehr miteinander standen, so ist es eine sehr auffallende Erscheinung, daß ihre Schriften, obgleich sie vielfach dieselben besonderen Fächer betreffen, doch fast gar keine unmittelbaren Berührungspunkte zeigen. Die speziellen Gegenstände ihrer Forschungen sind mit wenigen, sehr unbedeutenden Ausnahmen, durchaus verschieden, und selbst davon, daß der eine die Resultate des anderen zu seinen eignen Untersuchungen benutzt hätte, sind kaum einige Beispiele aufzufinden. Dieser Mangel an Beziehungen in ihren Schriften ist aus der Verschiedenheit der Ausgangspunkte und Richtungen ihrer mathematischen Studien und Arbeiten allein nicht genügend zu erklären, und hat seinen Grund vielmehr darin, daß beide es geflissentlich vermieden, in diejenigen Gebiete hinüberzugreifen, in denen jeder die Überlegenheit des anderen anerkannte, und daß sie selbst den Schein einer Rivalität zu vermeiden suchten."

„Was meine persönlichen Erinnerungen und die meiner einzig noch lebenden jüngeren Schwester Gertrud betrifft", schreibt mir Jacobis Tochter Margarete am 7. Mai 1903, „so kommen sie leider nicht in Betracht. Ich war das fünfte Kind meiner Eltern, und wenn ich auch als aelteste Tochter die Sorgen meiner Mutter von früh an getheilt habe, so war ich doch beim Tode meines Vaters noch zu jung, um

von der Vergangenheit klare Eindrücke zu bewahren. Die Studierstube des Vaters mit ihrem oft undurchdringlichen Tabaksqualm und dem Schreibtisch, auf dem kein Blatt angerührt werden durfte, während wir im Übrigen frei darin herumspielten — die Gedichte, die ich dort unter des Vaters Leitung für der Mutter Geburtstag schrieb und lernte — die von der Tafel des Königs mitgebrachten großen Bonbons in Silberpapier — die Frühspaziergänge im Thiergarten, auf denen der Vater seine kleinen Mädchen mitnahm — des Vaters Schmerz und Thränen beim Tode seines Lieblingsohnes Nicolas, eines ganz besonders begabten Kindes, das vom dritten bis zum elften Jahre fortwährend kränkelte und dessen kleines Grab sich neben dem meines Vaters auf dem Berliner Kirchhof befindet — dies und aehnliches sind die Facta, die sich mir aus der frühesten Kinderzeit am deutlichsten eingeprägt haben.“

Die Familie Jacobis war zwar in den mißlichsten pekuniären Verhältnissen zurückgeblieben, doch wurden der Witwe, welche für sieben Kinder zu sorgen hatte, auf Antrag der Akademie durch Kabinettsorder vom 23. Juli 1851 aus dem Dispositionsfonds 320 Taler zur Erziehung der Kinder bewilligt, so daß ihr mit der Pension und den Erziehungsgeldern, welche sie als Frau eines verstorbenen Professors der Universität Königsberg zu beziehen hatte, und den freilich überaus geringen Zinsen des hinterlassenen Vermögens, im ganzen 800 Thaler jährlich für die nächsten fünf Jahre zur Verfügung standen. Als noch vor dieser, wieder durch die Gnade des Königs erfolgten Bewilligung der zu Jacobi im schroffsten politischen und wissenschaftlichen Gegensatze stehende und unleugbar in engherzigen Anschauungen befangene Encke von dem früheren altenburgischen Minister von Wüstemann in Gotha aufgefordert wurde, sich bei dem preußischen Minister für die Witwe Jacobis zu verwenden, kam dieser dem Ansuchen in folgender Form nach:

„... Kaum dürfte es nöthig sein, noch zu bemerken, daß leider zwischen Herrn Jacobi, so lange er lebte, und mir eine Annäherung nicht im Entferntesten stattgefunden hat, ebensowenig zwischen meiner Familie und der seinigen, so daß etwas anderes als das rein wissenschaftliche Interesse an seiner eminenten Befähigung und das rein menschliche an dem Schicksal einer zahlreichen Familie, die in großer Bedrängniß lebt, mich nicht zu dem so höchst gewagten Schritte verleiten konnte ..." Die oben bezeichnete pekuniäre Zuwendung wurde der Witwe vom Prinzregenten noch bis 1862 bewilligt, nachdem ein darauf bezügliches Gesuch, unterschrieben von Kummer, Magnus, Dove, Encke, Olfers, Trendelenburg, Boeckh, Ehrenberg, Rieß, Poggendorff, E. Simson, Schellbach, Weierstraß, Kronecker, E. Du Bois-Reymond und Borchardt, an das Kultusministerium gerichtet worden war. Nach zweimaliger Verlängerung dieser Bewilligung wurde auf eine erneute Eingabe der Akademie der Wissenschaften durch Kabinettsorder vom 3. Juni 1868 von dem Könige Wilhelm I. der Witwe eine fortlaufende Unterstützung von 500 Talern jährlich aus dem Gnadenpensionsfonds gewährt.

„Meines Mannes Papiere habe ich geordnet und den mathematischen Nachlaß Dirichlet übergeben", der noch im August des Jahres 1851 den 2. Band der opuscula edierte und den nachfolgenden Bericht über Jacobis wissenschaftlichen Nachlaß veröffentlichte:

„Bald nach Jacobi's beklagenswerthem Tode hat mir Frau Professor Jacobi mit einem mich ehrenden Vertrauen den gesammten wissenschaftlichen Nachlaß meines unvergeßlichen Freundes übergeben. Um zunächst eine allgemeine Übersicht über denselben zu gewinnen, war es erforderlich, die zahlreichen Handschriften des großen Mathematikers nach den Gegenständen zu ordnen. Dieses Geschäft, dem ich mich, gemeinschaftlich mit Jacobi's hiesigen

Freunden, den Herren Borchardt und Joachimsthal, unterzogen habe, war nicht ohne Schwierigkeit, da die Manuscripte, wahrscheinlich in Folge wiederholten Wohnungswechsels, sich in großer Unordnung befanden, und die einzelnen zusammengehörigen Bogen oder Blätter, gewöhnlich ohne Pagination, nicht selten mühsam aus verschiedenen Convoluten hervorgesucht werden mußten. Sobald diese vorläufige Arbeit beendigt sein wird, in deren Ausführung wir durch die momentan hier anwesenden Herren Kummer und Rosenhain unterstützt worden sind, sollen die Handschriften unter des Verewigten Freunde, die sich dazu bereit erklärt haben, zum Behufe einer ins Einzelne gehenden Durchsicht vertheilt werden. Es hat sich bei der vorläufigen Anordnung gefunden, daß nur Weniges völlig zum Drucke bereit ist. Meistens liegen wiederholte Bearbeitungen derselben oder nahe verwandter Gegenstände vor, die offenbar, wenn gleich jede Zeitangabe in den Manuscripten fehlt, sehr verschiedenen Zeiten angehören. Es werden diese Bearbeitungen mit der größten Sorgfalt durchzusehen und zu vergleichen sein, um auszumitteln, welche der früheren durch die späteren überflüssig geworden sind, oder was aus jenen herauszunehmen und in die späteren an geeigneter Stelle einzureihen sein wird, damit der Wissenschaft nichts Wesentliches von des großen, unermüdlichen Forschers Schöpfungen verloren gehe. Die zur Veröffentlichung geeigneten Abhandlungen werden im gegenwärtigen Journal gedruckt werden, in welchem, mit Ausnahme der beiden besonderen Werke: „Fundamenta nova etc.“ und „Canon arithmeticus“, fast alle Arbeiten Jacobi's zuerst erschienen sind, und sollen später gesammelt werden; wie er dies schon selbst durch die Herausgabe des ersten Bandes seiner Werke (Berlin bei G. Reimer, 1846) zu thun begonnen hatte.

Neben der Herausgabe der von Jacobi selbst verfaßten Abhandlungen beabsichtigen seine Freunde, die wichtigsten der von ihm in Königsberg und hier gehaltenen Universitäts-

vorlesungen der Öffentlichkeit zu übergeben. Allen, die an den Fortschritten der mathematischen Wissenschaften Interesse nehmen, ist es bekannt, welchen Einfluß Jacobi auch in seinem Berufe als Universitätslehrer, dem er sich stets mit besonderer Liebe und dem seltensten Erfolge gewidmet hat, auf den großen Aufschwung geübt hat, den die mathematischen Studien während des letzten Vierteljahrhunderts in unserem deutschen Vaterlande genommen haben. Wenn jetzt die Kenntniß der höheren Analysis unter uns in einem Grade verbreitet ist, wie zu keiner früheren Zeit, wenn zahlreiche jüngere Mathematiker die Wissenschaft in den verschiedensten Richtungen erweitern und bereichern: so hat er an einer so erfreulichen Erscheinung den größten Antheil. Fast alle sind seine Schüler gewesen, selten ist ein aufkeimendes Talent seiner Aufmerksamkeit entgangen, keinem, sobald er es erkannt, hat sein fördernder Rath, seine aufmunternde Theilnahme gefehlt.

Damit einer so erfolgreichen Lehrthätigkeit, welcher der Tod ein so frühes Ziel gesetzt, wenigstens die Nachwirkung erhalten werde, die das gedruckte Wort in Ermangelung des lebendigen gesprochenen hervorzubringen vermag, werden die Freunde des Verewigten seine wichtigsten Vorlesungen in genauer Reproduction durch den Druck veröffentlichen. Sie sind der Überzeugung, daß den Jüngern der Wissenschaft kein wirksameres Bildungsmittel in die Hand gegeben werden kann, als ihnen die Vorträge eines schöpferischen Geistes darbieten, der es sich zur besondern Aufgabe gemacht hatte, seine Zuhörer bei allen schwierigen Untersuchungen in den Gedankengang der Erfindung einzuweihen. Da Jacobi seine Vorlesungen immer ganz frei und ohne Benutzung einer schriftlichen Ausarbeitung gehalten hat, so enthält sein Nachlaß, bis auf wenige kurze Notizen, zwar nichts von seiner Hand, was auf seine Vorlesungen Bezug hat: dagegen finden sich in demselben sehr genaue Nachschriften seiner bedeutendsten Vorlesungen,

welche von mehreren seiner ausgezeichnetsten Zuhörer herrühren und die er seit Jahren sorgfältig gesammelt hatte, theils um sich später dadurch die Vorbereitung auf seine Vorträge zu erleichtern, theils um sie bei der Ausarbeitung von Lehrbüchern zu benutzen, deren Herausgabe er beabsichtigte. Mit Hülfe dieser Nachschriften und anderer von gleicher Genauigkeit, die ihnen zu diesem Zwecke zur Disposition gestellt worden sind, werden Jacobi's Freunde im Stande sein, seine wichtigsten Vorlesungen mit großer Treue zu reproduciren. Es können von diesen Vorlesungen, die in einzelnen Bänden erscheinen werden, hier vorläufig die folgenden: 1^0. die über die Theorie der elliptischen Functionen, 2^0. über die Kreistheilung und ihre Anwendungen auf die Zahlentheorie, 3^0. über die analytische Mechanik, und endlich 4^0. über die allgemeine Theorie der Curven und Flächen genannt werden. Bei einigen andern von geringerem Umfange bleibt die Entscheidung, ob sie zu drucken sind, noch vorbehalten."

Am 1. Juli 1852 hielt Dirichlet in der Berliner Akademie der Wissenschaften seine herrliche Gedenkrede auf Jacobi, und drei Jahre später, am 3. Juli 1855, schreibt er der Witwe: „. . . Was nun Jacobi's wissenschaftlichen Nachlaß betrifft, so wissen Sie, in welcher Unordnung sich Jacobi's Papiere in Folge wiederholten Wohnungswechsels befanden. Es war daher keine kleine Arbeit, der ich mich gemeinschaftlich mit Borchardt und dem damals noch hier anwesenden Joachimsthal unterzogen habe, alle in verschiedenen Convoluten befindlichen zusammengehörigen Blätter herauszusuchen und dann zu paginiren . . ." Nachdem Borchardt, wie wir gesehen, im Laufe der ersten 10 Jahre eine Reihe von Arbeiten aus dem Nachlasse Jacobis mit Hilfe einiger mathematischen Freunde druckfertig gemacht hatte, schreibt er am 30. Dezember 1860, als durch den am 5. Mai 1859 erfolgten Tod Dirichlets der Nachlaß ganz in seine Hände übergangen war, an Frau Jacobi: „Der

Einfluß, den Ihr seeliger Herr Gemahl mit seinem umfassenden, überall anregenden Geist als Lehrer auf mich geübt hat, ist so groß gewesen, daß er von Entscheidung für meine Richtung in der Wissenschaft war ... So bin ich froh, daß meine Stellung als Vormund Ihrer lieben Kinder mir das Recht giebt, auch in die materielle Seite Ihrer Existenz einzugreifen ... es thut mir wehe genug, daß Sie bereits einen so wesentlichen Theil des zugefallenen Erbes für Ihre lieben Kinder geopfert haben ... Für die Herausgabe von Jacobi's Papieren habe ich seit dem Sommer in dem talentvollen Clebsch in Karlsruhe eine schätzenswerthe Hülfe erhalten ..."

Durch Borchardts Initiative begann nun ein plangemäßes und eifriges Nachforschen nach allem, was an Briefen und Manuskripten von Jacobi sich im Nachlaß oder in den Händen seiner Freunde und Fachgenossen damals auftreiben ließ; er schreibt am 6. November 1869 an Frau Jacobi:

„Ich habe mit großem Dank die 13 Briefe Humboldt's an Jacobi empfangen ... Ich habe unter allen Briefen keinen gefunden, in dem etwas vorkäme, was ich im Interesse des Nachruhms Jacobi's publicirt zu sehen nicht wünschen könnte." Diese Briefe hat Borchardt an Bruhns zur Benutzung seiner Humboldt-Biographie gegeben. „Das höchst interessante Resultat dieser Briefe ist der große Einfluß, den Jacobi auf alles Geschichtlich-Mathematische ausgeübt hat, was im Kosmos vorkommt. Jacobi muß in den Jahren von 1846 an eine Reihe fragmentarischer Ausarbeitungen gemacht und Humboldt zum Gebrauch übergeben haben, von denen namentlich eines sich auf Euclid, Archimedes und Appollonius bezog, ein zweites auf Diophant und Pappus. Humboldt hat die Veröffentlichung dieser fragmentarischen Ausarbeitungen in den Monatsberichten oder in Schumacher's Jahrbuch lebhaft gewünscht. Die Auffindung dieser Ausarbeitungen würde

von großem Interesse sein, und ich würde sie mit Ihrer Erlaubniß, wenn ich nur wüßte, wo sie sind, jedenfalls in meinem Journal abdrucken."

Borchardt stellte nun zunächst alle irgend druckfertigen Manuskripte zusammen, unter denen sich viele historischen Inhaltes befanden, sammelte die Briefe von und an Jacobi, und war sehr erstaunt, als er auf eine am 12. Juni 1870 an Frau Jacobi ergangene Anfrage nach den Briefen von Gauss die Antwort erhielt, daß sich nur ein solcher Brief im Nachlaß vorgefunden, der an Schering geschickt worden sei. Wir wissen freilich, daß Gauss mehrere Schreiben an Jacobi gerichtet hat, leider ist jedoch jetzt kein Brief mehr von ihm vorhanden, wenigstens ist nicht bekannt, in wessen Händen sie sich befinden. Im Jahre 1871 gab Borchardt den 3. Band der opuscula heraus.

Unter den nachgelassenen Papieren findet sich noch eine, nicht mehr in den Bereich seiner sonstigen Untersuchungen fallende, ausführliche Arbeit über progressive Einkommensteuer, und unter diesen Blättern — als wäre Jacobi hierdurch zu seiner Arbeit veranlaßt worden — eine von ihm selbst gefertigte Abschrift eines interessanten Briefes von Gauss vom 14. April 1846 an Alexander von Humboldt:

„. . . Ich habe ja selbst die Möglichkeit der Existenz (der Abnahme der Polhöhe), ja die Nothwendigkeit nachgewiesen. Die Frage ist bloß, ob die Veraenderungen für uns schon meßbar sind. Was der Repsoldsche Kreis in Königsberg leistet, kann ich zwar nicht ganz selbst beurtheilen (was Bessel in seinen Briefen an mich anführt, zeigt allerdings große Vollkommenheit), aber die absolute Zuverlässigkeit der aelteren Beobachtungen (1820ff.) bis auf ein Paar Zehntel einer Secunde müßte ich jedenfalls in Zweifel ziehen. Ich erinnere mich u. a., daß ich damals in der Art, wie Bessel die Theilungsfehler bestimmt hat, mehrere Unrichtigkeiten gefunden habe . . . Die Liste aller Todesfälle unter

1 Jahr von einem großen Lande und einem Paar Decennien alle nach einzelnen Tagen angegeben, würde für mich etwas ebenso interessantes (oder vielmehr viel interessanteres) sein als die Beobb. zur Bestimmung einer neuen Planetenbahn. Ebenso interessant wäre mir eine fortgesetzte genaue Buchführung aus einem großen Staat über die aeltesten Einwohner z. B. alle über 95 Jahre. Wäre ich ein Rothschildt, so würde ich einen Fonds von einer Million stiften, dessen Zinsen jährlich unter die 400 aeltesten Bewohner eines großen Staates vertheilt würden mit der Bedingung, daß ihr Alter und fortdauerndes Leben auf das vollkommenste nachgewiesen sei. So würde man schon zuverlässige Resultate erhalten. Ein anderer Punkt, worüber ich genaue, ganz zuverlässige, vollständige und einen großen Zeitraum und Flächenraum umfassende Data wünschte, wäre die Anzahl der vom Blitze getödteten Menschen etc. etc. Eine andere aehnliche, obwohl garnicht mehr der Statistik sondern der Meteorologie angehörige Frage wäre die: Wie viele Blitzexplosionen finden durchschnittlich über einer Quadratmeile in einem Jahre statt? Auch hier fehlen meines Wissens alle Mittel, auch nur zu der rohesten Schätzung . . .“

Als die Akademie beschlossen hatte, die Werke Jacobis herauszugeben und dieselben mit einem Portrait des großen Mathematikers zu zieren, sandte seine Witwe an Borchardt auf dessen Aufforderung alle von Jacobi vorhandenen Bilder und erhielt am 11. April 1878 von diesem folgende Mitteilung: „Ich sage Ihnen besten Dank für die Übersendung der von Ihnen angefertigten Zeichnung, für alle übrigen Portraits Jacobi's und endlich für die Galvanographieen nach dem Petersburger Bilde Kaselowski's. Es kann keines der existirenden Jacobi'schen Portraits als ein getroffenes bezeichnet werden. Auch mir ist das Daguerrotyp, welches ihn mit seiner Schwester zusammen darstellt, das am meisten sympathische. Es ist das einzige, in welchem die Combina-

tion von Scharfsinn und Humor, die ihn charakterisirte, zum Ausdruck kommt, während in den andern Bildern der Humor meistens durch übermäßigen Ernst oder gar Schwärmerei ersetzt ist, wovon in seinen Zügen keine Spur war ... Der Druck der Werke, welche wohl 7 Bände ausmachen werden, fängt Mitte dieses Monats an.“ Das den gesammelten Werken beigegebene Bild ist von Albert in München nach dem Daguerrotyp mit Benutzung der Zeichnung photographisch angefertigt.

Nach dem Tode Borchardts, welcher am 27. Juni 1880 starb, übernahm Weierstraß die schwere Aufgabe der Fertigstellung der Werke Jacobis, und war so glücklich, schon am 25. Oktober 1891 der Witwe schreiben zu dürfen: „Es gereicht mir zur besondern Freude, Ihnen mittheilen zu können, daß nunmehr auch der letzte Band der von der Academie veranstalteten Gesammtausgabe der Werke Ihres verewigten Gatten fertig geworden ist. In 7 stattlichen Bänden ist jetzt, systematisch nach Gegenständen geordnet und möglichst correct gedruckt, alles vereinigt und den weitesten Kreisen zugänglich gemacht, was der große Mathematiker auf dem Gebiete seiner Wissenschaft als Forscher geleistet hat ... Das anregende und fesselnde des mündlichen Vortrages Jacobi's würde doch bei einer Bearbeitung nach den vorhandenen Aufzeichnungen der Zuhörer größtentheils verloren gehen. Doch ist Sorge getragen, daß alle noch aufzutreibenden Collegienhefte gesammelt und im Archiv der Akademie niedergelegt worden sind.... Meine nach dem Tode Borchardt's übernommene Aufgabe betrachte ich aber jetzt als erledigt. Daß sich dies aber hat machen lassen, trotzdem ich in den letzten Jahren fast immer leidend war und auch Schwierigkeiten anderer Art mir in den Weg gelegt wurden, ist hauptsächlich das Verdienst meines Collegen G. Hettner.... Sie dürfen es mit mir als das schönste Monument betrachten, welches seinem unsterblichen Urheber hätte gesetzt werden können.“

Die Liste der beteiligten Mitarbeiter weist die Namen auf: Baltzer, Bruns, G. Cantor, Frobenius, Henoch, Kortüm, Lottner, Mertens, Netto, E. Schering, Schwarz, Stickelberger, Thomé und Wangerin.

Jacobi hatte seiner Witwe vier Söhne und drei Töchter hinterlassen, nachdem sein sehr begabter, aber kränklicher Lieblingssohn Nicolas noch vor seinem Tode im Jahre 1846 elf Jahre alt gestorben war; der älteste dieser Söhne, denen er die Vornamen von Euler, Bernoulli, Legendre und Dirichlet gegeben, Leonhard, war Rechtsanwalt und Professor an der Berliner Universität und starb 1900, der zweite, Adrian, war Ingenieur und starb 1865 in Cannstatt, wohin die Familie zu seiner Pflege gezogen war, der dritte, Anton, welcher sich dem Bergfach gewidmet hatte, fiel 1866 in der Schlacht bei Podol in Böhmen, während der jüngste, Lejeune, Techniker, infolge der Strapazen des 70er Krieges einem Gehirnschlag erlag. Von den drei Schwestern, welche sich alle dem Erziehungsfache gewidmet hatten, starb die älteste, Susanne, als Zeichenlehrerin an der Töchterschule in Cannstatt, wo der älteste Sohn seiner Mutter ein Haus mit Garten gekauft hatte, in dem sie eine Privatpension für junge Mädchen errichtete. Die Frau Jacobis starb hochbetagt erst vor drei Jahren in Cannstatt, wo heute noch die beiden überlebenden Töchter, Margarete und Gertrud, ihren Wohnsitz haben.

Rückblick.

Nachdem wir die Lebensschicksale Jacobis im einzelnen verfolgt und in der erstaunlich großen Zahl seiner wissenschaftlichen Arbeiten dessen geniale Schöpfungen auf allen mathematischen Gebieten kennen gelernt, nachdem wir da, wo seine Untersuchungen in der Theorie der Transzendenten denen Abels parallel liefen, die Priorität der Entdeckungen abzugrenzen und festzustellen gesucht haben, da, wo Gauss mit einer Genialität ohnegleichen ein Vierteljahrhundert zuvor in der Analysis wie in der Zahlentheorie die schöpferischen Gedanken vorweg genommen, Jacobi mit nie rastender und unendlich fruchtbarer Arbeit alles dies nacherfinden und nachentdecken gesehen haben, den Blick stets pietätvoll auf den größten Meister des Jahrhunderts gerichtet, erübrigt uns noch, ein Gesamtbild von dem zu entwerfen, was er mit gleicher schöpferischer Kraft wie Euler und Lagrange erfunden, erdacht, geschaffen, und was durch ihn allmählich die Basis unserer modernen Wissenschaft geworden — wir haben ihn aber auch noch als Leiter und Lehrer der mathematischen Jugend zu charakterisieren und von den Erfolgen seiner Dozentenwirksamkeit zu sprechen, wie sie uns jetzt, 50 Jahre nach seinem Tode, erscheint, zu einer Zeit gewaltigsten Aufschwunges der mathematischen Wissenschaften.

Werfen wir einen Blick auf die Entwicklung der Mathematik der damaligen Zeit. Die Reihen der großen französischen Mathematiker, welche neben Euler und den

Bernoullis in für alle Zeiten unvergänglichen Schriften die moderne Analysis und Geometrie aufgebaut, die analytische Mechanik begründet und die Grundlagen der mathematischen Physik geschaffen, begannen am Anfange des 19. Jahrhunderts sich zu lichten, doch ließen noch einzelne, wie Poisson, Fourier, Legendre und vor allem der unermüdliche und auf allen Gebieten durch tiefe und weittragende Entdeckungen hervorragende Cauchy noch bis weit über das erste Viertel des Jahrhunderts hinaus durch geniale Schöpfungen den Ruhm ihrer Namen immer von neuem erglänzen — aber wie ganz anders sah es damals in Deutschland, in der ganzen übrigen Welt mit dem Fortschritt der mathematischen Wissenschaften aus! Gauss war nicht bloß der vornehmste Repräsentant exakter Forschung, sondern ziemlich der einzige Schöpfer mathematischer Wahrheiten und Mehrer mathematisch-physikalischer Forschung, ebenbürtig Newton und den größten französischen Mathematikern des 18. Jahrhunderts; schon am Ende dieses Jahrhunderts, kaum 20 Jahre alt, hatte er mit staunenswerter Tiefe eine neue Zahlenlehre geschaffen, deren abstraktesten Teile mit der Transzendentenlehre verknüpft, die wesentlichsten Eigenschaften der lemniskatischen und allgemeinen elliptischen Funktionen erforscht, die Funktionentheorie begründet, die jetzige Potentialtheorie aufgebaut, eine Flächenlehre geschaffen, welche den abstraktesten geometrischen Wahrheiten eine Form gab, wie sie der Mechanik und mathematischen Physik adäquat war, und in der Physik und Astronomie Altes ausgebaut und völlig Neues und Unerwartetes ergründet, kurz nach einem schöpferischen Wirken ohnegleichen seinen Namen bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts in ungeschwächtem Glanze erhalten. Am Ende des ersten Viertels dieses Jahrhunderts zieht der norwegische Mathematiker Abel wie ein glänzendes Meteor über die mathematische Welt hin, unvergängliche Spuren seines Erscheinens hinterlassend, neben ihm ein wenig jünger regt Jacobi seine

Schwingen, um sich in kürzester Zeit zu dem nächst Gauss größten Mathematiker zu erheben. Niemand war noch im Anfange des Jahrhunderts imstande gewesen, den Untersuchungen von Gauss zu folgen, niemand hatte es gewagt, seinen Forschungen sich anzuschließen und sie fortzuführen, und so waren auch noch Abel und Jacobi gezwungen, mit der riesigsten Anstrengung des Geistes und dem ganzen moralischen Mute wissenschaftlicher Bahnbrecher den Boden mathematischer Arbeit in Deutschland fruchtbar zu machen, in stetem Hinweis auf den großen Göttinger Meister. Wie Jacobi es bis zu seinem Ende getan, so verehrte auch Abel in Gauss das unerreichbare mathematische Genie, aber sein Herz wendet sich ab von der Strenge und verschlossenen Natur dieses mächtigen Geistes, denn impulsiv ist Abels Gemüt und Verstand, wie es auch die Natur Jacobis gewesen; gewiß würden diese beiden jungen Forscher, die zwei Jahre hindurch im ernstesten Ringkampf auf demselben Gebiete die Palme des Sieges sich streitig machten, bei persönlicher Berührung, wie Jacobis Beziehungen zu Bessel es gezeigt, in hingebender Begeisterung für ihre Wissenschaft und nur von dem Streben beseelt, der Wahrheit zu dienen, sich eng aneinander geschlossen haben, wenn nicht der frühzeitige Tod Abels es verhindert hätte, daß diese beiden Mathematiker in der Vollkraft ihres Schaffens, in der Mitte der 20er Jahre stehend, die Berliner Universität zum Mittelpunkte mathematischen Lebens und Forschens gemacht, und durch Gründung eines, wie es vom Könige und dem Minister geplant war, großen, mit verhältnismäßig reichen Mitteln ausgestatteten Seminars eine neue Generation schaffensfreudiger und arbeitskräftiger junger Mathematiker heranbildeten. Abel starb 27 Jahre alt, Jacobi erreichte noch nicht das 48. Lebensjahr, Gauss, der sie beide überlebte, wurde 78 Jahre alt. Als ausgezeichnete Forscher und Lehrer traten sehr bald an die Seite Jacobis Dirichlet und Steiner, doch haben beide stets die große

Überlegenheit Jacobis in der Tiefe der Forschung nicht nur sondern vor allem auch in dem weiten Gesichtskreise auf dem Gebiete mathematischer, mechanischer und philosophischer Spekulation sowie in der unvergleichlichen Kraft anerkannt, mit welcher Jacobi die Begeisterung der nachwachsenden mathematischen Welt wachzurufen und dieselbe zu harter, schwieriger und gewissenhafter Arbeit heranzuziehen wußte.

Überall, wohin Jacobi seinen Scharfsinn lenkte, schuf er Bleibendes, und wurden seine Entdeckungen die Basis für die weitere Entwicklung der Wissenschaft. Als die Hauptgebiete, die er zum Teil neu geschaffen oder wenigstens durch seine genialen Gedanken völlig umgestaltet und in neue Bahnen gewiesen hat, müssen die Theorie der Transzendenten, die Lehre von den totalen und partiellen Differentialgleichungen, die Variationsrechnung und die analytische Mechanik bezeichnet werden; aber auch in der Algebra, der Theorie der Reihen und Integrale und der Anwendung dieser auf die Probleme der Astronomie, in der Zahlentheorie wie in der Geometrie, überall finden wir Jacobische Sätze von der weittragendsten Bedeutung, und alles mit einer Klarheit und Durchsichtigkeit aufgebaut und getragen von einer Kenntnis der historischen Entwicklung der Probleme, wie wir sie wohl sonst kaum wiederfinden.

Überblicken wir zunächst die letzteren Gebiete, so tritt uns schon in der Dissertation, mit welcher der zwanzigjährige Jacobi in die mathematische Welt eintrat, das Streben entgegen, die Probleme, welche er bei der Lektüre der Werke von Euler und Lagrange durch wechselnde, den einzelnen Aufgaben angepaßte Methoden gelöst fand, durch einheitliche und der Ausdehnung auf allgemeinere Probleme derselben Art fähige Methoden zu ersetzen. Die Einführung unendlicher Reihen in das Problem der Partialbruchzerlegung und die Darstellung der Koeffizienten der

letzteren, unabhängig von dem Grade der Vielfachheit der Lösungen des Nenners der Funktion, als Entwicklungskoeffizienten von Reihen um singuläre Punkte derselben, bringt in einer noch frühen Zeit ein funktionentheoretisches Element in die algebraischen Untersuchungen, welches ihm gestattet, die Zerlegung auch auf solche Partialbrüche auszudehnen, deren Nenner für mehrere der Unendlichkeitspunkte der gegebenen Funktion zugleich verschwinden. Seine hier gewählten Bezeichnungen wurden später in allen denjenigen Untersuchungen beibehalten, welche sich auf die Partialbruchzerlegung der eindeutigen Funktionen überhaupt beziehen, und die in seiner Dissertation zur Transformation der Reihen angewandten Prinzipien wurden teils noch von ihm selbst, teils von späteren Funktionentheoretikern zu grundlegenden analytischen Betrachtungen verwertet.

Wie in seiner ersten Arbeit bleibt es charakteristisch für alle späteren Schöpfungen Jacobis, daß in ihnen stets das Bestreben in den Vordergrund tritt, nicht ein einzelnes, wenn auch noch so schwieriges, algebraisches oder zahlentheoretisches, analytisches oder geometrisches Problem zu lösen, sondern überall zeigt sich der umfassende und geniale Überblick über alle mathematischen Disziplinen, überall ist es Ziel und Zweck, den innern Zusammenhang zwischen all den verschiedenen mathematischen Wahrheiten aufzudecken.

Als besonders weitgreifende Leistungen in der Algebra dürfen seine Untersuchungen über die Eliminationstheorie bezeichnet werden, welche den wahren Inhalt des Bézoutschen Verfahrens aufdeckten und die spätere Cayleysche Methode vorzeichneten, und wiederum seinen fundamentalen Sätzen über die Schnittpunktsysteme algebraischer Kurven, über die Anzahl der auf einer gegebenen Kurve willkürlich wählbaren Punkte für den Durchschnitt mit einer Kurve anderer Ordnung, für die Anzahl der Doppeltangenten einer algebraischen Kurve und die Präzisierung der Plückerschen

Formeln, sowie all den ähnlichen Sätzen für die Zusammenstellung algebraischer Flächen ihre Entstehung gaben. Der strenge und systematische Aufbau der Determinantenlehre, die für die ganze Entwicklung der Algebra und Geometrie fundamentale Einführung der Funktionaldeterminanten und die vollständige Darlegung ihrer Eigenschaften und ihrer Bedeutung für die Algebra und Analysis fixierte die Richtung für die ganze nachfolgende Entwicklung der Eliminationstheorie und analytischen Geometrie. So waren auch seine geometrischen Arbeiten meist analytischer und algebraischer Natur, die interessanten synthetisch geometrischen Spekulationen traten gegen diese in ihrer Bedeutung sehr zurück und waren meist wohl aus Anregungen entstanden, die von dem ihm eng befreundeten genialen Geometer Steiner ausgingen. Aber von weittragendster Bedeutung waren wieder seine tiefen zahlentheoretischen Forschungen, die ihm von Jugend auf einen Lieblingsgegenstand zur Bekundung seines Scharfsinns boten, und die sich den besten Arbeiten seines Freundes Dirichlet an die Seite stellen dürfen. Seine Sätze über die Theorie der Kreisteilung, welche, auf den Disquisitiones arithmeticae aufgebaut, den Gaussschen Sätzen eine ungeahnte Erweiterung gaben, und welche schon in seinen ersten Vorlesungen eingehend dargestellt wurden, während sie in seinen Veröffentlichungen darüber nur in ihren Resultaten bekannt wurden, gaben die Basis für die späteren Forschungen Kummers, und seine Reziprozitätsgesetze für kubische Reste gehören zu seinen ersten zahlentheoretischen Entdeckungen, die er in einem Alter von kaum mehr als 20 Jahren gemacht, geraume Zeit bevor er Kenntnis erhalten von den berühmten Forschungen Gauss' über das biquadratische Reziprozitätsgesetz und dessen für alle Folgezeit fundamental gewordener Einführung der komplexen Zahlen in die Zahlentheorie. Wie ihn eine wunderbare Divination zur Bestimmung der Klassenzahl der quadratischen Formen für eine negative Determinante

geführt, so waren es nach Dirichlets Zeugnis noch viele andere verborgene Eigenschaften der Zahlen, die er erschlossen und seinen Freunden mitgeteilt hatte, ohne daß diese in konsequenter Durchführung der mathematischen Welt zugänglich wurden, abgesehen von den Zahlengesetzen, welche er ursprünglich aus den Produkt- und Reihenentwicklungen der elliptischen Funktionen hergeleitet, und für die er dann auch ausführliche und interessante rein arithmetische Darstellungen veröffentlicht hat.

Umfangreich und in alle mathematischen Disziplinen eingreifend sind seine Arbeiten über unendliche Reihen und bestimmte Integrale, deren Untersuchungen eng verknüpft sind mit seinen algebraischen Forschungen, und in denen er häufig, ausgehend von speziellen Resultaten, die Euler durch jedesmal dem Problem angepaßte Kunstgriffe entwickelt hatte, große und allgemeingültige Theoreme über die Transformation der einfachen und mehrfachen Integrale, über die Ermittelung der Werte derselben, die schwierigeren Teile der Theorie der Kugel- und Besselschen Funktionen und die Anwendung derselben auf interessante und wichtige Probleme der Oberflächenbestimmung und der Attraktionstheorie der Ellipsoide herleitete.

Endlich wollen wir noch auf die vielen Arbeiten astronomischer Natur hinweisen, welche — abgesehen von den allgemeinen Störungsuntersuchungen, welche der analytischen Mechanik angehören — wie bei Gauss nur ermöglicht waren durch seine staunenswerte Gabe, die kompliziertesten Größenverbindungen ihrer wahren Bedeutung gemäß übersichtlich zu gestalten und, wie er selbst sagt, aus den gewonnenen Resultaten der Buchstabenrechnung den naturgemäßen Weg zu erkennen, wie die Entwicklung anzustellen gewesen; so sehen wir ihn, wetteifernd mit den unermüdlichen Anstrengungen und endlosen Entwicklungen eines Laplace und Lagrange, für die rein numerische Rechnung im Verein mit Hansen der Astronomie Methoden zuführen,

welche die ermüdende Tätigkeit durch ungewöhnlich genaue Resultate und allgemeine Erfolge belohnten.

Aber all diese gewaltigen Leistungen in der Algebra und Zahlentheorie, in der Geometrie und der Integralrechnung, in der Reihentheorie und in der Astronomie, von denen Dirichlet mit Recht sagt, daß jede einzelne genügt hätte, um seinen Namen mit der Wissenschaft unvergänglich zu verknüpfen, sie treten zurück gegen das, was die Transzendentenlehre, die Theorie der Differentialgleichungen, die Variationsrechnung und die analytische Mechanik ihm verdanken.

In der Variationsrechnung handelt es sich zwar um die Lösung eines bereits bestimmt formulierten Problems, aber freilich von überaus großer Schwierigkeit, an dessen Lösung Lagrange verzweifelte. Wenn schon die Integration der Hauptgleichung der Variation eines bestimmten Integrales fast in jedem einzelnen Falle die Kräfte der Analysten überstieg, so war doch wenigstens die Aufgabe stets auf die Ermittlung einer Beziehung zurückgeführt, welche in endlichen Größen einer Differentialgleichung genügen sollte, und diese Differentialgleichung hatte doch für alle Probleme eine einheitliche, feste und übersichtliche Form; die Frage jedoch, wie sich der Wert der 2. Variation unter Voraussetzung der bereits gefundenen Lösung der Hauptgleichung gestalte, ob derselbe für ein Maximum oder Minimum oder nur für einen Grenzwert entscheide, das verlangte nicht nur in jedem Falle Transformationen analytischer Ausdrücke verschiedener Natur, sondern es häuften sich noch die Schwierigkeiten, welche schon die 1. Variation bot, indem, wie es wenigstens schien, die Integration neuer Differentialgleichungen notwendig wurde. Die große Entdeckung Jacobis, welche das leistete, was in der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima durch die Kriterien für die stets positiven oder negativen Werte der höheren totalen Differentialien erreicht war, ohne neue Gleichungen auflösen

zu müssen, wie es für das erste totale Differential zur Ermittlung der Werte der Variabeln notwendig ist, bestand nun in dem Nachweis, daß die Integration der durch die Betrachtung der 2. Variation gelieferten Differentialgleichungen durch die Integration der Hauptgleichung und durch Anwendung der Methode der Variation der Konstanten bereits implizite vollzogen war; um nun mit Hilfe der gefundenen Integrale der Hauptgleichung die 2. Variation so umzugestalten, daß nur das Vorkommen eines Quadrates unter dem Integral die Entscheidung unmittelbar treffen läßt, wird Jacobi zu einer eigentümlichen Klasse totaler Differentialgleichungen geführt, welche sich durch gewisse Transformationen immer in ein vollständiges Differential eines Differentialausdruckes derselben Form transformieren lassen und später zu den verschiedenartigsten andern Untersuchungen Veranlassung gegeben haben. Die scheinbar vereinzelt stehende Frage der Variationsrechnung hatte Jacobi den Anlaß zu ganz allgemeinen Untersuchungen von größter Tragweite gegeben; die Theorie der Variation einfacher Integrale war durch seine und die sich daran knüpfenden Untersuchungen von Hesse abgeschlossen und bewegte sich nur noch um eine feinere Ausarbeitung für spezielle Probleme oder um funktionentheoretische Überlegungen, wie sie Weierstrass begründete.

Weiter und umfassender noch sind seine Untersuchungen in der Theorie der totalen und partiellen Differentialgleichungen. Nachdem er schon in einer seiner ersten Arbeiten die Pfaffsche Methode für die Integration einer totalen Differentialgleichung mit beliebig vielen Variabeln in eleganter und symmetrischer Form entwickelt und den innern Konnex zwischen dessen berühmter Arbeit und den Untersuchungen von Lagrange festgestellt, vor allem schon damals jene merkwürdige Erweiterung des Lagrangeschen Integrationsverfahrens für eine lineare partielle Differentialgleichung auf ein simultanes lineares System dargelegt,

welches in jeder Differentialgleichung nur die partiellen Differentialquotienten einer Variabeln, in den verschiedenen Gleichungen aber dieselben Koeffizienten der nach derselben unabhängigen Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten besitzt, wird er auf Grund der schon hierbei angestellten Betrachtungen zur Ausdehnung der Methode von Lagrange für die Integration einer beliebigen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mit drei Variabeln auf solche mit beliebig vielen Variabeln geführt. Von größter Bedeutung wurde seine Vereinfachung der Methode für die Integration einer Pfaffschen Gleichung zum Zwecke der Integration einer partiellen Differentialgleichung, indem er zeigt, daß es für diesen Fall genügt, das erste totale Pfaffsche Differentialgleichungssystem aufzustellen und zu integrieren, und daß sich daraus dann sämtliche weiteren Hilfsgleichungen unmittelbar bilden lassen, welche Pfaff für die Integration seiner totalen Differentialgleichung nötig hatte. Jacobi greift aber auch direkt mit seinen so berühmt gewordenen Methoden die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung an, indem er durch mannigfache Gestaltung der Integrabilitätsbedingungen für ein Differential von beliebig vielen Variabeln mit Hilfe der Benutzung und Umformung des Poissonschen Symbols das Problem auf die Integration eines durch diese Symbole darstellbaren gleichzeitigen linearen partiellen Differentialgleichungssystems zurückführt und zeigt, wie man durch seine Methode der sukzessiven Integration durch eine endliche Anzahl von Operationen und Integrationen gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme, welche den Charakter der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen tragen, stets die Integration leisten kann. Diese Untersuchungen bilden das Fundament, auf welchem die ganze neuere Theorie der partiellen Differentialgleichungen aufgebaut ist, in der Jacobi noch bis heute unerreicht dasteht.

Von diesen Untersuchungen sind seine Arbeiten auf

dem Gebiete der analytischen Mechanik nicht zu trennen. Wie er zu jenen Forschungen über partielle Differentialgleichungen durch die Hamiltonschen Arbeiten über die Bewegungsgleichungen veranlaßt worden, so führten ihn seine Arbeiten über Differentialgleichungen zu einer Erweiterung der Hamiltonschen Untersuchungen und dadurch wieder tiefer in die großen Probleme der Mechanik, und schon allein die Erkenntnis der Äquivalenz einer der beiden Hamiltonschen Differentialgleichungen mit dem totalen dynamischen Differentialgleichungssysteme würde seinen Namen auch mit diesem Gebiete eng verknüpft haben. Aber Jacobi ging weiter — seine algebraischen Untersuchungen über die Funktionaldeterminanten hatten ihn allmählich zu einem neuen Prinzip der Mechanik geleitet, dem Prinzip vom letzten Multiplikator, das die Integration der dynamischen Differentialgleichungen um einen bedeutenden Schritt weitergeführt und das letzte Integral bei der Kenntnis aller übrigen stets von einer Quadratur abhängig gemacht hat. Dieses Prinzip, die merkwürdige Deutung des Poissonschen Satzes zum Zwecke der sukzessiven Auffindung von Integralen mechanischer Probleme und die Behandlung des Prinzips der kleinsten Wirkung, zum erstenmal in strenger Form entwickelt, gehören zu den bahnbrechenden und größten Arbeiten, deren sich auf dem Gebiete der analytischen Mechanik das vorige Jahrhundert rühmen kann. Wie viele und schwierige Fragen er auf diesem Gebiete sowie auf dem der Differentialgleichungen sonst noch angegriffen, erörtert und erledigt hat, wie die Einführung der elliptischen Koordinaten in die Mechanik, die Theorie der vollständigen Integrale der partiellen Differentialgleichungen, die Untersuchung der überflüssigen Konstanten, die Bestimmung der Ordnung der Differentialgleichungssysteme usw., haben wir früher eingehend dargelegt. Aber weit über die Mechanik hinausgreifend gestaltet er die Hamiltonschen Prinzipien um, indem er statt der Summe der lebendigen Kraft und

der Kräftefunktion unter dem Integral eine willkürliche Funktion substituiert und für die so definierte neue charakteristische Funktion die partielle Differentialgleichung findet, welche statt des Energievorrates eine ähnlich gestaltete, aber allgemeinere Funktion einführt, und aus dem vollständigen Integral der partiellen Differentialgleichung in genau derselben Weise, wie es Hamilton getan, die Integrale der entsprechenden totalen Differentialgleichungssysteme entwickelt. Hier wies er Helmholtz den Weg, um die mechanischen Prinzipien zu physikalischen umzugestalten. Was Jacobi von dem beherrschenden Einfluß des Prinzips der kleinsten Wirkung in der Mechanik wiederholt ausgesprochen, sucht Helmholtz 50 Jahre später zu Grundmaximen der Physik zu machen, und in seinen glänzenden, aber überaus schwierigen und zum Teil unvollendet gebliebenen Untersuchungen als Leitfaden für die physikalische Forschung hinzustellen. „Jacobi eliminiert", sagt Helmholtz, „das Differential der Zeit und damit die Zeit aus dem zu variierenden Integrale; physikalisch ist Jacobis einschränkende Bedingung für ein vollständig bekanntes und in sich abgeschlossenes Körpersystem stets als gültig anzusehen. Hamiltons Form dagegen erlaubt die Bewegungsgleichungen auch für unvollständig abgeschlossene Systeme durchzuführen, auf welche veränderliche äußere Einflüsse wirken, die von einer Rückwirkung der bewegten Systeme unabhängig angesehen werden können."

Wir kommen endlich zu Jacobis größten und umfassendsten Leistungen, zu seinen Verdiensten um die Schaffung der Transzendentenlehre, durch die er in den Kreisen der mathematischen Welt erst wahrhaft populär geworden. Wenn Legendre in der Einleitung zu seinem traité von dem größten Mathematiker des 18. Jahrhunderts sagen durfte:

„Euler par une combinaison qu'on peut regarder comme fort heureuse, quoique ces hazards n'arrivent qu'à ceux qui

savent les faire naître, trouva l'intégrale algébrique complète d'une équation différentielle composée de deux termes séparés, mais semblables, dont chacun n'est intégrable que par des arcs de sections coniques. Cette découverte importante donna lieu à son auteur de comparer d'une manière plus générale qu'on ne l'avait fait avant lui, non-seulement les arcs d'une même ellipse, d'une même hyperbole, ou d'une même lemniscate, mais en général toutes les transcendantes contenues dans la formule $\int\frac{P\,dx}{R}$, où P est une fonction rationelle de x, et R la racine quarée d'un polynome en x du quatrième degré",

so muß man auch in den ersten Arbeiten von Jacobi über die Transformation der elliptischen Integrale und Funktionen die Divination bewundern, die ihn aus der Existenz der unendlich vielen Modulnketten die Form, Periodizität und all die andern Eigenschaften der eindeutigen Umkehrungsfunktion der elliptischen Integrale 1. Gattung vermuten ließ. Bei ihm wie bei Abel, unabhängig voneinander, entsprang dieser Gedanke aus einer genialen Intuition, genau so wie uns später die Einführung der ϑ-Funktion als Fundamentaltranszendente in der Theorie der elliptischen Funktionen fast unvermittelt entgegentritt, und sogleich in einer Form, welche nicht bloß die Möglichkeit einer solchen Einführung als analytische Tatsache hinstellt, sondern, geleitet von einem die gesamte Theorie der Transzendenten und ihrer Anwendungen umfassenden Blicke, in ihr den Grundstein erkennen läßt, auf dem sich die Theorie der elliptischen Funktionen elegant und einheitlich mußte aufbauen lassen.

Inwieweit seine Arbeiten auf diesem Gebiete bis zum Jahre 1829 von den großen Schöpfungen Abels beeinflußt waren, ist oben in allen Einzelheiten festzustellen versucht worden; aber so wie Abel, wenn auch Jacobi nicht mit in den Wettkampf getreten wäre, gewiß durch all seine

tiefen und genialen Untersuchungen in der Theorie der elliptischen Funktionen, die neuen und ungeahnten Wege eröffnet hätte, die er uns in Wirklichkeit gewiesen, so dürfen wir uns gleichfalls der Überzeugung nicht verschließen, daß Jacobi auch allein auf diesem Gebiete alles das geschaffen hätte, was er von 1827 an in der Theorie der elliptischen Transzendenten in Wirklichkeit schöpferisch gestaltet hat. Ob er aber auch ohne die Vorarbeiten Abels den Weg gefunden hätte, um in das Gebiet der höheren Transzendenten einzudringen? Jedenfalls können wir diese Frage nicht definitiv bejahend beantworten. Wir sahen, daß er schon auf der Höhe seiner ruhmvollen produktiven Tätigkeit stehend immer und immer wieder sich mit der Frage der Umkehrung der hyperelliptischen Integrale beschäftigte, durch seine Untersuchungen über die Existenz von Funktionen einer Variabeln mit mehr als zwei Perioden zu bedeutsamen, aber immer doch nur negativen Resultaten gekommen war, daß ihm aber der durch eine wunderbare Divination geglückte Ansatz für die Umkehrung der hyperelliptischen Integrale oder die Einführung von Funktionen von so viel unabhängigen Variabeln, als es der algebraischen Irrationalität zugehörige Integrale 1. Gattung gibt, kaum gelungen wäre, wenn nicht Abel durch sein die ganze Theorie der Integrale algebraischer Funktionen beherrschendes Theorem der Mathematik für alle Zeiten die Wege gewiesen hätte, auf welchen ein weiterer Ausbau der Transzendentenlehre und eine naturgemäße Fortführung all der tiefen Gedanken der großen Analytiker sich ermöglichen ließ. War doch offenbar auch ein Größerer als Jacobi an diesem Problem gescheitert!

In den Jahren 1796—97 sehen wir Gauss bereits im Besitz aller wesentlichen Eigenschaften der lemniskatischen Funktionen; in seinen Notizbüchern aus diesen Jahren, welche uns einen wahren Schatz für die historische Forschung bieten, finden wir für die Umkehrungsfunktion der lemnis-

katischen Integrale das Additionstheorem entwickelt, sie selbst als Quotienten zweier als selbständige Funktionen in die Theorie eingeführter Transzendenten dargestellt, und ihre Reihen- und Produktentwicklungen gegeben; auf die Beziehung des vollständigen lemniskatischen Integrales zum arithmetisch-geometrischen Mittel aufmerksam geworden, wurde er zur analogen Frage für das allgemeine vollständige elliptische Integral 1. Gattung geführt, und noch vor Ablauf des Jahrhunderts sehen wir ihn wiederum in seinen Tagebüchern bereits im Besitze der wesentlichsten Eigenschaften der elliptischen Funktionen. Erst im Jahre 1818 gibt ihm die Veröffentlichung seiner berühmten Arbeit „Determinatio attractionis etc." eine Veranlassung, die Mathematiker einen Blick in seine Arbeitsstätte werfen zu lassen: „der Verfasser hat indessen diese erste sich ihm darbietende Gelegenheit benutzt, um die ersten Linien eines neuen Algorithmus zu geben, dessen er sich schon seit einer langen Reihe von Jahren zur Bestimmung dieser Transzendenten bedient hat, und worüber er in Zukunft eine ausgedehnte zu vielen merkwürdigen Resultaten führende Untersuchung bekannt machen wird", und er deutet an, daß er längst im Besitze einer umfangreichen Theorie der elliptischen Transzendenten sei, von der die Untersuchungen Lagranges und Legendres nur die Anfänge bilden. Fast alle Resultate der ersten Arbeiten Abels und Jacobis waren wahrscheinlich schon vor Beginn des 19. Jahrhunderts im Besitze von Gauss; „il (Abel) vient d'enfiler précisement la même route, dont je suis sorti en 1798", schreibt er an Crelle, und Jacobis grundlegende Entdeckung von der Einführung der Fundamentaltranszendenten ϑ, sowie die Lösung des Teilungsproblems für 3, 5, 7 nimmt er fast 50 Jahre früher vorweg. Die reelle und selbst die komplexe Multiplikation der elliptischen Transzendenten, die einfachsten Transformationen der ϑ-Funktionen, die Additionstheoreme der lemniskatischen Integrale 2. Gattung mit Hilfe der zugehörigen ϑ-Funktion

kennt Gauss schon 1817, und nach dem Erscheinen des zweiten Briefes von Jacobi an Schumacher entwickelt er bereits im August 1829 die Beziehungen zwischen der transformierten und ursprünglichen ϑ-Funktion für den Nullwert des Arguments, und stellt die Modulargleichung für die Transformation 5. Grades auf einem Wege her, wie er erst geraume Zeit später von den Mathematikern wieder betreten wurde. Aber ihm so wenig wie Jacobi hatte sich ein Ausblick auf den Weiterbau im Felde der Transzendenten eröffnet, auch ihm blieb es versagt, die Existenz des großen Abelschen Theorems zu ergründen, und gewiß war dies für ihn, der gewohnt war, alles in fertiger, abgeschlossener, in seinem Fundament wie in seinem Aufbau unverrückbarer Form den Mathematikern vorzuführen, auch der Grund, weshalb von der Fülle seiner Entdeckungen auf diesem Gebiete während seines Lebens nie der mathematischen Welt Kunde geworden.

Wenn aber auch für Jacobi die Kenntnis des Abelschen Theorems durchaus notwendig gewesen, um zu seinem Ansatz für die Definition der Abelschen Funktionen zu gelangen, so gehört doch diese Definition allein schon zu seinen glänzendsten Entdeckungen, und wir finden keinen Anhaltspunkt für die Annahme, daß etwa Abel, der viele vergebliche Versuche zur Umkehrung der hyperelliptischen Integrale gemacht, trotz langer und eingehender Beschäftigung mit seinem Theorem auf den Gedanken der Einführung von Funktionen mehrerer Variabeln gekommen ist.

Die Genialität Jacobis ließ ihn aber nicht bloß der rein abstrakten mathematischen Forschung auf dem Felde der analytischen Funktionen immer weitere Kreise ziehen; wenn auch, wie er an Legendre schrieb, in seinen Augen eine Frage der Zahlentheorie denselben Wert hat als eine Frage des Weltsystems, so war es trotzdem immer sein Bestreben gewesen, alle Resultate abstrakter Natur in speziellen Fällen der Anwendung zu verifizieren und die Brauchbarkeit seiner

Transzendenten für die schwierigsten Probleme der Geometrie und Mechanik nachzuweisen. Seine Behandlung des Rotationsproblems wird mustergültig bleiben für alle Zeiten, und sie wäre es, wie aus seinen Aufzeichnungen hervorgeht, noch in viel höherem Grade geworden, wenn ihn nicht der Tod so plötzlich aus der staunenswerten Menge der umfangreichsten und genialsten Arbeiten gerissen hätte.

Aber nicht bloß die Verschiedenartigkeit und Fülle der Jacobischen Forschungen und Entdeckungen lassen ihn uns als einen der ersten Leiter und Führer in dem Fortschritt der mathematischen Wissenschaften des vorigen Jahrhunderts rühmen. An der Hand der Mitteilungen seiner Schüler und Freunde, sowie auf Grund seiner amtlichen Berichte über die jungen Mathematiker, welche er herangebildet, liegt es uns auch ob, den großen Lehrer zu würdigen.

Man vergegenwärtige sich den damaligen Zustand des mathematischen Studiums an deutschen Universitäten. Der princeps mathematicorum, angestaunt und bewundert von allen, welche sich mathematischen Studien widmeten, dozierte an einer kleinen Universität vor wenigen Zuhörern; freilich war alles neu, was er gab, von genialer Originalität, jede mathematische Darlegung bot wichtige und unerwartete Gesichtspunkte, alles war exakt im Inhalt, präzis in der Form, aber es fehlte Gauss die auch äußerlich sich kundgebende Wärme und Begeisterung, welche dem mathematischen Lehrer notwendig eigen sein muß, wenn die zum Teil so trockenen und nüchternen Wahrheiten, falls sie nicht gerade als Anwendungen auf die Erscheinungswelt sich kundgeben, selbst einen empfänglichen Geist befruchten, wenn die Ideen auf einem noch jugendlichen Resonanzboden einen Wiederhall finden sollen. Und auf dem Katheder all der andern deutschen Universitäten stand in dem 2. Dezennium des vorigen Jahrhunderts weder ein bedeutender Lehrer noch ein hervorragender Forscher. Als Dirichlet den Trieb in sich fühlte, der mathematischen Wissenschaft sich zu

widmen, da konnten ihm die Vorlesungen über die Elemente der synthetischen und analytischen Geometrie, über die Anfangsgründe der Algebra und über die alles beherrschende Kombinatorik an deutschen Universitäten ein Genüge nicht bieten, und er wandte sich nach Paris, um von den großen französischen Forschern an deren berühmter Hochschule Wissenschaft und zugleich Methode, Vertiefung und zugleich Klarheit und Durchsichtigkeit der Darstellung zu lernen. Wenn dann auch Dirichlet selbst in Breslau, Berlin und später in Göttingen einen großen Kreis von Zuhörern um sich versammelt, alles mit vollendeter Klarheit und Eleganz seinen Schülern geboten, und auf verschiedenen, überaus schwierigen Gebieten einzelne junge Mathematiker, auf welche eine spätere Generation mit Stolz als Zierden deutscher Wissenschaft blickte, zu eignen Arbeiten begeisterte, so hat er doch nie eine eigentliche Schule begründet, wie Jacobi es getan, der von Anbeginn seiner Lehrtätigkeit schon als 22jähriger Dozent in Königsberg und dann in Berlin seine Zuhörer nicht bloß in den Bann seiner Vorstellungen zwang, nicht nur eine Fülle von Kenntnissen ihnen überlieferte und neue Gesichtspunkte eröffnete, sondern auch durch die glückliche Art der Verbindung der historischen Entwicklung der Probleme mit den mannigfachsten Lösungen derselben, welche den scheinbar heterogensten Disziplinen mathematischer Wissenschaft entnommen und kritisch beleuchtet wurden, das Interesse seiner Zuhörer dauernd fesselte. Durch den Hinweis auf stets sich ihm bietende neue Probleme, die er immer wieder zu bewältigen wußte, trieb er auch seine Schüler dazu, ihre Kräfte selbständig zu versuchen an der Fortführung und Erweiterung der Wissenschaft, und rief ihren Ehrgeiz wach, sich selbst zu fühlen als eine neue Generation von Mathematikern, schaffensfreudig und arbeitslustig, aber bescheiden und nicht polternd mit wissenschaftlichem Geklingel — denn neben ihnen stand ihr Meister, unerreichbar, der große Mathematiker, freilich seiner Kraft

sich wohl bewußt und in seiner steten Wahrheitsliebe auch nie es verleugnend, daß er zu den hervorragendsten Mathematikern seiner Zeit gehörte, aber trotzdem stets bescheiden gegen wirklich große Menschen, human und anerkennend gegen jedes aufstrebende Talent. Und so mußte eine Schule entstehen von jugendlichen Forschern, welche auf den Gebieten mathematischer Wissenschaft, auf denen er sich schöpferisch betätigt — und es waren dies alle Gebiete —, weiter arbeiteten und lehrten, und die deutschen Universitäten allmählich zu Pflanzstätten mathematischer Wissenschaft machten.

„Es war nicht seine Sache", sagt Dirichlet, „Fertiges und Überliefertes von neuem zu überliefern; seine Vorlesungen bewegten sich sämtlich außerhalb des Gebietes der Lehrbücher und umfaßten nur diejenigen Teile der Wissenschaft, in denen er selbst schaffend aufgetreten war, und das hieß bei ihm, sie boten die reichste Fülle der Abwechselung. Seine Vorträge zeichneten sich nicht durch diejenige Deutlichkeit aus, welche auch der geistigen Armut oft zuteil wird, sondern durch eine Klarheit höherer Art. Er suchte vor allem die leitenden Gedanken, welche jeder Theorie zugrunde liegen, darzustellen, und indem er alles, was den Schein der Künstlichkeit an sich trug, entfernte, entwickelte sich die Lösung der Probleme so naturgemäß vor seinen Zuhörern, daß diese Ähnliches schaffen zu können die Hoffnung fassen konnten. Wie er die schwierigsten Gegenstände zu behandeln wußte, konnte er seine Zuhörer mit Recht durch die Versicherung ermutigen, daß sie in seinen Vorlesungen sich nur ganz einfache Gedanken anzueignen haben würden. Der Erfolg einer so ungewöhnlichen Lehrart, wie sie nur einem schöpferischen Geiste zu Gebote steht, war wahrhaft außerordentlich. Wenn jetzt in Deutschland die Kenntnis der Methoden der Analysis in einem Grade verbreitet ist wie zu keiner früheren Zeit, wenn zahlreiche jüngere Mathematiker die Wissenschaft nach

allen Richtungen erweitern und bereichern: so hat Jacobi an einer so erfreulichen Erscheinung den wesentlichsten Anteil. Fast alle sind seine Schüler gewesen, selten ist ein aufkeimendes Talent seiner Aufmerksamkeit entgangen, keinem, sobald er es erkannt, hat sein fördernder Rat, seine aufmunternde Teilnahme gefehlt . . . . ."

Und nicht anders haben seine Kollegen Bessel und Neumann, seine Schüler Richelot, Borchardt, Hesse, Heine u. a. über seine einzig dastehende Dozententätigkeit geurteilt; wie er im Gegensatze zu Dirichlet auch zu einem ganz unentwickelten mathematischen Verstande sich herabzulassen die Fähigkeit hatte und in sokratischer Weise durch die einfachsten Fragen von unten auf allmählich bei der Schwierigkeit, um die es sich handelte, anlangte und sie löste, darüber liegt ein interessantes Zeugnis eines mathematischen Laien und nahen Verwandten Dirichlets vor.

Wie aber seine Worte zündeten und die Begeisterung der Hörer anfachten, so erweckten auch seine Schriften steten und lauten Nachhall in den Köpfen der neuen Generation von Mathematikern, und in diesem Sinne müssen wir auch Hermite und Weierstrass, die beiden vornehmsten Repräsentanten mathematischer Forschung in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts, zu seinen Schülern zählen.

PERSONEN-REGISTER.

Nachtrag.

Eine ausgezeichnete, von Schell herrührende Nachschrift der letzten großen, in Berlin gehaltenen Wintervorlesung Jacobis über die Theorie der krummen Flächen und Kurven doppelter Krümmung, welche durch Formvollendung und Reichhaltigkeit des Inhaltes die früheren Vorlesungen über diesen Gegenstand weit übertrifft, ist mir erst nachträglich bekannt geworden.

Eine kurze einleitende Skizzierung der Arbeiten Eulers und Monges schließt Jacobi mit den Worten:

„Außer den Krümmungslinien entdeckte auch Monge die Konstruktion der partiellen Differentialgleichungen und die Erzeugung der Flächen durch Bewegung von Kurven, die während dieser ihre Elemente ändern; diesen geometrischen Bewegungen entsprechen analytische bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen. Überhaupt sind solche Analogien sehr lehrreich. Von einem gewissen Standpunkte aus verschwinden die einzelnen Disziplinen. Operationen in der Algebra, Geometrie, Mechanik gehen in einem allgemeineren Gedanken auf. Dieser Gedanke leitete zuerst Lagrange, als er versuchte, alle mathematischen Wissenschaften aus einem Prinzipe abzuleiten. Jeder Fortschritt der einen Wissenschaft ist dann bei einem solchen Ineinandergreifen zugleich ein Fortschritt der übrigen Disziplinen. Die Wissenschaft darf keine Quelle verschmähen, aus der sie schöpfen kann. Will man als Analyst reden, so muß man sagen, daß die Stärke der Mathematik in der Symbolik bestehe, indem man damit ein ganzes System von Gedanken durch ein Zeichen fixiert, um mit dem Erblicken dieses Zeichens sogleich an diese Gedankenreihe erinnert zu werden, ohne nötig zu haben, sie noch einmal durchzudenken“;

er geht nun zur Auseinandersetzung der Grundzüge des geometrischen Differentiierens über: „Wenn die Analysis alle Verhältnisse der Lage und Figur seit Descartes auf

Größenverhältnisse zurückführt, so führt sie etwas außerhalb des Problems Liegendes ein, denn die Koordinatenachsen müssen wieder herausfallen. In besonderen Fällen kann man zwar deren Lage so bestimmen, daß sie ein Teil des Problems werden, dann nähern sich die analytischen Betrachtungen den geometrischen. Die Bedeutung einer Formel zu erkennen, dafür gibt es keine Regeln, und es bleiben daher oft einfache Resultate in den Formeln verborgen. Die geometrische Betrachtung lehrt die Formeln deuten, sie bleibt immer in der Figur, und jedes Resultat ist gerade so ausgedrückt, wie es der Gegenstand fordert. Hat man eine oder mehrere Größen durch andere ausgedrückt, die völlig bestimmt sind, so kann man untersuchen, wie jene sich ändern, wenn die Bestimmungsstücke sich ändern; man nimmt die Änderungen so klein an, daß man analytisch nach Potenzen entwickeln kann. Die geometrische Bedeutung der Entwicklungskoeffizienten anzugeben, ist sodann die Aufgabe des geometrischen Differentiierens."

Die Differentiation des sphärischen Dreiecks liefert ihm den berühmten Legendreschen Satz, daß, wenn man die Winkel eines sphärischen Dreiecks aus den Seiten berechnet, als wären diese Seiten eines ebenen Dreiecks, und dann $^1/_3$ des sphärischen Exzesses zu jedem der gefundenen Winkel hinzuaddiert, man die Winkel des sphärischen Dreiecks bis auf Größen der 4. Ordnung genau erhält, und ähnlich ergeben sich die von Bessel und Gauss gegebenen Erweiterungen.

Nachdem er nun ähnlich wie in früheren Vorlesungen über diesen Gegenstand allgemeine Betrachtungen über Berührungen verschiedener Ordnung von Kurven und Flächen angestellt, geht er zunächst zur Behandlung der Wendepunkte ebener Kurven über, die er auf der Entwicklung der Kurvengleichung nach der Taylorschen Reihe basiert, beweist auf Grund einer genauen Behandlung der Diskriminante und des invarianten Charakters derselben seinen Satz von der Anzahl der Doppeltangenten, den er bald

darauf im Crelleschen Journal veröffentlichte, und schreitet von diesen Betrachtungen aus zur Einteilung der Flächen in konkav-konkav- und konkav-konvex-Flächen. Es folgt die Aufstellung der Differentialgleichungen für die abwickelbaren und windschiefen Flächen, die Diskussion der Rotationsflächen und eine eingehende Behandlung des Berührungskegels mit Anwendung auf viele einzelne Probleme, wobei er die Methoden von Joachimsthal und Hesse, um zur Gleichung des Tangentenkegels zu gelangen, nach verschiedenen neuen Gesichtspunkten entwickelt.

Nunmehr macht er den Übergang zur allgemeinen Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen drei Variabeln, bespricht die Methode von Lagrange und geht sodann nach Behandlung der Theorie der Mongeschen Charakteristiken zu seinen eignen Methoden für die Integration der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen über, wobei er das Problem, welches, geometrisch aufgefaßt, aus der Lage der Tangentialebene die Natur der Flächen finden will, von den verschiedensten Gesichtspunkten aus behandelt. Bei der Besprechung des Pfaffschen Problems setzt er seine Methode auseinander, bei welcher man durch Einführung der Anfangswerte als willkürliche Konstanten dazu gelangt, mit der Integration eines einzigen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems auszureichen; „Cauchy hatte schon 20 Jahre früher dasselbe gefunden, allein an einem so obskuren Ort (Bulletin de la société philomatique) 1819 bekannt gemacht, daß diese Entdeckung ihm selbst entschwunden war.“ Es folgt eine ausführliche Theorie der Enveloppen und die Behandlung der Mongeschen Wendekurve.

Elegante Entwicklungen für die Theorie der Krümmungsebenen, Normalebenen und Evoluten der räumlichen Kurven bilden die Grundlage für die Theorie der kürzesten Linien auf Flächen, deren Eigenschaften und Differentialgleichung, unter Hervorhebung des Unterschiedes zwischen der kürzesten oder geodätischen Linie von der in der Geodäsie ebenso benann-

ten Kurve; er behandelt die kürzesten Linien auf Umdrehungs- und abwickelbaren Flächen, und gibt sehr interessante Ausführungen der von ihm früher veröffentlichten Sätze über von drei Kurven im Raume gebildete Dreiecke, von denen der bekannte Gausssche Satz von der curvatura integra eines von drei geodätischen Linien einer Fläche gebildeten Dreiecks nur ein spezieller Fall ist. „Man sieht, daß dieser Satz kein den Flächen inhärierender ist, sondern ein Satz von Kurven. Den sphärischen Raum nennt Gauss quadratura integra des Teiles der Fläche, der von den Kurven der Fläche eingeschlossen ist. Man sieht, daß dieser Raum gar nichts mit der Krümmung der Fläche zu tun hat. Ja man kann die Kurven im Raume ganz auseinander nehmen, sie brauchen sich gar nicht zu schneiden. Es kommt dies bei dem Satze gar nicht in Anwendung; es müssen die Kurven nur so beschaffen sein, daß der Krümmungshalbmesser am Endpunkt der ersten Kurve dieselbe Richtung hat wie der am ersten Punkte der zweiten Kurve; ob die Kurven aneinander stoßen oder nicht, darauf kommt es gar nicht an."

Nach Behandlung der Krümmungslinien und der Krümmung der Flächen werden die Theorie der Indikatrix und die Eulerschen Sätze über die Krümmung der Normalschnitte auf rein geometrischem Wege entwickelt, und nach Anwendung dieser Sätze auf die Oberflächen 2. Ordnung die Beziehung zwischen dem Krümmungshalbmesser eines schiefen Schnittes und dem des zugehörigen Normalschnittes ermittelt. Seine Untersuchungen über die Anwendung der Krümmungslinienkoordinaten deutet er nur flüchtig an, indem er sie als „mehr der Integralrechnung angehörig" bezeichnet, und geht dann ausführlich auf die Dupinschen Sätze von den drei Scharen senkrecht sich schneidender Flächen ein, wodurch er zu einer eingehenden Darstellung der Theorie der elliptischen Koordinaten veranlaßt wird. Jacobi faßt den größten Teil der Sätze über konfokale Flächen 2. Ordnung in dem Hauptsatz zusammen, den er

schon früher angedeutet, daß, wenn man aus einem beliebigen Punkt im Raume an die drei Systeme konfokaler Flächen die Berührungskegel legt, diese nicht nur dieselben Hauptachsen, sondern auch die beiden Brennlinien gemein haben, welch letztere die beiden geraden Linien des einflächigen konfokalen Hyperboloides sind, welches durch den gegebenen Punkt des Raumes geht.

In sehr einfacher und interessanter Weise wird die Theorie der Nabelpunkte dargelegt und sodann die Theorie der Krümmungslinien und kürzesten Linien an den Umdrehungsflächen erläutert.

„Um alle Fragen wenigstens anzudeuten, möge hier noch eine sehr berühmte Betrachtung folgen, welche in der Attraktion der Ellipsoide eine große Rolle spielt, und die für die Kegelschnitte von Maclaurin angestellt und später von Ivory auf die Flächen ausgedehnt worden ist, nämlich die Theorie der konjugierten Punkte zweier konfokalen Flächen", und nun entwickelt er die Sätze, welche er schon früher Steiner mitgeteilt hatte, und welche eine Fläche 2. Grades als geometrischen Ort einer Pyramidenspitze definierten, deren Entfernungen von den Eckpunkten eines Dreiecks gleich sind den Entfernungen eines im Innern eines anderen Dreiecks liegenden Punktes von den Eckpunkten dieses. „Merkwürdigerweise hat man von dem Ivoryschen Satze, obgleich er schon seit 1808 bekannt ist, bis jetzt noch keine geometrische Anwendung gemacht"; nur andeutungsweise berührt er die Anwendung aller dieser Sätze auf die Theorie der Anziehung der Ellipsoide.

Allgemeine Formeln über den Inhalt von Oberflächen und die Kubatur krummer Räume, welche auf geometrischen Betrachtungen über die Funktionaldeterminante beruhen, beschließen die Vorlesung, die er vor elf Zuhörern in Berlin vom 29. Oktober 1849 bis zum 13. März 1850 gehalten.